



# Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

## Aula 5 - Linearização harmônica <sup>1</sup>

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

---

<sup>1</sup> J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 5, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

# Linearização harmônica

Método usado para prever a existência de ciclo limite, estimando sua amplitude e frequência.

Consideremos o sistema com Entrada Única e Saída Única (*Single Input Single Output* – SISO):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu, \\ y &= C\mathbf{x},\end{aligned}$$

com uma não linearidade  $\Psi$ , tal que

$$u = \Psi[y],$$

em que o par  $(A,B)$  é controlável e o par  $(C,A)$  é observável.



A função de transferência do sistema linear é:

$$G(s) = u = C[sI - A]^{-1}B = \frac{q(s)}{p(s)},$$

em que  $p(s)$  e  $q(s)$  são polinômios em  $s$ .

Admitindo que  $G(s)$  seja **estritamente própria**, segue que:

- $\text{grau}[p(s)] > \text{grau}[q(s)]$ .

Agora, supondo que o sinal  $y$  é periódico com período  $T$  (frequência  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ), pode-se escrever  $y$  como série de Fourier:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t},$$

em que

$$a_{-k} = a_k^* \text{ (complexo conjugado),}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau.$$



A saída da não linearidade  $\Psi$  também será periódica com período  $T$ :

$$\Psi[y(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t},$$

em que

$$c_{-k} = c_k^* \text{ (complexo conjugado),}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T [\Psi[y(\tau)] e^{-jk\omega\tau}] d\tau.$$

Para que  $y(t)$  seja saída do sistema linear, deve satisfazer:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{q(s)}{p(s)} \rightarrow p(s)Y(s) - q(s)U(s) = 0.$$



Definindo o operador diferencial:

$$D = \frac{d}{dt}$$

e aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} p(D)y(t) - q(D) \underbrace{u(t)}_{\Psi[y(t)]} &= 0, \\ p(D)y(t) - q(D)\Psi[y(t)] &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo  $y$  e  $\Psi$  por suas séries de Fourier:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [p(jk\omega)a_k - q(jk\omega)c_k]e^{jk\omega t} = 0.$$



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [p(jk\omega)a_k - q(jk\omega)c_k]e^{jk\omega t} = 0.$$

Então, os coeficientes devem satisfazer

$$p(jk\omega)a_k - q(jk\omega)c_k = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{p(jk\omega)}} a_k - \underbrace{G(jk\omega)}_{\frac{q(jk\omega)}{p(jk\omega)}} c_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Como  $a_{-k} = a_k^*$ ,  $c_{-k} = c_k^*$  e  $G(jk\omega) = G^*(-jk\omega)$ , é necessário considerar apenas  $k \geq 0$ .

Visto que  $G(s)$  é estritamente própria

$$|G(jk\omega)| \xrightarrow{k\omega \rightarrow \infty} 0.$$

então,

$$a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$



$$a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Assim, podemos truncar a série, a fim de calcular um número finito de termos.

Caso usemos apenas o termo

$$a_1 - G(j\omega)c_1 = 0,$$

tem-se o método conhecido como **função descritiva**.



# Função descritiva

Supondo

$$y(t) = a \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{a}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}),$$

resultam

$$a_1 = \frac{a}{2j},$$

$$a_k = 0, \forall k \neq 1.$$

Sendo a saída periódica (período  $T$ ):

$$u(t) = \Psi[y(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega t},$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k e^{jk\omega t} + c_{-k} e^{-jk\omega t}] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k e^{jk\omega t} + c_k^* (e^{jk\omega t})^*],$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{c_k e^{jk\omega t}\},$$





$$u(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [2 \operatorname{Re}\{c_k\} \cos(k\omega t) - 2 \operatorname{Im}\{c_k\} \sin(k\omega t)]$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)].$$


Lembrando que

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T [\Psi[y(\tau)] e^{-jk\omega\tau}] d\tau,$$

têm-se

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi[y(\tau)] d\tau \underbrace{=}_{\theta=\omega\tau} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[a \sin \theta] d\theta,$$

$$A_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = \frac{2}{T} \int_0^T \Psi[y(\tau)] \cos(k\omega\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[a \sin \theta] \cos(k\theta) d\theta,$$

$$B_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = \frac{2}{T} \int_0^T \Psi[y(\tau)] \sin(k\omega\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[a \sin \theta] \sin(k\theta) d\theta$$


## Observações

- 1 Em geral,  $c_0$ ,  $A_k$  e  $B_k$  são funções de  $a$  e não de  $\omega$ ;
- 2 Se  $\Psi[y]$  for uma função ímpar ( $\Psi[y] = -\Psi[-y]$ ):
  - $c_0 = 0$ ;
  - $A_k = 0$ .

A função descritiva da não linearidade  $u = \Psi[y]$  é definida como a razão entre os coeficientes das séries de Fourier da saída e da entrada:

$$N(a, \omega) \triangleq \frac{c_1}{a_1} = \frac{\frac{A_1 - jB_1}{2}}{\frac{a}{2j}} = \frac{B_1 + jA_1}{a}.$$

Caso  $\Psi$  seja ímpar

$$N(a, \omega) = \frac{B_1}{a} = \frac{B_1 \sin(\omega t)}{a \sin(\omega t)} = \frac{u(t)}{y(t)}.$$



**Exemplo:** Função descritiva do relé ideal.

$$u = \Psi[y] = \begin{cases} 1 & , y > 0 \\ -1 & , y < 0 \end{cases}.$$

Com  $y(t) = \text{sen}(\omega t)$

$$u(t) = \Psi[y(t)] = \begin{cases} 1 & , 2n\pi < \omega t < (2n+1)\pi \\ -1 & , (2n+1)\pi < \omega t < 2(n+1)\pi \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T [\Psi[y(\tau)]] e^{-jk\omega\tau} d\tau = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-jk\omega\tau} d\tau - \frac{\omega}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-jk\omega\tau} d\tau. \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\omega} + \frac{e^{-jk2\pi} - e^{-jk\pi}}{jk\omega} \right) = \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1 - \cos(k\pi)}{jk\pi} \\ &= \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi} \end{aligned}$$



$$c_k = \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi} = \begin{cases} 0 & , k \text{ par} \\ \frac{2}{jk\pi} & , k \text{ ímpar} \end{cases} ,$$

donde

$$c_1 = \frac{2}{j\pi},$$

$$B_1 = -2\text{Im}\{c_1\} = \frac{4}{\pi}.$$

Assim

$$N(a) = \frac{B_1}{a_1} = \frac{4}{\pi a}.$$



# Prevendo oscilações

Consideremos o sistema

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = -u = -\text{sgn}(y).$$

A função de transferência da parte linear é:

$$G(s) = \frac{-1}{s^3 + 2s^2 + 4s}.$$

donde

$$G(j\omega) = \frac{-1}{j\omega(4 - \omega^2) - 2\omega^2} = \frac{j\omega(4 - \omega^2) + 2\omega^2}{\omega^2(4 - \omega^2)^2 + 4\omega^4}.$$



Lembrando da equação entre os coeficientes  $c_k$  e  $a_k$ :

$$a_k - G(jk\omega)c_k = 0.$$

Para  $k = 1$ :

$$a_1 - G(j\omega)c_1 = 0 \rightarrow 1 - G(j\omega) \underbrace{\frac{c_1}{a_1}}_{N(a)} = 0.$$

Então, a condição para oscilação de frequência  $\omega$  e amplitude  $a$  é:

$$1 - G(j\omega)N(a) = 0.$$



No caso de  $u = \text{sgn}(y)$  (relé ideal),  $N(a) = \frac{4}{\pi a}$ :

$$1 - G(j\omega) \frac{4}{\pi a} = 0.$$

Separando entre partes real e imaginária:

$$1 - \frac{4}{\pi a} \frac{2}{(4 - \omega^2)^2 + 4\omega^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{4 - \omega^2}{\omega(4 - \omega^2)^2 + 4\omega^3} = 0. \quad (2)$$

Resolvendo a (2), tem-se:

$$\omega = 2 \text{ rad/s.}$$

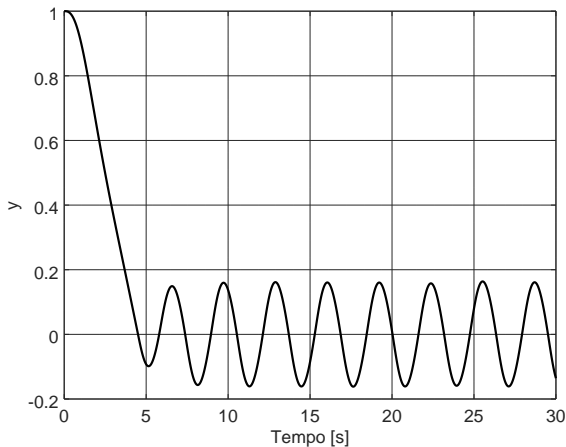
Substituindo este valor em (1), tem-se:

$$1 - \frac{8}{16\pi a} \rightarrow a = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16.$$



$$\omega = 2 \text{ rad/s} \rightarrow T = \pi \approx 3,14 \text{ s},$$

$$a = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16.$$





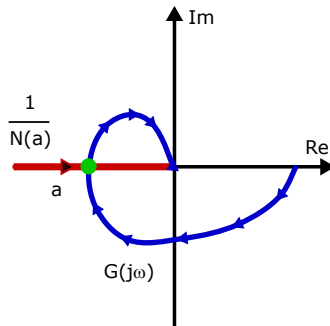
# Estabilidade de oscilações

Podem-se desenhar os gráficos de  $\frac{1}{N(a,\omega)}$  e  $G(j\omega)$  na forma polar. Em particular, se mapearmos o contorno de Nyquist por  $G(s)$ , um trecho corresponderá a  $G(j\omega)$ . Nesse caso, a oscilação ocorre quando os gráficos de  $G(j\omega)$  e  $\frac{1}{N(a,\omega)}$  se cruzam, pois:

$$G(j\omega) = \frac{1}{N(a,\omega)} \rightarrow 1 - G(j\omega)N(a,\omega) = 0.$$

No caso de  $N$  não depender de  $\omega$  ( $N(a) \in \mathbb{R}$ ), bastará verificar o cruzamento dos gráficos no eixo real.

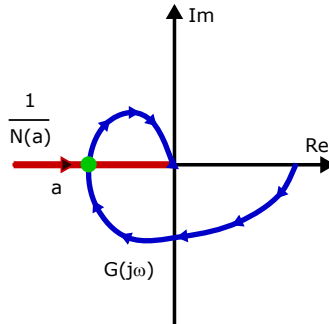




Sejam:

- $P$ : número de polos de malha aberta (MA) de  $G(s)$  no semiplano direito (SPD);
- $N$ : número de voltas do gráfico polar de  $G(s)$  avaliado sobre o contorno de Nyquist **no mesmo sentido** em que o contorno é percorrido (adotamos sentido horário);
- $Z$ : número de polos de malha fechada (MF) no semiplano direito (SPD).



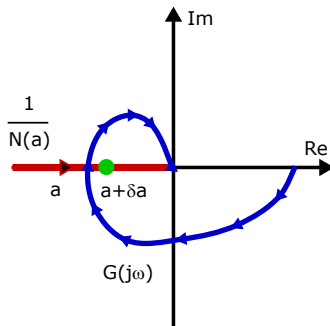


**Cr terio de Nyquist:**  $Z = N + P$ .

Caso tenhamos  $P = 0$  (sistema estável em malha aberta), deseja-se que  $N = 0$  para que  $Z = 0$  (sistema estável em malha fechada).



Vamos supor que a amplitude de oscilação sofra uma perturbação  $+\delta a$ , com  $\delta a > 0$ . Nesse caso, o ponto na curva de  $\frac{1}{N(a)}$  se desloca como mostrado:



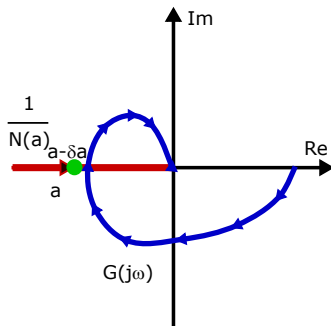
Assim, passa-se a ter  $N = 1$ .

**Cr terio de Nyquist:**  $Z = N + P = 1 + 0 = 1 \rightarrow$  **sistema instável.**

Assim, a tendência   que a **amplitude aumente ainda mais.**



Alternativamente, vamos supor que a amplitude de oscilação sofra uma perturbação  $-\delta a$ , com  $\delta a > 0$ . Nesse caso, o ponto na curva de  $\frac{1}{N(a)}$  se desloca como mostrado:



Assim, passa-se a ter  $N = 0$ .

**Cr terio de Nyquist:**  $Z = N + P = 0 + 0 = 0 \rightarrow$  **sistema estável.**

Assim, a tendência   que a **amplitude diminua ainda mais.**



## Conclusão:

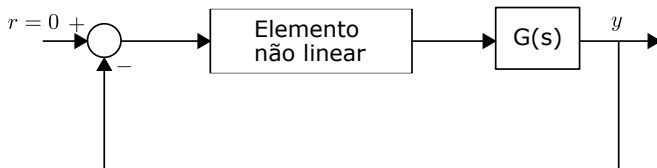
- 1 Um deslocamento positivo na amplitude faz com que cresça indefinidamente;
- 2 Um deslocamento negativo faz com que diminua até 0.

Desse modo, a oscilação **não é estável**.



# Critério de Loeb – uma condição necessária

Sistema em malha fechada com realimentação negativa unitária:



$$1 + G(j\omega)N(a, \omega) = 0.$$

Definindo

$$X(a, \omega) = \operatorname{Re}\{1 + G(j\omega)N(a, \omega)\},$$

$$Y(a, \omega) = \operatorname{Im}\{1 + G(j\omega)N(a, \omega)\}.$$

Tem-se:

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0.$$



Assumindo perturbações:

$$a \rightarrow a + \delta a,$$

$$\omega \rightarrow \omega + \delta\omega + j\delta\sigma$$

Tem-se:

$$X(a + \delta a, \omega + \delta\omega + j\delta\sigma) + jY(a + \delta a, \omega + \delta\omega + j\delta\sigma) = 0.$$

Expandindo em série de MacLaurin:

$$\frac{\partial X(a, \omega)}{\partial a} \delta a + \frac{\partial X(a, \omega)}{\partial \omega} (\delta\omega + j\delta\sigma) + j \frac{\partial Y(a, \omega)}{\partial a} \delta a + j \frac{\partial Y(a, \omega)}{\partial \omega} (\delta\omega + j\delta\sigma) = 0$$





$$\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial a}\delta a + \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega}(\delta\omega + j\delta\sigma) + j\frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial a}\delta a + j\frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}(\delta\omega + j\delta\sigma) = 0$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial a}\delta a + \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\omega - \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\sigma &= 0, \\ \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\sigma + \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial a}\delta a + \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\omega &= 0.\end{aligned}$$

Isolando  $\delta\omega$  na segunda equação:

$$\delta\omega = -\frac{\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\sigma + \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial a}\delta a}{\frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}}.$$

Substituindo  $\delta\omega$  na primeira equação:

$$\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial a}\delta a + \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega}\left[-\frac{\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\sigma + \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial a}\delta a}{\frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}}\right] - \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}\delta\sigma = 0$$



$$\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial a} \delta a + \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega} \left[ -\frac{\frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega} \delta \sigma + \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial a} \delta a}{\frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}} \right] - \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega} \delta \sigma = 0$$

Multiplicando por  $\frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial a} \delta a - \left[ \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega} \right]^2 \delta \sigma + \\ \frac{\partial X(a,\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial a} \delta a - \left[ \frac{\partial Y(a,\omega)}{\partial \omega} \right]^2 \delta \sigma = 0 \end{aligned}$$

Isolando:

$$\left\{ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a} \right\} \delta a = \left\{ \left[ \frac{\partial X}{\partial \omega} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right]^2 \right\} \delta \sigma$$



$$\left\{ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a} \right\} \delta a = \left\{ \left[ \frac{\partial X}{\partial \omega} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right]^2 \right\} \delta \sigma$$

Para oscilações sustentadas, quando a amplitude aumenta deve aparecer um termo exponencial real com expoente negativo e vice-versa, assim:

$$\frac{\delta a}{\delta \sigma} > 0$$

Como

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial \omega} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right]^2 > 0$$

Então

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a} > 0$$

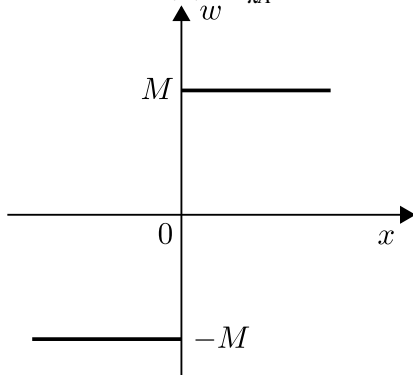


# Função descritiva de algumas não-linearidades comuns

$$x(t) = A \sin(\omega t), \text{ com } A \geq a$$

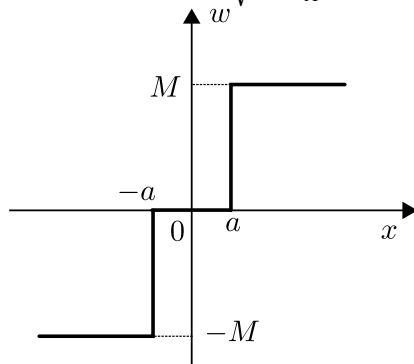
**Relé ideal**

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$



**Relé com zona morta**

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}$$

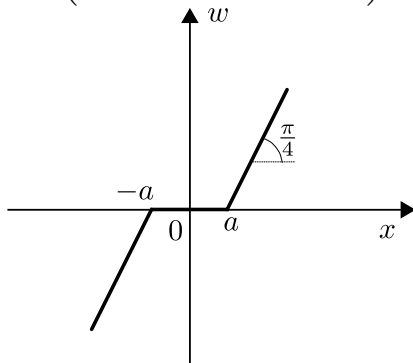


$$x(t) = A \sin(\omega t), \text{ com } A \geq a$$

### Zona morta

$$N(A) =$$

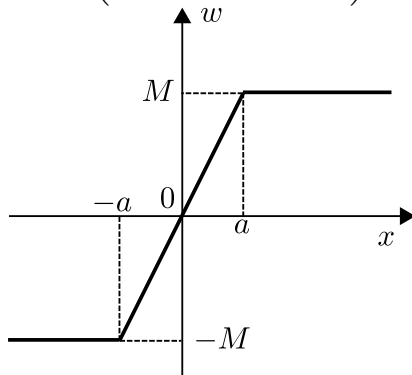
$$\frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$$



### Saturação

$$N(A) =$$

$$\frac{2M}{\pi a} \left( \sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$$



$$x(t) = A \sin(\omega t), \text{ com } A \geq a$$

### Folga de engrenagem

$$|N(A)| = \frac{1}{A} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \angle N(A) = \tan^{-1} \frac{a_1}{b_1}, \text{ em que:}$$

$$a_1 = \frac{4a}{\pi} \left( \frac{a}{A} - 1 \right),$$

$$b_1 = \frac{A}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left( \frac{2a}{A} - 1 \right) - \left( \frac{2a}{A} - 1 \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2a}{A} - 1 \right)^2} \right]$$

