Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 9 - Controle proporcional

Rubens J M Afonso

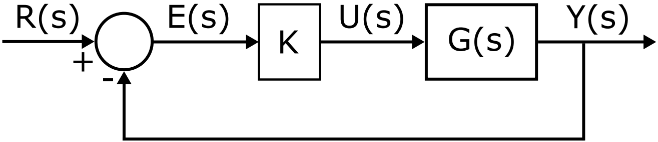
EES-10: Sistemas de Controle I

15 de março de 2018

Motivação

O sistema de controle com realimentação negativa unitária tem a função de transferência:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}. \tag{1}$$



Caso

$$G(s) = \frac{K_G}{s+\sigma}, \tag{2}$$

então,

$$T(s) = \frac{KK_G}{s+\sigma+KK_G}. \tag{3}$$

- Manipulação do ganho $K \Rightarrow$ localização do polo real em malha fechada.

Observação 1.

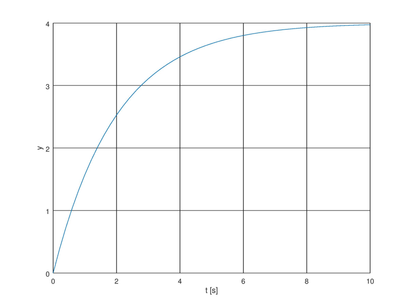
K é chamado de ganho proporcional, por resultar em sinal de controle u proporcional ao erro e.

Example 1.

Admita que $K_G = 2$ e $\sigma = 0{,}5$ na equação (2), isto é:

$$G(s) = \frac{2}{s + 0{,}5}, \tag{4}$$

cuja resposta a uma entrada degrau unitário é:



Exemplo 1 - continuação

- Requisito para a resposta a uma referência degrau unitário: $t_s^{5\%} < 3\ s$;
- Em malha aberta, tem-se $t_s^{5\%} \approx 6\ s$, que não atende o requisito $\Rightarrow$ mudar a posição do polo $-\sigma = -0{,}5$;
- Em malha fechada com realimentação unitário negativa e ganho proporcional K em cascata com $G(s)$:

$$T(s) = \frac{2K}{s + 0{,}5 + 2K}. \tag{5}$$

- Ajustando o ganho K, o polo em $-0{,}5 - 2K$ pode ser colocado em qualquer posição desejada no eixo real;

Exemplo 1 - continuação

- Sabe-se da resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau que:

$$t_s^{5\%} \approx \frac{3}{-0{,}5 - 2K} \ s \tag{6}$$

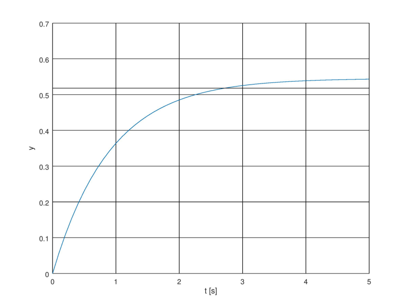
- Para satisfazer o requisito, então:

$$t_s^{5\%} \approx \frac{3}{0{,}5 + 2K} \ s < 3 \ s \Leftrightarrow K > 0{,}25, \tag{7}$$

- $K = 0{,}3$ já satisfaz o requisito.

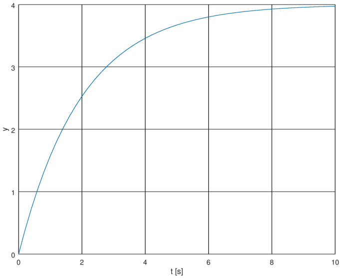
Exemplo 1 - continuação

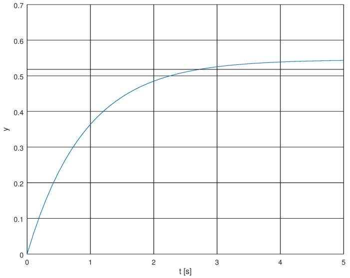
- $K = 0{,}3 \rightarrow$ sistema em malha fechada a entrada degrau unitário: a faixa de 5% (linha preta horizontal) do valor final é atingida antes de $3\ s$.



Exemplo 1 - continuação

- Valor em regime em malha aberta: 4;
- Valor em regime em malha fechada: $0{,}54$;
- Ambos distantes de 1.





MA

MF

Exemplo 1 - continuação

Requisito adicional:

- $e_{ss} < 0{,}1$ para uma entrada degrau unitário,

Da expressão de $T(s)$:

$$T(s) = \frac{2K}{s + 0{,}5 + 2K}, \tag{8}$$

tem-se que o valor em regime estacionário da saída para uma entrada degrau unitário é:

$$\frac{2K}{0{,}5 + 2K}, \tag{9}$$

assim, o erro em regime é:

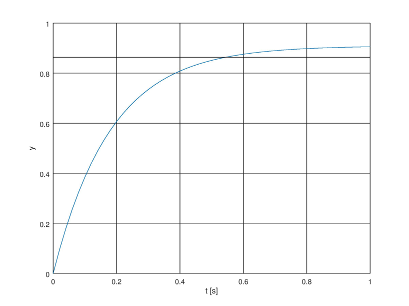
$$e_{ss} = 1 - \frac{2K}{0{,}5 + 2K} = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 2K}. \tag{10}$$

Exemplo 1 - continuação

- Para atender o requisito de erro em regime estacionário deve-se ter:

$$e_{ss} = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 2K} < 0{,}1 \Leftrightarrow K > 2{,}25; \quad (11)$$

- **Não conflita** com a faixa de ganho para atingir o tempo de acomodação desejado $\Rightarrow$ **atender ambos os requisitos**;
- Escolhendo $K = 2{,}5$, há atendimento aos dois requisitos.



Example 2.

- Sistema de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{K_G}{s(s+\sigma)}, \tag{12}$$

  com $K_G = 0{,}2$ e $\sigma = 1$;
- Polo em zero $\Rightarrow$ saída diverge para uma entrada degrau;
- Necessário o controle em malha fechada;
- Requisitos:
  - $M_p \leq 20\%$;
  - $t_p \leq 1\ s$.

Exemplo 2 - continuação

- Usando as expressões de M_p e t_p para sistemas de segunda ordem com par de polos complexos conjugados $\rightarrow$ para determinar ξ e ω_n dos polos desejados em malha fechada:

$$\xi = \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{(\ln M_p)^2 + \pi^2}} \geq 0{,}45, \tag{13}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} t_p} \geq \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{14}$$

- Função de transferência desejada em malha fechada deve ter o denominador:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2. \tag{15}$$

Exemplo 2 - continuação

Sistema de controle com realimentação negativa unitária:

$$T(s) = \frac{KK_G}{s^2 + \sigma s + KK_G}. \tag{16}$$

Igualando o denominador da função de transferência com o polinômio desejado:

$$\omega_n^2 = KK_G \rightarrow \omega_n = \sqrt{KK_G}, \tag{17}$$

$$2\xi\omega_n = \sigma \rightarrow \xi = \frac{\sigma}{2\omega_n} = \frac{\sigma}{2\sqrt{KK_G}}. \tag{18}$$

Exemplo 2 - continuação

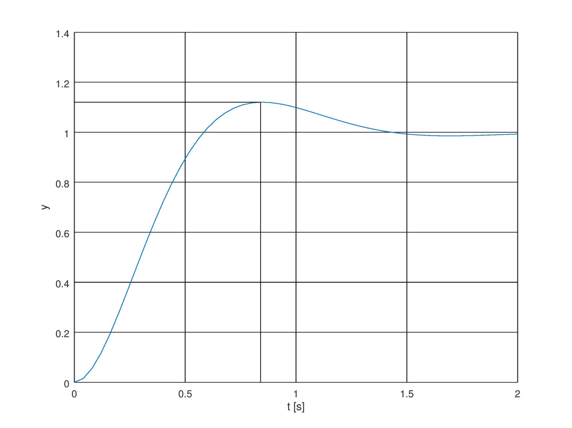
Substituindo os valores de $K_G = 0{,}2$ e $\sigma = 5$ da planta em malha aberta e considerando as desigualdades obtidas ξ e ω_n através dos requisitos:

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{KK_G}} \geq 0{,}45 \rightarrow KK_G \leq 1{,}24\sigma^2 \rightarrow K \leq 155, \tag{19}$$

$$\sqrt{KK_G} \geq \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\sqrt{KK_G}}{\sqrt{4KK_G - \sigma^2}} \rightarrow KK_G \geq \frac{4\pi^2 + \sigma^2}{4} \tag{20}$$
$$\rightarrow K \geq 80{,}6.$$

Exemplo 2 - continuação

- Escolha de $K = 100$ deve satisfazer ambos os requisitos;
- Em simulação saída tem $M_p = 12\%$ e $t_p = 0{,}84\ s$.



Observação 2.

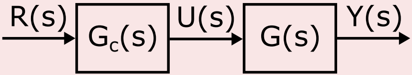
Note que a função de transferência em malha fechada do exemplo 2 dada na equação (16) *tem ganho DC unitário para qualquer valor de* K. *Isto quer dizer que o erro em regime estacionário para entrada degrau será nulo independentemente do valor de* K.

Vantagens da operação em malha fechada

Podem-se manipular (até certo ponto) os polos da função de transferência em malha fechada mediante escolha do ganho em cascata com a planta $\rightarrow$ uma vantagem da operação em malha fechada para porque pudemos atender os requisitos de projeto.

Por que não colocar a função de transferência $G_c(s) = 2{,}5\frac{s+0{,}5}{s+5{,}5}$ em cascata com a planta $G(s) = \frac{2}{s+0{,}5}$ em malha aberta diretamente, sem realimentação?

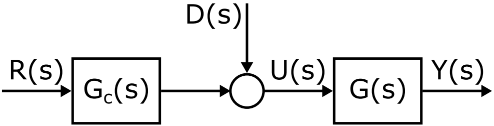
A função de transferência equivalente seria $T'(s) = \frac{5}{s+5{,}5}$, exatamente a mesma obtida em malha fechada, portanto com a mesma resposta temporal.



Resposta: fatores não modelados, como a entrada de uma perturbação ou erro em algum parâmetro do modelo.

Perturbação

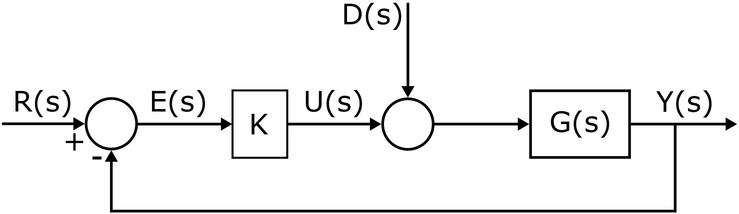
- **Perturbação**: sinal que não é manipulado e torna a saída diferente do esperado se desconsiderada;
- Muitas vezes o seu valor é desconhecido;
- No sistema de controle em malha aberta pode-se ter uma perturbação $D(s)$ adicionada à entrada. Esta perturbação poderia ser uma tensão de viés na saída do sistema que alimenta a planta, por exemplo.



A função de transferência $T_{d,MA}(s)$ entre a perturbação e a saída para o sistema em malha aberta é:

$$T_{d,MA}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = G(s). \tag{21}$$

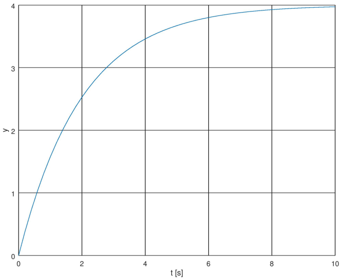
Para o sistema em malha fechada com ganho proporcional:

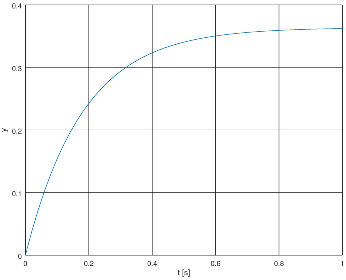


A função de transferência $T_{d,MF}(s)$ entre a perturbação e a saída é dada por:

$$T_{d,MF}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1+KG(s)}. \tag{22}$$

Admitindo uma perturbação em degrau unitário ($D(s) = \frac{1}{s}$) e referência nula ($R(s)$ = 0):





MA MF

- Redução de mais de 10 vezes na amplitude do efeito da perturbação na saída quando em malha fechada.;
- Diferença entre $T_{d,MA}(s)$ e $T_{d,MF}(s)$ é que a última pode ser manipulada através do ganho $K \Rightarrow$ reduzir o efeito da perturbação mediante escolha do ganho.

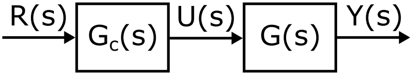
Sensibilidade a erro de parâmetros

Os modelos dos sistemas podem não ser exatos:

- por problemas inerentes às medidas dos parâmetros;
- por estes variarem;
- por simplificações adotadas no modelo;
- entre outros.

Medir o quanto o comportamento do sistema é afetado: razão entre a variação relativa da função de transferência pela variação relativa do parâmetro = **Sensibilidade**.

Sensibilidade com controle em MA



Com controle em malha aberta e admitindo variação no parâmetro K_G:

$$\frac{\frac{\Delta G_c(s)G(s)}{G_c(s)G(s)}}{\frac{\Delta K_G}{K_G}} = \frac{\Delta G_c(s)G(s)}{\Delta K_G}\frac{K_G}{G_c(s)G(s)}. \tag{23}$$

Se admitirmos variação infinitesimal do parâmetro:

$$S_{MA}(s) = \frac{\partial G_c(s)G(s)}{\partial K_G}\frac{K_G}{G_c(s)G(s)}. \tag{24}$$

Representando o polo desejado por σ_d, pode-se escolher $G_c(s) = \frac{K(s+\sigma)}{s+\sigma_d}$:

$$G_c(s)G(s) = \frac{KK_G}{s+\sigma_d}. \quad (25)$$

Então,

$$S_{MA}(s) = \frac{\partial G_c(s)G(s)}{\partial K_G}\frac{K_G}{G_c(s)G(s)} = \frac{K}{s+\sigma_d}\frac{s+\sigma_d}{K} = 1. \quad (26)$$

Sensibilidade com controle em MF

Em malha fechada, tem-se:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{KK_G}{s+\sigma+KK_G}. \tag{27}$$

Então,

$$\begin{aligned} S_{MF}(s) &= \frac{\partial T(s)}{\partial K_G}\frac{K_G}{T(s)} = \frac{K}{[1+KG(s)]^2}\frac{\partial G(s)}{\partial K_G}\frac{K_G\,[1+KG(s)]}{KG(s)} \\ &= \frac{1}{1+KG(s)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Observação 3.

Em MF, para obter o polo desejado, ter-se-ia que escolher $K = \frac{\sigma_d - \sigma}{K_G}$

Comparando $S_{MA}(s)$ e $S_{MF}(s)$, nota-se que se pode reduzir a **sensibilidade** do sistema a variações nos parâmetros por meio da realimentação.

Example 3.

Caso se tenha a função de transferência em MA dada por

$$G(s) = \frac{2}{s+0{,}5}, \tag{29}$$

e o polo desejado seja $\sigma_d = 5{,}5$, então, em malha fechada o ganho será:

$$K = \frac{\sigma_d - \sigma}{K_G} = 2{,}5\,, \tag{30}$$

a fim de se ter o mesmo valor em regime com o sistema em malha aberta, escolhe-se

$$K = 2{,}5\,, \tag{31}$$

também em malha aberta.

Exemplo 3 - continuação

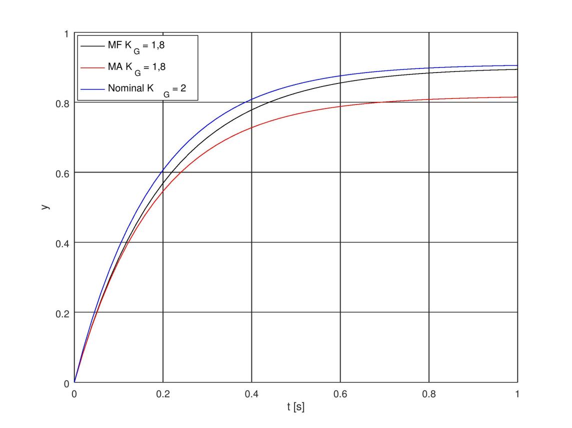
Supondo que o ganho K_G seja reduzido a 90% de seu valor nominal, em malha aberta a redução será também de 90% na saída, visto que a sensibilidade vale 1. Já em malha fechada:

$$S_{MF}(s) = \frac{1}{1+KG(s)} = \frac{s+\sigma}{s+\sigma+K\cdot K_G\cdot 0{,}9} = \frac{s+0{,}5}{s+0{,}5+2{,}5\cdot 2\cdot 0{,}9} = \frac{s+0{,}5}{s+5}. \tag{32}$$

Quanto à função de transferência em malha fechada:

$$T(s) = \frac{1{,}8K}{s+0{,}5+1{,}8K} = \frac{4{,}5}{s+5}. \tag{33}$$

Exemplo 3 - continuação



Observação 4.

As funções $S_{MA}(s)$ e $S_{MF}(s)$ são chamadas de "sensibilidade", pois remetem à sensibilidade do sistema a variações nos parâmetros.