Linearização Harmônica

TakashiYoneyama

2010

.

A resposta a uma excitação senoidal de um sistema não-linear, mesmo sem dinâmica, não é necessariamente do tipo senoidal. Entretanto, esta resposta pode ser descrita como uma soma de senoides através da série de Fourier. Caso esta resposta seja filtrada por um sistema linear conectado em cascata de modo que prevaleça apenas a primeira harmônica, ter-se-ia uma saída senoidal para uma entrada senoidal. Nestas condições o sistema não-linear em cascata com um filtro linear apresentaria um comportamento do tipo linear, onde a saída correspondente a uma entrada senoidal é novamente do tipo senoidal. Uma aproximação interessante é, portanto, assumir que entre o sistema não-linear e o filtro linear é relevante considerar apenas a primeira harmônica do sinal alí presente. A relação entre esta primeira harmônica e a excitação de entrada é denominada de ganho equivalente.

Exemplo 1 *Considere um relé ideal caracterizado por*

$$u(t) = M \; sign\,[e(t)]$$

No caso de uma excitação senoidal

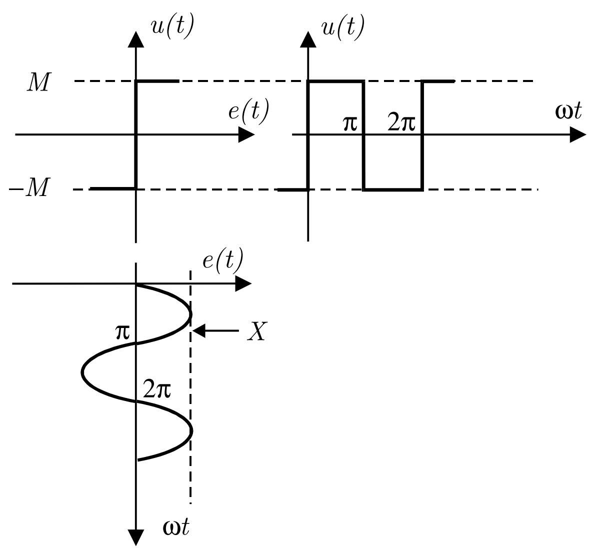

Figure 1: Característica de um relé ideal

$$e(t) = X \sin(\omega t)$$

a saída do relé é dada por

$$u(t) = \begin{cases} M & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}) \\ -M & t \in [\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}) \end{cases}$$

e pode ser representado pela expansão em série de Fourier

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

onde

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\cos(n\omega t)\, d(\omega t) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\sin(n\omega t)\, d(\omega t)
\end{aligned}
$$

Para o exemplo particular,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
b_1 &= \frac{4M}{\pi}
\end{aligned}
$$

de modos que a saída é, em termos da primeira harmônica,

$$
u(t) = \frac{4M}{\pi}\sin(\omega t) \tag{1}
$$

e o ganho equivalente é

$$
\begin{aligned}
N(X) &= \frac{U(s)}{E(s)} &(2) \\
&= \frac{4M}{\pi X} &(3)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 *Considere um relé com histerese caracterizado por*

$$
u(t) = \begin{cases} +M & e(t) > h \\ -M & e(t) < h \\ u(t^-) & -h \le e(t) \le +h \end{cases} \tag{4}
$$

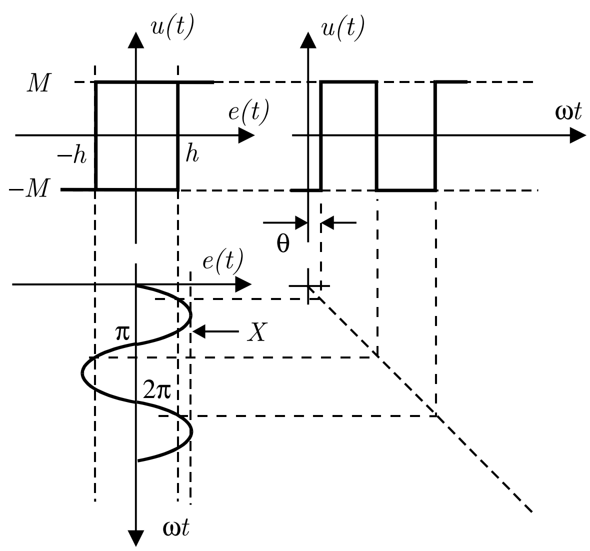

Figure 2: Característica de um relé com histerese

No caso de uma excitação senoidal

$$
e(t) = X\sin(\omega t)
$$

os coeficientes da primeira harmônica são

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\cos(\omega t)\,d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\theta}[-M]\cos(\omega t)\,d(\omega t) + \int_{\theta}^{\pi}[M]\cos(\omega t)\,d(\omega t)\right] \\ &= -\frac{4M}{\pi}\sin\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\sin(\omega t)\,d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\theta}[-M]\sin(\omega t)\,d(\omega t) + \int_{\theta}^{\pi}[M]\sin(\omega t)\,d(\omega t)\right] \\ &= \frac{4M}{\pi}\cos\theta \end{aligned}$$

onde $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{X}\right)$.

Logo, o sinal $u(t)$ *é aproximado por*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{4M}{\pi}\cos\theta\sin(\omega t) - \frac{4M}{\pi}\sin\theta\cos(\omega t) && (5) \\ &= \frac{4M}{\pi}\sin(\omega t - \theta) && (6) \end{aligned}$$

Uma vez que a resposta $u(t)$ *a uma excitação senoidal* $e(t)$ *de freqüência* ω *é um sinal senoidal de mesma freqüência, a função de transferência equivalente, ou seja, a função descritiva é*

$$\begin{aligned} N(X) &= \frac{U(s)}{E(s)} && (7) \\ &= \frac{4M}{\pi X}\exp\left(-\sin^{-1}\left(\frac{h}{X}\right)\right) && (8) \end{aligned}$$

Observação 3 *Um relé com histerese pode ser simulador através do circuito da figura 3*

Observação 4 *Caso a não-linearidade não seja uma função ímpar é necessário que se considere o termo*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\,d(\omega t) \tag{9}$$

Observação 5 *Considere uma não linearidade caracterizada pela função ímpar* $f(.)$

$$u(t) = f[e(t)] \tag{10}$$

e assuma que

$$e(t) = X\cos(\omega t) \tag{11}$$

Fazendo-se a mudança de variáveis

$$\omega t = \cos^{-1}\left(\frac{x}{X}\right) \tag{12}$$

a expressão para os coeficientes de Fourier a_n *é*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\cos(n\omega t)\,d(\omega t) && (13) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[X\cos(\omega t)]\cos(n\omega t)\,d(\omega t) && (14) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-X}^{+X} f\left[X\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{X}\right)\right)\right]\cos\left(n\cos^{-1}\left(\frac{x}{X}\right)\right)\frac{dx}{\sqrt{X^2-x^2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-X}^{+X} f(x)\,T_n\left(\frac{x}{X}\right)r(x)\,dx && (15) \end{aligned}$$

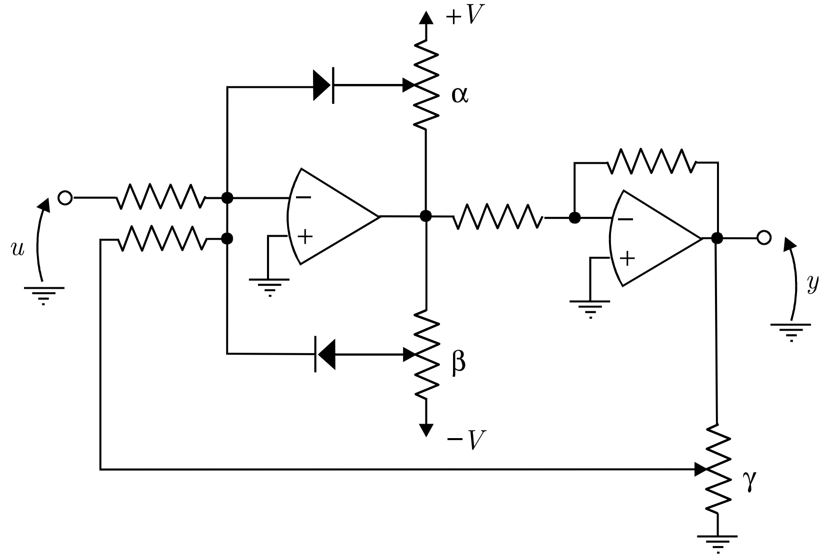

Figure 3: Circuito simulador de relé com histerese

onde

$$r\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{X^{2}-x^{2}}} \tag{16}$$

Para $n=1$ que é o termo de interêsse no método da primeira harmônica, tem-se

$$T_{1}\left(\frac{x}{X}\right)=\frac{x}{X} \tag{17}$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_{1} &= \frac{2}{\pi}\int_{-X}^{+X} f\left(x\right)T_{1}\left(\frac{x}{X}\right)r\left(x\right)dx & (18)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-X}^{+X} f\left(x\right)\frac{x}{X}\frac{1}{\sqrt{X^{2}-x^{2}}}dx & (19)\end{aligned}$$

que permite escrever, após mudança de variáveis, $x=X\ \xi$

$$a_{1}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\xi f\left(X\xi\right)}{\sqrt{1-\xi^{2}}}d\xi \tag{20}$$

A fórmula de Steklov fornece a aproximação

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\xi F\left(\xi\right)}{\sqrt{1-\xi^{2}}}d\xi\simeq\frac{\pi}{6}\left[F\left(1\right)-F\left(-1\right)+2F\left(\frac{1}{2}\right)-2F\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{21}$$

e, portanto, 20 permite obter uma aproximação da função descritiva de modo muito simples, substituindo $F\left(\xi\right)=f\left(X\xi\right)$

$$\begin{aligned} N\left(X\right) &= \frac{a_{1}}{X}\\ &= \frac{1}{X}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{6}\left[F\left(1\right)-F\left(-1\right)+2F\left(\frac{1}{2}\right)-2F\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{3X}\left[f\left(X\right)-f\left(-X\right)+2f\left(\frac{X}{2}\right)-2f\left(-\frac{X}{2}\right)\right]\\ &= \frac{2}{3X}\left[f\left(X\right)+2f\left(\frac{X}{2}\right)\right] & (22)\end{aligned}$$

Esta expressão é conhecida como a fórmula de Aizerman.

Exemplo 6 *Considere o problema de obter a função descritiva para*

$$f(e) = e^5 \tag{23}$$

Utilizando a fórmula de Aizerman 22,

$$\begin{aligned} N(X) &= \frac{2}{3X}\left[f(X) + 2f\left(\frac{X}{2}\right)\right] && (24) \\ &= \frac{2}{3X}\left[X^5 + 2\left(\frac{X}{2}\right)^5\right] && (25) \\ &= \frac{17}{24}X^4 && (26) \end{aligned}$$

que é um resultado bastante próximo da expressão exata

$$N(X) = \frac{5}{8}X^4 \tag{27}$$