



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 1 - Modelagem através da formulação lagrangeana ¹

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

23 de agosto de 2017

¹William F. Osgood, *Mechanics*, The Macmillan Company, 1949

Obtenção de modelos matemáticos de sistemas complexos

- Estudo de sistemas requer obter modelos matemáticos de sistemas reais.
- Modelos baseados em princípios físicos são os mais utilizados para controle de sistemas. P. ex.:
 - Sistemas mecânicos podem ser modelados através das leis de Newton.
 - Circuitos elétricos podem ser modelados aplicando-se as leis de Kirchhoff e conhecendo o modelo elétrico de cada componente do circuito.
- Interface de muitos subsistemas, interação entre subsistemas mecânicos translacionais e rotacionais, elétricos, químicos, etc.,
→ métodos mais genéricos → sistematização do processo de modelagem.



Formulação lagrangeana

- Vantagem: eliminar forças de restrição que não realizam trabalho no sistema $\rightarrow \downarrow$ incógnitas desnecessárias.
- Envolve *coordenadas intrínsecas* e *funções intrínsecas*.
 - Funções intrínsecas: a energia cinética, o trabalho ou o seu negativo. i. e., a energia potencial.
 - Coordenadas intrínsecas: o número mínimo de variáveis independentes necessárias para descrever o sistema. Normalmente chamadas *coordenadas generalizadas*.

Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

em que T é a energia cinética, V é a energia potencial, q_i é a i -ésima coordenada generalizada e $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.



Exemplo motivador - massa deslizando em um fio

Suponhamos que uma massa pontual de massa m deslize em um fio cuja posição varie de acordo com:

$$x = \phi(q, t) \quad (2)$$

$$y = \vartheta(q, t) \quad (3)$$

$$z = \psi(q, t) \quad (4)$$

em que as funções ϕ , ϑ e ψ , bem como suas derivadas, são contínuas e $\frac{\partial \phi}{\partial q}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial q}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ não se anulam simultaneamente.

As equações de movimento são:

$$m\ddot{x} = X + X \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = Y + Y \quad (6)$$

$$m\ddot{z} = Z + Z \quad (7)$$

em que (X, Y, Z) são as forças aplicadas e $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ são as forças de restrição.



Vínculo das forças de restrição

As forças de restrição obedecem:

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0, \quad (8)$$

em que (λ, μ, ν) representam um vetor tangente ao fio na posição da massa. Nesse ponto, o produto interno se anula pois as forças de reação são perpendiculares ao fio.

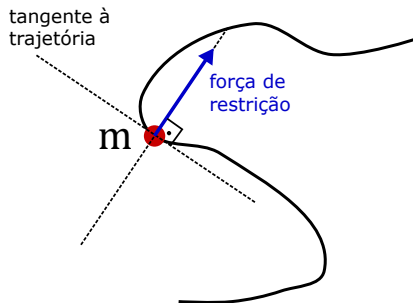


Figura: Fio e massa livre para se mover ao longo dele.



Eliminação das forças de restrição

Multiplicando (5) por $\frac{\partial x}{\partial q}$, (6) por $\frac{\partial y}{\partial q}$ e (7) por $\frac{\partial z}{\partial q}$ e somando, tem-se:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) = X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + Z \frac{\partial z}{\partial q} + \underbrace{X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + Z \frac{\partial z}{\partial q}}_0 \quad (9)$$

em que o termo à direita se anula porque o vetor $(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q})$ é tangente ao fio.

Tomando $Q = X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + Z \frac{\partial z}{\partial q}$, podemos escrever de forma compacta:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q \quad (10)$$



Energia cinética

Por outro lado, a função que representa a energia cinética é

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (11)$$

em que

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \quad (12)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial y}{\partial t} \quad (13)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial z}{\partial t} \quad (14)$$



Derivadas da energia cinética com respeito a \dot{q}

Podemos derivar (11) com respeito a \dot{q} para obter:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}} \right) \quad (15)$$

De (12), (13) e (14), têm-se:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial y}{\partial q} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial z}{\partial q} \quad (18)$$

Substituindo em (15):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) \quad (19)$$



Derivadas da energia cinética com respeito a q

Por outro lado, derivando (11) com respeito a q :

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q} \right) \quad (20)$$


De (12), (13) e (14), têm-se:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial q} = \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial t} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial q} = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t} \quad (23)$$

substituindo em (20), resulta:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \left[\dot{x} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \right) + \dot{y} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial t} \right) + \dot{z} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t} \right) \right] \quad (24)$$


Derivada temporal

Agora, derivando (19) com respeito ao tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q} + \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} + \dot{z} \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q} \right) \quad (25)$$

Calculando as derivadas com respeito ao tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial t} \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t} \quad (28)$$



Observando os lados direitos de (21), (22) e (23) e de (26), (27) e (28), respectivamente, conclui-se que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q} \quad (31)$$



Obtendo equação envolvendo forças generalizadas

Substituindo (29), (30) e (31) em (25):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q} \right) \quad (32)$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \underbrace{m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} \right)}_Q + \underbrace{m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q} \right)}_{\frac{\partial T}{\partial q}} \quad (33)$$

De (20) e (10), conclui-se que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} + Q \quad (34)$$



Presença de forças

O trabalho τ realizado por uma força F é:

$$\tau = \oint F \cdot d\vec{l} = \oint (F_x, F_y, F_z) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right) dq \quad (35)$$

desenvolvendo a expressão

$$\tau = \oint \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q} + F_y \frac{\partial y}{\partial q} + F_z \frac{\partial z}{\partial q} \right) dq \quad (36)$$

Da definição de Q (10), tem-se que:

$$Q = F \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right) \quad (37)$$

isto é, precisamente o integrando de (36). Assim:

$$Q = \frac{\partial \tau}{\partial q} \quad (38)$$



Obtendo a Equação de Lagrange

Então, para a coordenada q , (34) fica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \tau}{\partial q} \quad (39)$$

em que τ é o trabalho das forças externas. Em particular, se forem conservativas, o trabalho não depende do caminho e o trabalho é o oposto da energia potencial associada V :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial V}{\partial q} \quad (40)$$

Exemplos dessas forças são as forças gravitacional ($V = mgh$, m : massa do corpo, g : aceleração da gravidade e h : altura com relação ao ponto inicial) e elétrica ($V = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r$, q_1 : carga do corpo 1, q_2 : carga do corpo 2, ϵ_0 : permeabilidade elétrica do vácuo e r : distância com relação ao ponto inicial).



Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar sobre um arco de raio a que gira em torno de um eixo vertical com velocidade constante ω . Determine a dinâmica do ângulo θ que o raio unindo a massa ao centro do arco forma com o eixo vertical, como na Fig. 2.

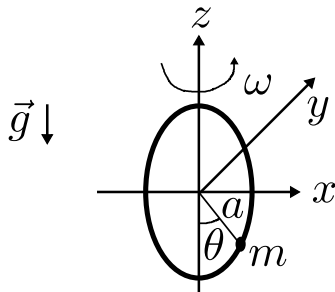


Figura: Arco girando com relação ao eixo vertical para o exemplo



Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = a \sin(\theta) \cos(\omega t) \quad (41)$$

$$y = a \sin(\theta) \sin(\omega t) \quad (42)$$

$$z = -a \cos(\theta) \quad (43)$$

em que $q = \theta$ é a coordenada generalizada.

Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = a [\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\omega t) - \omega \sin(\theta) \sin(\omega t)] \quad (44)$$

$$\dot{y} = a [\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\omega t) + \omega \sin(\theta) \cos(\omega t)] \quad (45)$$

$$\dot{z} = a \dot{\theta} \sin(\theta) \quad (46)$$



Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] = \frac{ma^2}{2} [\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)] \quad (47)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ma^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{m}{2} a^2 \omega^2 \sin(2\theta) \quad (48)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \dot{\theta} \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \ddot{\theta} \quad (50)$$



Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgh = mga [1 - \cos(\theta)] \quad (51)$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga \sin(\theta) \quad (52)$$

Usando a Equação de Lagrange (40):

$$ma^2\ddot{\theta} - \frac{m}{2}a^2\omega^2 \sin(2\theta) = -mga \sin(\theta) \quad (53)$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2} \sin(2\theta) - \frac{g}{a} \sin(\theta) \quad (54)$$



Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar sobre um fio que gira em torno de um eixo horizontal com velocidade constante ω . Determine a dinâmica da distância r entre a massa e o centro rotação, como na Fig. 3.

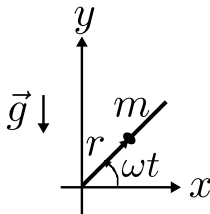


Figura: Fio girando com relação ao eixo horizontal para o exemplo



Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = r \cos(\omega t) \quad (55)$$

$$y = r \sin(\omega t) \quad (56)$$

em que $q = r$ é a coordenada generalizada.

Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t) \quad (57)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \quad (58)$$



Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) \quad (59)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r \omega^2 \quad (60)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad (61)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \quad (62)$$



Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mgr \sin(\omega t) \quad (63)$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = mg \sin(\omega t) \quad (64)$$

Usando a Equação de Lagrange (40):

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = -mg \sin(\omega t) \quad (65)$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{r} = r\omega^2 - g \sin(\omega t) \quad (66)$$



Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar em um arco que rola sobre um plano horizontal horizontal sem deslizar com velocidade constante v . Determine a dinâmica do ângulo θ entre o raio que se liga à massa e a vertical, como na Fig. 4.

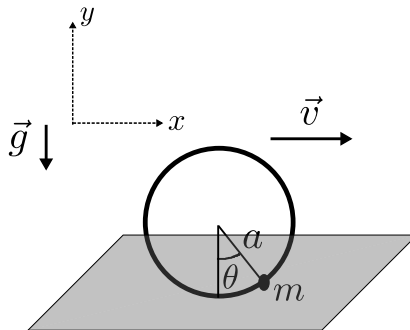


Figura: Arco rolando sobre um plano horizontal para o exemplo



Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = vt + a \sin(\theta) \quad (67)$$

$$y = a[1 - \cos(\theta)] \quad (68)$$

em que $q = \theta$ é a coordenada generalizada.

Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = v + a\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (69)$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta} \sin(\theta) \quad (70)$$



Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [v^2 + 2va\dot{\theta}\cos(\theta) + a^2\dot{\theta}^2] \quad (71)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -mva\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (72)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mva\cos(\theta) + ma^2\dot{\theta} \quad (73)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -mva\dot{\theta}\sin(\theta) + ma^2\ddot{\theta} \quad (74)$$



Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mga[1 - \cos(\theta)] \quad (75)$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga \sin(\theta) \quad (76)$$

Usando a Equação de Lagrange (40):

$$-mva\dot{\theta} \sin(\theta) + ma^2\ddot{\theta} - [-mva\dot{\theta} \sin(\theta)] + mga \sin(\theta) = 0 \quad (77)$$

Agrupando os termos e dividindo por ma^2 :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin(\theta) = 0 \quad (78)$$

que é a equação de um pêndulo simples.



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar em um arco que rola sobre um plano horizontal sem deslizar, porém sujeito a atrito com o solo, cujo coeficiente é μ . Assuma que a massa do aro é M . Determine a dinâmica do ângulo θ entre o raio que se liga à massa e a vertical, como na Fig. 5 e da posição horizontal do centro do arco x_M .

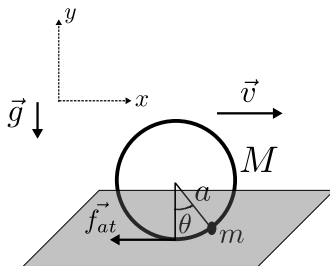


Figura: Aro rolando sobre um plano horizontal com atrito para o exemplo



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

O momento de inércia do aro é dado por

$$J = Ma^2. \quad (79)$$

A velocidade v é:

$$v = a\omega. \quad (80)$$

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições da massa m :

$$x = x_M + a \sin(\theta) \quad (81)$$

$$y = a[1 - \cos(\theta)] \quad (82)$$

em que $q_1 = \theta$ e $q_2 = x_M$ são as coordenadas generalizadas.

Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = v + a\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (83)$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta} \sin(\theta) \quad (84)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A energia cinética é:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2} v^2 + \frac{J}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{M}{2} a^2 \omega^2 + \frac{M a^2}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} [v^2 + 2va\dot{\theta} \cos(\theta) + a^2 \dot{\theta}^2] \\ &= M a^2 \omega^2 + \frac{m}{2} [v^2 + 2va\dot{\theta} \cos(\theta) + a^2 \dot{\theta}^2] \\ &= M \dot{x}_M^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_M^2 + m a \dot{x}_M \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{m}{2} a^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A energia cinética é:

$$T = M\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_M^2 + m\dot{x}_M\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2 \quad (85)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial x_M} = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\dot{x}_M\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (87)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M} = 2M\dot{x}_M + m\dot{x}_M + m\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (88)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}_M\cos(\theta) + ma^2\dot{\theta} \quad (89)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M} = 2M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_M + m\ddot{\theta}\cos(\theta) - m\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (90)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\ddot{x}_M\cos(\theta) - m\dot{x}_M\dot{\theta}\sin(\theta) + ma^2\ddot{\theta} \quad (91)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mga[1 - \cos(\theta)] \quad (92)$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial x_M} = 0 \quad (93)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga \sin(\theta) \quad (94)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A força externa é o atrito, dado por:

$$Q_{x_M} = f_{at} = -\mu(M + m)g. \quad (95)$$

Usando a Equação de Lagrange (40) em cada coordenada generalizada:

$$x_M : (2M + m)\ddot{x}_M + ma\ddot{\theta}\cos(\theta) - ma\dot{\theta}^2\sin(\theta) = -\mu(M + m)g, \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \theta : m\ddot{x}_M\cos(\theta) - m\dot{x}_M\dot{\theta}\sin(\theta) + ma^2\ddot{\theta} + \\ + m\dot{x}_M\dot{\theta}\sin(\theta) + mga\sin(\theta) = 0, \end{aligned}$$

$$\theta : \ddot{x}_M\cos(\theta) + a\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0. \quad (97)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

As equações (96) e (97) relacionam as acelerações segundo as coordenadas generalizadas x_M e θ . Se considerarmos que $M \gg m$ em (96), isto é, que a massa do aro é muito maior do que a da massa pontual, então:

$$\ddot{x}_M = -\frac{\mu}{2}g. \quad (98)$$

Substituindo \ddot{x}_M de (98) em (97):

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a} \left[\frac{\mu}{2} \cos(\theta) - \sin(\theta) \right]. \quad (99)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Encontrando o ponto de equilíbrio de (99):

$$\frac{\mu}{2} \cos(\theta_{eq}) - \sin(\theta_{eq}) = 0 \rightarrow \theta_{eq} = \arctan\left(\frac{\mu}{2}\right). \quad (100)$$

Linearizando com pequenos deslocamentos $\delta\theta$ em torno deste ponto de equilíbrio, isto é, admitindo que $\theta = \theta_{eq} + \delta\theta$ em (99)

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\theta} &= \frac{g}{a} \left[\frac{\mu}{2} \frac{d}{d\theta} \cos(\theta) \Big|_{\theta=\theta_{eq}} - \frac{d}{d\theta} \sin(\theta) \Big|_{\theta=\theta_{eq}} \right] \delta\theta, \\ &= \frac{g}{a} \left[-\frac{\mu}{2} \sin(\theta_{eq}) - \cos(\theta_{eq}) \right] \delta\theta, \\ &= \frac{g}{a} \left\{ -\frac{\mu}{2} \sin \left[\arctan \left(\frac{\mu}{2} \right) \right] - \cos \left[\arctan \left(\frac{\mu}{2} \right) \right] \right\} \delta\theta \end{aligned} \quad (101)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Agora, usando relações trigonométricas, têm-se:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\mu}{2}, \quad (102)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (103)$$

Resolvendo, encontram-se:

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{2\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}}, \quad (104)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}}. \quad (105)$$

Donde, substituindo em (101), tem-se:

$$\delta \ddot{\theta} = -\frac{g\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}}{a} \delta \theta. \quad (106)$$

O modelo linearizado prevê oscilação como um pêndulo simples.



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Reescrevendo as equações (96) e (97) usando as variáveis de estado: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x_M$ e $x_4 = \dot{x}_M$, têm-se:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (107)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{a} [\dot{x}_4 \cos x_1 - g \sin x_1], \quad (108)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (109)$$

$$\dot{x}_4 = -\mu g \frac{m+M}{m+2M} + a \frac{m}{m+2M} x_2^2 \sin x_1 - a \frac{m}{m+2M} \dot{x}_2 \cos x_1. \quad (110)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Substituindo \dot{x}_4 de (110) em (108), obtém-se:

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{a} \left[\left(-\mu g \frac{m+M}{m+2M} + a \frac{m}{m+2M} x_2^2 \operatorname{sen} x_1 - a \frac{m}{m+2M} \dot{x}_2 \cos x_1 \right) \cos x_1 - g \operatorname{sen} x_1 \right]. \quad (111)$$

Isolando \dot{x}_2 de (111):

$$\dot{x}_2 = \frac{\left(-\mu \frac{g}{a} \frac{m+M}{m+2M} + \frac{m}{m+2M} x_2^2 \operatorname{sen} x_1 \right) \cos x_1 - \frac{g}{a} \operatorname{sen} x_1}{\left(1 + \frac{m}{m+2M} \cos x_1 \right)}. \quad (112)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Usando este valor de \dot{x}_2 em (110):

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -\mu g \frac{m+M}{m+2M} + a \frac{m}{m+2M} x_2^2 \operatorname{sen} x_1 + \\ & - a \frac{m}{m+2M} \frac{\left(-\mu \frac{g}{a} \frac{m+M}{m+2M} + \frac{m}{m+2M} x_2^2 \operatorname{sen} x_1\right) \cos x_1 - \frac{g}{a} \operatorname{sen} x_1}{\left(1 + \frac{m}{m+2M} \cos x_1\right)} \cos x_1 \end{aligned} \quad (113)$$

Desta forma, podem-se substituir (108) e (110) por (112) e (113) , respectivamente, para reescrever as equações de estado na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}). \quad (114)$$



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Usando integração numérica de (114) podemos simular o comportamento da massa pontual presa ao aro rolante. Usando os seguintes valores para os parâmetros:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad (115)$$

$$M = 200 \text{ kg}, \quad (116)$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2, \quad (117)$$

$$\mu = 0,005 \text{ e} \quad (118)$$

$$a = 2,5 \text{ m} \quad (119)$$

e partindo da condição inicial $\mathbf{x}^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 2]$, simula-se o comportamento do sistema.



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

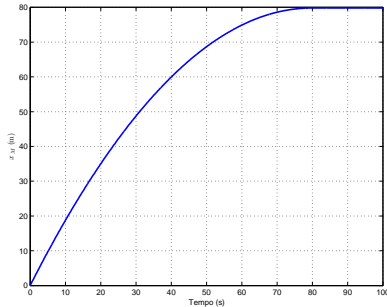


Figura: Posição do centro do arco pelo tempo na presença de atrito.

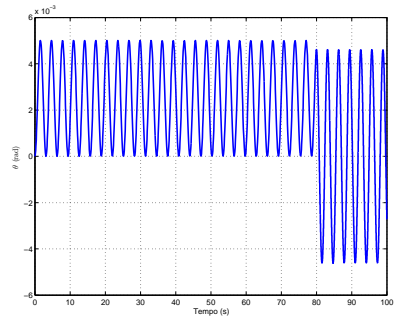


Figura: Posição angular da massa pontual pelo tempo na presença de atrito.



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Nota-se que

- Há desaceleração do aro até parar devido ao atrito.
- Há movimento oscilatório da massa pontual causado pelo movimento do aro.
- A oscilação se dá em torno de $\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{\mu}{2}\right) = 0,0025$ rad com frequência aproximadamente dada por

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{g\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1}}{a}} = 2 \text{ rad/s, que resulta em um período de } T_{osc} = \pi \text{ s, que são os valores obtidos pelo modelo linear aproximado quando } M \gg m.$$

- Após o aro parar, a amplitude das oscilações angulares aumenta. Esta amplitude de oscilação após a parada do rolamento do aro depende de qual é o ângulo da massa pontual no instante em que o arco para, que serve como condição inicial para um movimento de pêndulo simples da massa em torno de $\theta = 0$.



Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito partindo de $x_4(0) = 2,2$ m/s

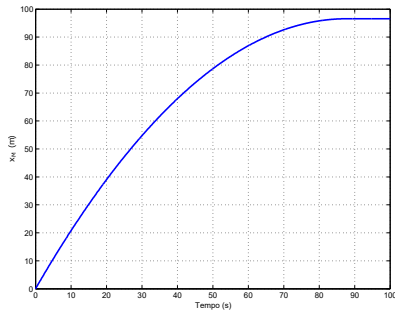


Figura: Posição do centro do arco pelo tempo na presença de atrito partindo de $x_4(0) = 2,2$ m/s.

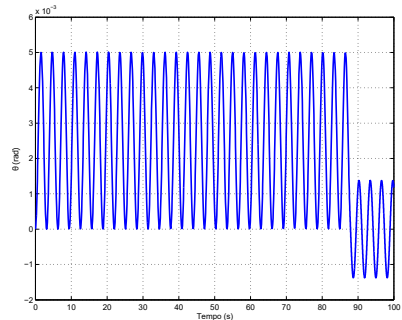


Figura: Posição angular da massa pontual pelo tempo na presença de atrito partindo de $x_4(0) = 2,2$ m/s.



Equação de Lagrange para sistemas com dissipação

Principalmente no caso de circuitos elétricos, usualmente há elementos dissipadores, tais como resistores. Nesse caso, a equação de Lagrange fica sendo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (120)$$

em que

- $L = T - V$ é o “lagrangeano”,
- R é a chamada função de dissipação de Rayleigh. Usualmente, **é igual à metade da potência dissipada.**



Exemplo 5 - Circuito RLC

No caso do circuito RLC a seguir, pode-se escolher como **coordenada generalizada a carga no capacitor q** , resultando que $\dot{q} = i$.

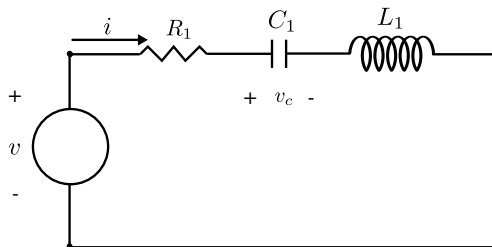


Figura: Circuito RLC



Exemplo 5 - Circuito RLC

Assim:

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{q}^2 = \frac{1}{2}L_1\dot{q}^2, \text{ energia no indutor} \quad (121)$$

$$V = \frac{1}{2}C_1v_c^2 = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{q}{C_1}\right)^2 = \frac{1}{2C_1}q^2, \text{ energia no capacitor} \quad (122)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}L_1\dot{q}^2 - \frac{1}{2C_1}q^2 \quad (123)$$

$$R = \frac{1}{2}R_1\dot{q}^2 = \frac{1}{2}R_1\dot{q}^2, \text{ metade da potência dissipada no resistor} \quad (124)$$

$$Q = v \quad (125)$$



Exemplo 5 - Circuito RLC

Tomando as derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_1 \dot{q} \quad (126)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_1 \ddot{q} \quad (127)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C_1} \quad (128)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = R_1 \dot{q} \quad (129)$$

Substituindo na Equação de Lagrange (120):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} &= Q, \\ L_1 \ddot{q} + \frac{q}{C_1} + R_1 \dot{q} &= v. \end{aligned} \quad (130)$$



Exemplo 5 - Circuito RLC

O modelo obtido foi:

$$L_1 \ddot{q} + \frac{q}{C_1} + R_1 \dot{q} = v,$$

obtenha o modelo usando as leis de Kirchhoff e conclua sobre sua validade.

