



# Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

## Aula 2 - Fenômenos não lineares <sup>1</sup>

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

---

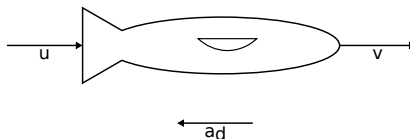
<sup>1</sup> J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 1, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

# Motivação para estudo de sistemas não lineares

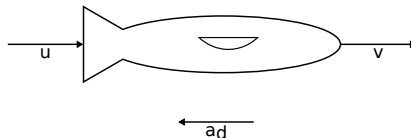
- Pergunta: por que estudar sistemas não-lineares?
- Resposta: A maior parte dos sistemas reais é não-linear.

**Exemplo:** veículo subaquático

- $v$ : velocidade
- $u$ : aceleração (entrada manipulada)
- $a_d$ : arrasto
- $m = 1$ : massa



# Modelo matemático



Da segunda Lei de Newton:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}, \quad (1)$$

$$\dot{v} = u - a_d, \quad (2)$$

$$a_d = |v| v, \quad (3)$$

$$\dot{v} + |v| v = u. \quad (4)$$

**Obs:** arrasto se opõe ao movimento e aumenta com o quadrado do módulo da velocidade.

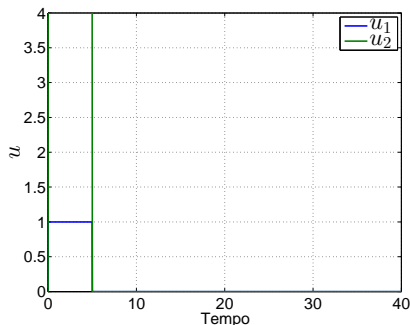


# Resposta a pulsos de amplitude diferente

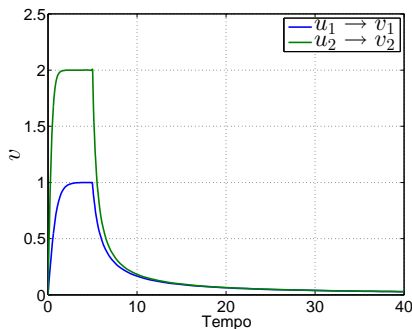
Estudemos o comportamento para as seguintes entradas:

$$u_1 = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq t_1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

$$u_2 = \begin{cases} 4, & 0 < t \leq t_1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$



As saídas são ilustradas a seguir:



Comportamento não linear:

- Entrada  $u_2 = 4u_1$ , aplicada a um sistema linear  $\rightarrow$  saída escalonada pelo fator de 4.
- Saída simulada: regime estacionário da velocidade  $v_2$  é apenas 2 vezes o valor de  $v_1$ .



# Reformular as técnicas de análise/síntese

- Técnicas importantes de análise/síntese não são aplicáveis a sistemas não lineares, p. ex., transformadas de Laplace e de Fourier.
- Usando controladores não lineares e/ou considerando as não linearidades intrínsecas da planta é possível obter desempenho superior do sistema de controle.
- Ressalva: para uma parte considerável de sistemas não lineares práticos, técnicas de sistemas lineares aplicadas na vizinhança de um ponto de equilíbrio resultam em desempenho satisfatório, como em aeronaves. Mesmo assim, muitas vezes isso é realizado para um certo número de pontos no envelope de voo, comutando entre as leis de controle lineares obtidas de acordo com a condição de voo atual. Essa é uma técnica não linear chamada de **escalonamento de ganhos** (*gain scheduling*).



# Formalização

Sistemas não lineares dinâmicos a tempo contínuo podem ser modelados como Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

em que  $\mathbf{f}$  é uma função não linear.

Se houver entrada externa  $\mathbf{u}$ , tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (8)$$

Caso o sistema opere em malha fechada e  $\mathbf{u}$  seja a variável manipulada,  $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ , então se pode reescrever (8) como (7).



# Classes de não linearidades

Em termos de suas propriedades matemáticas, as não linearidades podem ser classificadas como:

- Contínuas: podem ser localmente aproximadas por funções contínuas. Ex.:  $f(x) = x^2$ .
- Descontínuas: não podem ser localmente aproximadas por funções contínuas com precisão arbitrária. Ex.: Relé ideal

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Presente em uma variedade de sistemas, incluindo satélites.

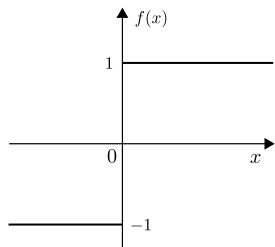


Figura: Relé ideal.





# Alguns comportamentos de sistemas não lineares

Alguns comportamentos de sistemas não lineares que os diferenciam de sistemas lineares:

- ① Múltiplos pontos de equilíbrio com características diferentes de estabilidade;
- ② Ciclo limite;
- ③ Bifurcação;
- ④ Caos.



# Múltiplos pontos de equilíbrio

Sistemas não lineares podem possuir mais do que um ponto de equilíbrio, sendo que, para um mesmo sistema, podem existir pontos de equilíbrio estáveis e pontos de equilíbrio instáveis.

**Ex.:**  $\dot{x} = -x + x^2$ .

Em equilíbrio  $\dot{x} = 0$ :

$$-\bar{x} + \bar{x}^2 = 0$$

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ e } \bar{x}_2 = 1$$

Realizando a mudança de variáveis:

$$x = \bar{x} + \delta x,$$

e substituindo na EDO:

$$\delta \dot{x} = -(\bar{x} + \delta x) + (\bar{x} + \delta x)^2 = -\underbrace{(\bar{x} + \bar{x}^2)}_0 - \delta x + 2\bar{x}\delta x + (\delta x)^2$$

$$\delta \dot{x} = (2\bar{x} - 1)\delta x + (\delta x)^2$$



$$\delta\dot{x} = (2\bar{x} - 1)\delta x + (\delta x)^2$$

Para pequenas variações  $\delta x$  em torno de  $\bar{x}$ :

$$\delta\dot{x} \approx (2\bar{x} - 1)\delta x$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\delta\dot{x} \approx -\delta x$$

Estável.

$$\bar{x} = 1$$

$$\delta\dot{x} \approx \delta x$$

Instável.



# Ciclo limite

Sistemas não lineares podem apresentar oscilações de amplitude e período constantes, independentemente das Condições Iniciais (CIs).

**Ex. 1:** Equação de Van der Pol

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

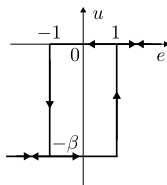
Desejável para construir osciladores.



**Ex. 2:** Suponha que um condicionador de ar será utilizado para manter a temperatura de uma sala em torno de  $R = 25^{\circ}\text{C}$ . A temperatura fora da sala é  $T$  em  $^{\circ}\text{C}$ , de modo que a sala troca calor com o ambiente. Seja a temperatura  $x$  em  $^{\circ}\text{C}$  da sala dada por

$$\dot{x} = \underbrace{\alpha}_{\text{constante}} (T - x) + u$$

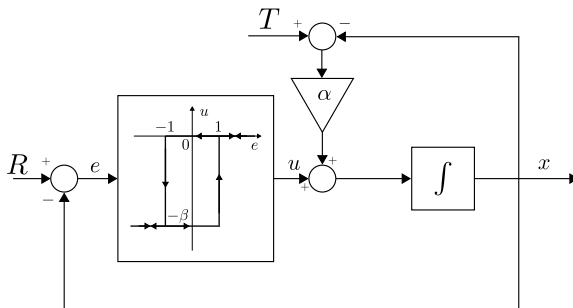
Com  $u$  dado por:



Em que  $e = R - x$  é o erro entre a temperatura desejada  $R$  em  $^{\circ}\text{C}$  e a temperatura atual  $x$ .



Em Malha Fechada (MF):



Suponhamos que a sala inicialmente se encontre em equilíbrio térmico com o ambiente, assim  $x(0) = T$ , com  $T = 35^\circ\text{C}$ :

$$e(0) = R - x(0) = -10^\circ\text{C} \rightarrow u = -\beta.$$



Com  $u = -\beta$  no intervalo  $0 \leq \tau < t_1$ , tem-se a EDO para a temperatura:

$$\dot{x} = \alpha(T - x) - \beta$$

$$\dot{x} + \alpha x = \alpha T - \beta$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} x) = e^{\alpha t} \dot{x} + \alpha e^{\alpha t} x$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} x) = e^{\alpha t} (\alpha T - \beta)$$

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt} (e^{\alpha t} x) dt = (\alpha T - \beta) \int_0^\tau e^{\alpha t} dt$$

$$e^{\alpha \tau} x(\tau) - e^{\alpha 0} x(0) = \frac{\alpha T - \beta}{\alpha} (e^{\alpha \tau} - e^{\alpha 0})$$

$$x(\tau) = e^{-\alpha \tau} \left[ x(0) - \frac{\alpha T - \beta}{\alpha} \right] + \frac{\alpha T - \beta}{\alpha}$$



$$x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left[ x(0) - \frac{\alpha T - \beta}{\alpha} \right] + \frac{\alpha T - \beta}{\alpha}.$$

Em particular, como  $x(0) = T$ , tem-se:

$$x(\tau) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\tau} + \frac{\alpha T - \beta}{\alpha},$$

para  $0 \leq \tau < t_1$ .





$$x(\tau) = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\tau} + \frac{\alpha T - \beta}{\alpha},$$

Assumindo valores:

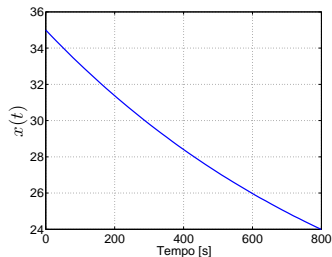
- $\alpha = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;
- $\beta = 2 \times 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/s}$ ;

e lembrando que  $T = 35^\circ\text{C}$ :

$$x(\tau) = 15 + 20e^{-0,001\tau}.$$



$$x(\tau) = 15 + 20e^{-0,001\tau}.$$

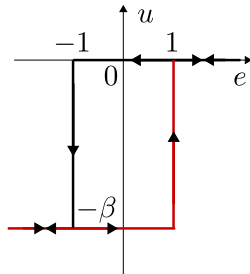


Fazendo  $x(\tau) = 24$ , calcula-se o instante  $t_1$  em que o erro  $e = 1$ :

$$t_1 = -1000 \log \frac{24 - 15}{20} = 798,5 \text{ s}$$



Quando  $e = 1$ , o valor do sinal de controle  $u$  comuta para  $u = 0$ :



Com  $u = 0$  no intervalo  $t_1 \leq \tau < t_2$ , tem-se a EDO para a temperatura:

$$\dot{x} = \alpha(T - x)$$

$$\dot{x} + \alpha x = \alpha T$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} x) = e^{\alpha t} \dot{x} + \alpha e^{\alpha t} x$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} x) = e^{\alpha t} \alpha T$$

$$\int_{t_1}^{\tau} \frac{d}{dt}(e^{\alpha t} x) dt = \alpha T \int_{t_1}^{\tau} e^{\alpha t} dt$$

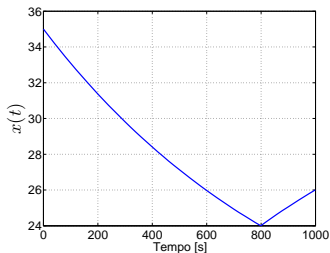
$$e^{\alpha \tau} x(\tau) - e^{\alpha t_1} x(t_1) = T(e^{\alpha \tau} - e^{\alpha t_1})$$

$$x(\tau) = T + e^{-\alpha(\tau-t_1)}[x(t_1) - T]$$



$$x(\tau) = T + e^{-\alpha(\tau-t_1)}[x(t_1) - T],$$

$$x(\tau) = 35 - 11e^{-0,001(\tau-798,5)}.$$

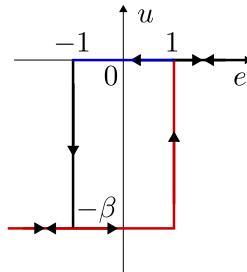


Fazendo  $x(\tau) = 26$ , calcula-se o instante  $t_2$  em que o erro  $e = -1$ :

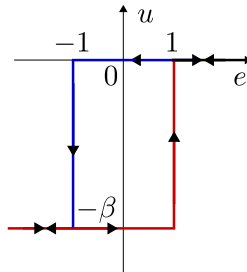
$$t_2 = 798,5 - 1000 \log \frac{35 - 26}{11} = 999,2 \text{ s}$$



Quando  $e = -1$ , o valor do sinal de controle  $u$  comuta novamente para  $u = -\beta$ :



Quando  $e = -1$ , o valor do sinal de controle  $u$  comuta novamente para  $u = -\beta$ :



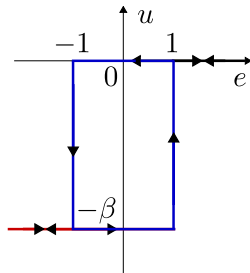
Nesse caso a EDO volta a ser

$$\dot{x} = \alpha(T - x) - \beta$$

$$x(\tau) = e^{-\alpha(\tau-t_2)} \left[ x(t_2) - \frac{\alpha T - \beta}{\alpha} \right] + \frac{\alpha T - \beta}{\alpha}$$

$$x(\tau) = 15 + 11e^{-0,001(\tau-999,2)}$$

e a temperatura desce novamente até atingir  $24^{\circ}\text{C}$  e o controlador comutar para  $u = 0$ , fechando o ciclo.



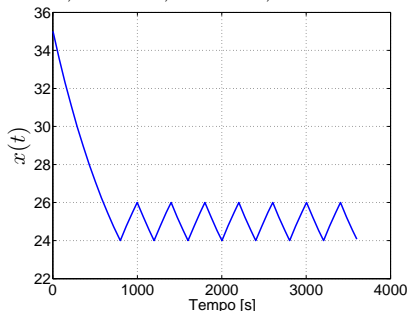


$$x(\tau) = 15 + 11e^{-0,001(\tau-999,2)}$$

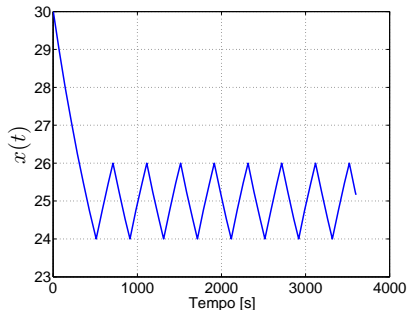
Fazendo  $x(\tau) = 24$ , calcula-se o instante  $t_3$  em que o erro  $e = 1$ :

$$t_3 = 999,2 - 1000 \log \frac{24 - 15}{11} = 1199,8 \text{ s}$$

Então, a amplitude é de  $2^\circ\text{C}$  de oscilação da temperatura e o período é  $T_{osc} = t_3 - t_1 = 1199,8 - 798,5 = 401,3 \text{ s}$ .



A amplitude e período de oscilação permanecem os mesmos partindo de outras temperaturas iniciais.



# Bifurcação

Características mudam conforme variação nos parâmetros. P. ex., número de pontos de equilíbrio. **Ex.:**

$$\ddot{x} - \alpha x + x^3 = 0$$

$$\alpha = 0 : \ddot{x} + x^3 = 0 \rightarrow x_{eq} = 0$$

$$\alpha > 0 : \underbrace{\ddot{x}}_{=0, \text{ equilíbrio}} - \alpha x + x^3 = 0$$

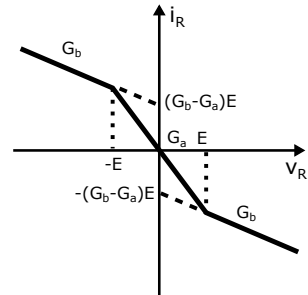
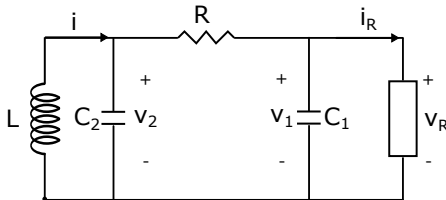
$$x_{eq}^3 - \alpha x_{eq} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{eq1} = 0 \\ x_{eq2} = \sqrt{\alpha} \\ x_{eq3} = -\sqrt{\alpha} \end{cases}$$



# Caos

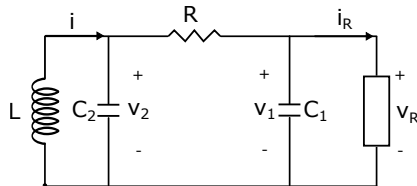
Comportamento muda consideravelmente com pequenas variações nas CIs. Dificulta a previsão do comportamento mesmo em sistemas determinísticos. **Ex.:** Previsão do tempo, circuito de Chua.

Circuito de Chua<sup>2</sup>



<sup>2</sup>M. P. Kennedy, Three Steps to Chaos - Part II: A Chua's Circuit Primer, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, v. 40, n. 10, pp. 657-674, 1993





$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L}x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2}x_1 - \frac{G}{C_2}(x_2 - x_3)$$

$$\dot{x}_3 = \begin{cases} \frac{G}{C_1}x_2 - \frac{G+G_b}{C_1}x_3 - \frac{G_b-G_a}{C_1}E & , x_3 < -E \\ \frac{G}{C_1}x_2 - \frac{G+G_a}{C_1}x_3 & , |x_3| < E \\ \frac{G}{C_1}x_2 - \frac{G+G_b}{C_1}x_3 + \frac{G_b-G_a}{C_1}E & , x_3 > E \end{cases}$$

$$x_1 = i, x_2 = v_2, x_3 = v_1$$



Assumindo valores:

- $G = 550 \mu S$ ;
- $G_a = -757,576 \mu S$ ;
- $G_b = -409,091 \mu S$ ;
- $L = 18 mH$ ;
- $C_1 = 10 nF$ ;
- $C_2 = 100 nF$ ;
- $E = 1 V$ ;

