



# Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

## Aula 9 - Análise de estabilidade pelos métodos de Lyapunov <sup>1</sup>

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

27 de novembro de 2017

---

<sup>1</sup> J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 3, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

# Análise de estabilidade pelos métodos de Lyapunov

Há dois métodos de Lyapunov que permitem a análise de estabilidade para sistemas não lineares:

- 1 Primeiro método de Lyapunov ou método indireto: consiste em usar a linearização por série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio (PE) e analisar a estabilidade do sistema linear resultante. O resultado, porém, é válido em uma vizinhança desconhecida do PE. Permite justificar o emprego das técnicas de projeto de controladores para sistemas lineares sob a hipótese de que o comportamento do sistema permanece linear em uma vizinhança do PE.
- 2 Segundo método de Lyapunov ou método direto: utiliza-se uma função escalar auxiliar para analisar a estabilidade do sistema sem realizar aproximações. A vantagem é que as conclusões são válidas para conjuntos que podem ser bem determinados em torno do PE. Por outro lado, pode ser difícil encontrar uma função escalar adequada para realizar a análise.



# Definições preliminares

## Definição (Ponto de Equilíbrio – PE)

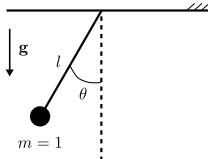
Seja o sistema não linear autônomo com vetor de estados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

diz-se que  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto de equilíbrio (PE) de (1) se:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$



**Exemplo:** Pêndulo de haste rígida.

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Escolhendo:

$$x_1 = \theta,$$

$$x_2 = \dot{\theta},$$

têm-se

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin x_1.$$



Assim,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \operatorname{sen} x_1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \bar{x}_2 = 0 \\ \operatorname{sen} \bar{x}_1 = 0 \end{matrix}.$$

Desse modo, há infinitos PE:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Um PE pode ser **estável** ou **instável**.

### Definição (Estabilidade local no sentido de Lyapunov)

Diz-se que um PE  $\bar{\mathbf{x}}$  é estável se existem uma bola de raio  $r > 0$  centrada em  $\bar{\mathbf{x}}$ , denotada por  $\mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq r\}$ , e outra bola  $\mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$ , tais que qualquer trajetória iniciada em  $\mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}})$  sempre permaneça em  $\mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$ .

Formalmente:

$$\forall R, 0 < R < M, \forall t \geq 0, \exists r \text{ tal que } \mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})^a.$$

<sup>a</sup>Sempre é possível transladar o PE para a origem mediante a mudança de

variáveis  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}$  em (1), obtendo  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} + \overset{0}{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ . Adicionalmente, note que  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ . Assim, podemos nos limitar a analisar a estabilidade da origem de sistemas.

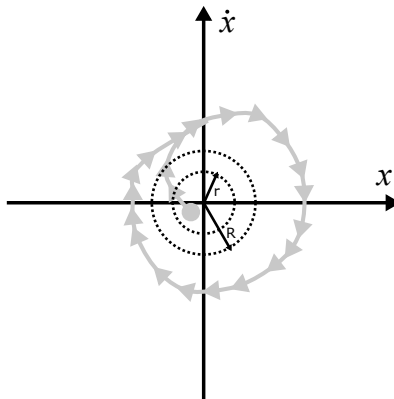
### Definição (Instabilidade)

Diz-se que um PE é instável quando não é estável.



**Exemplo:** Instabilidade do oscilador de Van der Pol.

No plano de fase:



Pela figura, vemos que  $\nexists r, \forall R, 0 < R < M, \forall t \geq 0$ , tal que  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$



### Definição (Estabilidade assintótica)

A origem é assintoticamente estável se é estável e  $\|\mathbf{x}(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , i. e., as trajetórias ficam arbitrariamente próximas à origem à medida em que o tempo aumenta.





### Definição (Estabilidade exponencial)

A origem é exponencialmente estável se, além de assintoticamente estável,  $\exists \alpha, \lambda > 0$  tais que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Ou seja, não só as trajetórias ficam arbitrariamente próximas à origem à medida em que o tempo aumenta, a distância é limitada superiormente por uma exponencial decrescente com o tempo.



# Primeiro método de Lyapunov

Vimos na Aula 6 que, se  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  for continuamente diferenciável, pode-se expandir em série de Taylor em torno de  $\bar{\mathbf{x}}$ :

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}). \quad (2)$$

Expandindo o termo do lado direito de (2) em série de Taylor em torno de  $\bar{\mathbf{x}}$ :

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} + O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right). \quad (3)$$

Em que  $O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right)$  contém termos de ordem maior. Então,

$$\cancel{\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \cancel{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} + O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right).$$



$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} + O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right).$$

Na vizinhança do PE, pode-se negligenciar a contribuição dos termos de ordem mais elevada frente à dos termos de ordem 1, resultando que o comportamento do sistema é aproximadamente ditado por:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} = A\delta\mathbf{x}.$$

No primeiro método de Lyapunov os autovalores da matriz  $A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}$  são usados para concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.



### Teorema (Primeiro método de Lyapunov – método indireto)

Sejam  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  os  $n$  autovalores de  $A$ , então:

- i O PE é assintoticamente estável se  $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- ii O PE é instável se  $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \text{Re}\{\lambda_i\} > 0$ .
- iii Nada se pode afirmar se  $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \text{Re}\{\lambda_i\} = 0$  e  $\nexists j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \text{Re}\{\lambda_j\} > 0$ .



**Exemplo:** Para o pêndulo de haste rígida

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \operatorname{sen} x_1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Têm-se dois tipos de pontos de equilíbrio diferentes, quando  $\bar{x}_1 = 2k\pi$  e quando  $\bar{x}_1 = (2k+1)\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .



Analizando cada caso:

$$\bar{x}_1 = 0$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_0) = \lambda^2 + \frac{g}{l}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

**Nada se pode afirmar.**

$$\bar{x}_1 = \pi$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^2 - \frac{g}{l}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}$$

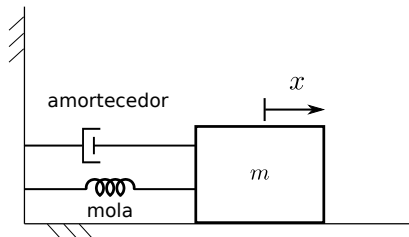
**Instável**



## Segundo método de Lyapunov – método direto

O segundo método de Lyapunov permite analisar a estabilidade a partir da definição de uma função escalar “tipo energia” associada ao sistema (1).

**Exemplo motivador:** Massa-mola-amortecedor



Mola não linear e amortecedor:

$$m\ddot{x} = -kx^3 - b\dot{x}|\dot{x}|.$$



Energia cinética

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Energia potencial

$$E_p = \int_0^x k\xi^3 d\xi = \frac{kx^4}{4}.$$

Energia mecânica

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^4}{4}.$$

Variação temporal da energia:

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx^3\dot{x} = \dot{x}(-kx^3 - b\dot{x}|\dot{x}| + kx^3) = -b\dot{x}^2|\dot{x}| \leq 0.$$





Variação temporal da energia:

$$\frac{dE_m}{dt} = -b\dot{x}^2|\dot{x}| \leq 0.$$

A energia mecânica não aumenta. Ao contrário, é dissipada (derivada negativa) até que  $\dot{x} = 0$ , isto é, até que a massa pare.

O segundo método de Lyapunov fornece condições sobre a função escalar associada (que pode se assemelhar à energia ou não) e suas derivadas para que se possa analisar a estabilidade de um PE.



### Definição (Função positivo definida – PD)

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é dita ser localmente positivo definida (PD) se

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &> 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_R(0), \mathbf{x} \neq 0, \\ V(0) &= 0. \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &> 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0, \\ V(0) &= 0, \end{aligned}$$

então  $V$  é dita ser globalmente PD.

### Definição (Função negativo definida – ND)

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é dita ser localmente/globalmente negativo definida (ND) se  $-V$  é localmente/globalmente positivo definida.



**Exemplos:**

$$V(x) = x^2 \text{ globalmente PD}$$

$$V(x) = -|x| \text{ globalmente ND}$$



**Exemplos:**

$$V(x) = x^2 \text{ globalmente PD}$$

$$V(x) = -|x| \text{ globalmente ND}$$

A função  $V(\mathbf{x}) = x_1^2$ , com  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$  é PD?



**Exemplos:**

$$V(x) = x^2 \text{ globalmente PD}$$

$$V(x) = -|x| \text{ globalmente ND}$$

A função  $V(\mathbf{x}) = x_1^2$ , com  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$  é PD?

Não, porque  $\exists \mathbf{x} \neq 0 \mid V(\mathbf{x}) = 0$ , pois  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \forall x_2 \in \mathbb{R}$ .



### Definição (Função positivo semidefinida – PSD)

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é dita ser localmente positivo semidefinida (PD) se

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_R(0).$$

Se

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

então  $V$  é dita ser globalmente PSD.

### Definição (Função negativo semidefinida – NSD)

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é dita ser localmente/globalmente negativo semidefinida (NSD) se  $-V$  é localmente/globalmente positivo semidefinida.



### Definição (Função de Lyapunov)

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é dita ser uma função de Lyapunov para (1) se tiver derivadas parciais contínuas e

- $V$  é PD;
- $\dot{V}$  é NSD.



### Teorema (Segundo método de Lyapunov – versão local)

*Se em uma bola  $\mathcal{B}_R(0)$  existir uma função de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  para o sistema (1), então a origem é ponto de equilíbrio (PE) estável de (1). Se  $\dot{V}$  for ND, a origem é PE assintoticamente estável em  $\mathcal{B}_R(0)$ .*

### Demonstração.

Seja a esfera de raio  $R$  centrada na origem denotada por  $\mathcal{S}_R(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = R\}$ . A função  $V$  é contínua, portanto possui um valor mínimo  $m > 0$  em  $\mathcal{S}_R(0)$ . Existe uma bola  $\mathcal{B}_r(0)$  tal que  $V(\mathbf{x}) < m$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_r(0)$ , visto que  $V$  é contínua e  $V(0) = 0$ . Como  $\dot{V} \leq 0$ ,  $V$  não pode crescer com o tempo. Uma vez que  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(0) \Rightarrow V(\mathbf{x}(0)) < m$ ,  $V$  nunca pode ultrapassar o valor  $m$ . Por consequência,  $\mathbf{x}(t)$  não pode cruzar a esfera  $\mathcal{S}_R(0)$ , pois isso requer que  $V(\mathbf{x}(t)) \geq m$ . Assim:  $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(0)$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_R(0)$ , precisamente a definição de estabilidade aplicada à origem.





Voltando ao exemplo do massa-mola-amortecedor e definindo Energia mecânica

$$V(\mathbf{x}) = E_m = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^4}{4} \text{ (PD)},$$

em que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Variação temporal da energia:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dE_m}{dt} == -b\dot{x}^2|\dot{x}| \text{ (NSD)}.$$

Aplicando teorema, conclui-se que a origem é PE (localmente) estável.



### Teorema (Segundo método de Lyapunov – versão global)

*Seja uma função de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  para o sistema (1), se:*

- $V(\mathbf{x}) \xrightarrow{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \infty$  (radialmente ilimitada – RI),

*então a origem é ponto de equilíbrio (PE) globalmente estável de (1).*

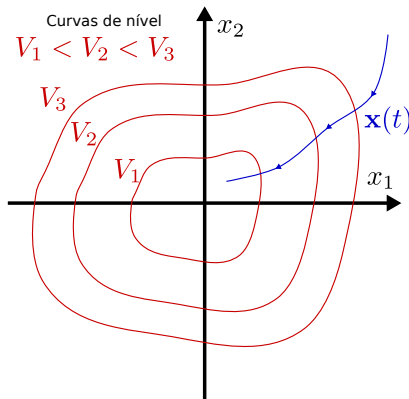
*Se  $\dot{V}$  for ND, a origem é PE globalmente assintoticamente estável.*

A premissa adicional impõe que as curvas de nível de  $V(\mathbf{x})$  sejam fechadas, evitando que a função  $V$  tenda a zero mesmo que o estado se distancie da origem.



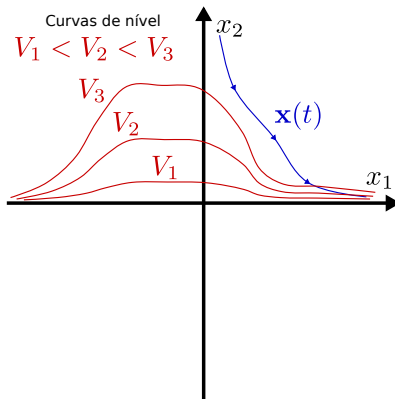
# Necessidade de ser RI – interpretação geométrica

A premissa adicional impõe que as curvas de nível de  $V(\mathbf{x})$  sejam fechadas, evitando que a função  $V$  tenda a zero mesmo que o estado se distancie da origem.



# Necessidade de ser RI – interpretação geométrica

A premissa adicional impõe que as curvas de nível de  $V(\mathbf{x})$  sejam fechadas, evitando que a função  $V$  tenda a zero mesmo que o estado se distancie da origem.



**Exemplo:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$



**Exemplo:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$

A origem é PE.

Arbitrando:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \text{ (PD e RI),}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \cancel{x_1x_2} - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - \cancel{x_1x_2} - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - (x_1^2 + x_2^2)^2 \text{ (ND)}.\end{aligned}$$

Aplicando teorema, conclui-se que a origem é PE globalmente assintoticamente estável.



# Conjuntos invariantes

## Finalidades:

- demonstrar que o PE é **assintoticamente** estável mesmo quando  $\dot{V} \leq 0$  (NSD);
- demonstrar convergência par um conjunto não trivial.

## Definição

Diz-se que um conjunto  $G \in \mathbb{R}^n$  é invariante para um determinado sistema dinâmico (1) se todas as trajetórias iniciadas em  $G$  permanecem em  $G$  por todo o tempo.

## Example (triviais)

PE, 1 trajetória específica e ciclo limite.



### Teorema (LaSalle: local)

Sejam um sistema dinâmico (1) (com  $\mathbf{f}$  contínua) e uma função escalar  $V(\mathbf{x})$ . Admita que:

- para algum  $l > 0$ , a região  $\Omega_l = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < l\}$  é limitada <sup>a</sup>;
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_l$ .

Sejam também  $\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \Omega_l : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$  e o “maior”<sup>b</sup> conjunto invariante  $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ .

Então, todas as trajetórias em  $\Omega_l$  convergem para  $\mathcal{M}$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

---

<sup>a</sup>contida em uma bola de raio finito

<sup>b</sup>união de todos os conjuntos invariantes em  $\mathcal{R}$

Este teorema reflete a noção de que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , dado que  $V(\mathbf{x})$  é limitada inferiormente por 0 e  $\Omega_l$  é limitado.





**Exemplo:** Massa-mola-amortecedor

Relembrando:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{4}kx_1^4, \text{ em que } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases},$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3.$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$  é NSD, assim não conseguimos demonstrar que a origem é **assintoticamente** estável.

Porém:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pela expressão de  $V(\mathbf{x})$ :

$$\Omega_l = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{4}kx_1^4 < l \right\}.$$



Tomemos uma transformação  $y_1 = \frac{x_1\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}, y_2 = \frac{x_2\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$ :

$$\Omega_l = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{y}) = y_1^4 + y_2^2 < l\}.$$

Tomemos a bola  $\mathcal{B}_R(0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq R\}$ . Assim, tem-se que,  $\forall \mathbf{y} \in \Omega_l$ :

$$(y_1^2 + y_2^2) - (y_1^4 + y_2^2) = y_1^2(1 - y_1^2) \leq \frac{1}{4},$$

$$(y_1^2 + y_2^2) \leq (y_1^4 + y_2^2) + \frac{1}{4} < l + \frac{1}{4} \leq R, \forall R \geq l + \frac{1}{4}$$

Assim,  $\Omega_l \subset \mathcal{B}_R(0), \forall R \geq l + \frac{1}{4} \Rightarrow \Omega_l$  limitado.



Então:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \Omega_l : V(\mathbf{x}) = 0\} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega_l : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Voltando à EDO, em  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx^3 - \cancel{b\dot{x}|x|}, \\ m\ddot{x} &= -kx^3, \\ m\dot{x}_2 &= -kx_1^3 \xrightarrow{x_2(t)=0} x_1 = 0. \end{aligned}$$

Desta forma:  $\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega_l : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ . Pelo teorema de LaSalle, as trajetórias devem convergir **assintoticamente** para a origem ( $\mathcal{M}$ ).



### Teorema (LaSalle: global)

*Sejam um sistema dinâmico (1) (com  $\mathbf{f}$  contínua) e uma função escalar  $V(\mathbf{x})$  com as primeiras derivadas parciais contínuas. Admita que:*

- $V(\mathbf{x}) \xrightarrow{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \infty$ ;
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

*Sejam também  $\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$  e o “maior” conjunto invariante  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$ .*

*Então, todas as trajetórias convergem para  $\mathcal{M}$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*



**Exemplo:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2x_2 - x_2^3.\end{aligned}$$

Seja:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \text{ (PD, RI),}$$

então,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2^3 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 = x_2^2(2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2) \\ &\quad - x_2^2(x_1 - x_2)^2 \leq 0 \text{ (NSD)}.\end{aligned}$$



Encontrando  $\mathcal{R}$ :

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = y$$

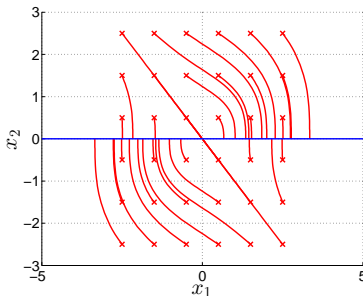
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2y^3 \\ \dot{x}_2 = -2y^3 \end{cases}$$

invariante

anula  $\dot{\mathbf{x}}$  em  $y = 0$  (origem).

Assim,  $\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ , e qualquer trajetória converge assintoticamente para a reta  $x_2 = 0$ .



# Método de Krasovskii

## Teorema (Krasovskii)

*Sejam o sistema autônomo (1) com apenas a origem como PE e:*

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

*a matriz jacobiana associada. Se a matriz  $F = A^T + A$  for ND em uma vizinhança  $\Omega^a$  da origem, então a origem é PE assintoticamente estável e*

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

*é uma função de Lyapunov para o sistema (1).*

---

<sup>a</sup>se, adicionalmente,  $\Omega = \mathbb{R}^n$  e  $V(\mathbf{x}) \xrightarrow{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \infty$ , então a origem é PE globalmente assintoticamente estável



### Demonstração.

Da definição

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (4)$$

Do enunciando, apenas a origem é PE, então:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \quad (5)$$

De (4) e (5), conclui-se que  $V(\mathbf{x})$  é PD.





## Continuação.

Calculando a derivada com respeito ao tempo:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{f}}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{f}^T(\mathbf{x})A^T\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})A\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})[A^T + A]\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}^T(\mathbf{x})F\mathbf{f}(\mathbf{x}) &< 0\end{aligned}\tag{6}$$

Como  $V(\mathbf{x})$  é PD e  $\dot{V}(\mathbf{x})$  é ND, aplicando o segundo método de Lyapunov, conclui-se que a origem é assintoticamente estável. □

