

# Revisão da Teoria Clássica de Controle

A maior parte do material contido nesse texto pode ser encontrado em livros tais como [13], [4], [18], [5], [2], [12], [8] e [16], entre outros. O principal objeto de estudo considerado neste texto é o Problema de Controle e Automação de Sistemas Dinâmicos. Como ponto de partida, é conveniente que se apresente uma formulação geral deste problema. Para tal, são necessárias as definições de Sistema Físico e Especificações de Desempenho:

## Sistema Físico

Sistema Físico é a parte do Universo que foi delimitada para estudo.

A parte do Universo que não foi incluída no Sistema Físico é denominada de Meio Ambiente.

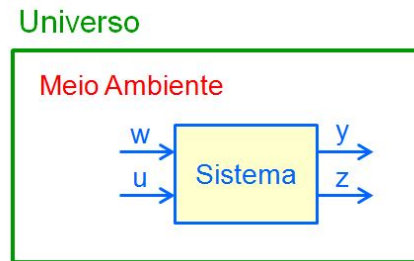


Figura 1: Representação de um sistema como parte do universo, interagindo com as demais partes deste através dos sinais  $w$ ,  $u$ ,  $y$  e  $z$ .

A figura 1 apresenta um sistema físico genérico que interage com o meio ambiente através de entradas  $w$  e  $u$  e saídas  $z$  e  $y$ . Exceto quando for necessário explicitar o efeito de ruído ou perturbações, será assumida a hipótese simplificadora de que  $w \equiv 0$  e  $y \equiv z$ , e, portanto, os sistemas serão blocos com entradas  $u$  e saídas por  $y$ . Ressalta-se que, na literatura especializada, a notação  $w$  tende a lembrar ruídos estocásticos e, no caso de distúrbios determinísticos, substitui-se  $w$  por  $d$ .

## Especificações de Desempenho

Especificações de Desempenho são descrições do comportamento ou das características a serem apresentadas pelo Sistema Físico após a incorporação do controlador.

Entre os comportamentos e características usualmente requeridas pelo usuário de um sistema de controle estão:

- velocidade de resposta

- segurança na operação
- conforto do operador
- precisão na execução da tarefa
- eficiência na operação
- custo de instalação
- custo de manutenção
- atendimento a normas técnicas
- restrições ambientais
- simplicidade
- expansibilidade

Para se realizar um projeto de controlador, os comportamentos desejados devem ser traduzidos na forma de especificações de desempenho quantitativas, tais como tempo de subida  $t_r$ , tempo de acomodação  $t_s$ , sobressinal  $M_P$ , margem de fase  $\gamma$ , eficiência  $\eta$ , valores máximos para o sinal de controle  $|u(t)| \leq U_{MAX}$ , limite na disponibilidade de energia  $\int_0^\infty u^2(\tau) d\tau < E_{MAX}$ , controle que leva ao menor custo possível  $J_{otimo} = \min_u \int_0^\infty f(y(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$ , excursão da saída contida em uma faixa  $Y_{min} \leq y(t) \leq Y_{max} \forall t$ , etc...

## Problema de Controle

Um Problema de Controle consiste em determinar uma forma atuar sobre um Sistema Físico de modo que o seu comportamento atenda às Especificações de Desempenho que haviam sido fornecidas *a priori*.

Controlador é a entidade que afeta o sistema físico através da variável manipulada  $u$ , de modo que sejam atendidas as especificações de desempenho. A seguir são apresentados alguns exemplos de problemas de controle:

- **Sala com Ar Condicionado**

Sistema Físico = Escritório

Especificação de Desempenho = Manutenção da Temperatura em uma faixa confortável para o ser humano.

Controlador = Sensores de Temperatura + Trocadores de Calor + Circuladores de Ar

- **Avião**

Sistema Físico = Avião de Passageiros

Especificação de Desempenho = Reduzida sensibilidade a turbulências atmosféricas.

Controlador = Acelerômetros + Computador com Interfaces + Superfícies de Comando (Leme, Profundor, Ailerons).

- **Pâncreas Artificial**

Sistema Físico = Paciente Diabético

Especificação de Desempenho = Manutenção da Glicemia dentro de uma faixa de variação adequada para o corpo humano.

Controlador = Sensor de Concentração de Glicose no Sangue + Bomba de Infusão de Insulina.

- **Robô para Solda**

Sistema Físico = Manipulador Mecânico com Efetor tipo Soldador

Especificação de Desempenho = Posicionamento Preciso do Efetor

Controlador = Encoders + Microprocessador + Cilindros Hidráulicos

## Automação

Controlador Automático é aquele que requer pouca interferência humana na sua operação. Típicamente, as interferências se restringem a tarefas de ajustes periódicos e de monitoração, não participando diretamente na geração das variáveis manipuladas  $u$ .

Em suma, a Formulação Básica de um Problema Controle Automático pode assim ser caracterizada:

- **Dados** um **Sistema Físico** e um conjunto de **Especificações de Desempenho**,
- **Obter** um dispositivo (Controlador) que **não requer interferência direta de operadores humanos** e que **atua** sobre o Sistema Físico, de modo que o seu comportamento atenda às Especificações de Desempenho.

## Modelamento Matemático

Um Modelo de um determinado Sistema Físico é a representação das suas características relevantes para o seu estudo. Segundo o princípio da *navalha de Occam*, ou o de *lex parsimoniae*, deve-se utilizar o modelo mais simples que seja suficiente para o estudo. Lembrar também a frase de George Box: "*Essentially, all models are wrong, but some are useful*".

O conceito de modelo pode ser apresentado mediante exemplos do cotidiano. Um mapa é um modelo para efeito de representação das características geográficas de uma região. Um maquete é um modelo para efeito de representação de características arquitetônicas de um prédio. Um rato é um modelo para efeito de estudo farmacológico de um novo medicamento para tratamento médico de humanos.

Como se pretende, nesse texto, adotar um enfoque quantitativo, é necessário que se disponha de modelos matemáticos que descrevem a evolução dinâmica do sistema físico em estudo. Ou seja, necessita-se dispor de Equações, Gráficos, Tabelas ou Diagramas, entre outras possibilidades.

Sistemas dinâmicos em que se pode assumir que os parâmetros do modelo são concentrados podem, em geral, serem descritos por equações diferenciais ordinárias ou EDOs. Um exemplo de tal sistema é um circuito resistor+capacitor+indutor, cujas dimensões são muito menores do que o comprimento de onda dos sinais envolvidos no circuito. Quando os parâmetros são distribuídos, é necessário, em geral, que se utilizem equações diferenciais parciais ou EDPs. É o

caso, por exemplo, de uma linha de transmissão longa, em que o comprimento de onda do sinal que suporta é menor que a distância entre os seus extremos.

Assumindo-se que um sistema dinâmico pode ser modelado empregando o conceito de parâmetros concentrados, a equação diferencial ordinária envolvida seria da forma

$$F\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u, t\right) = 0 \quad (1)$$

em que  $y$  é a saída,  $u$  é a entrada,  $t$  é o tempo e  $F$  alguma função que busca descrever o comportamento do sistema. No exemplo de EDO da expressão 2, os termos marcados  $NL$  são os que conferem o caráter não linear:

$$\underbrace{\frac{d^3 y}{dt^3}}_{NL} + \underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}_{NL} + \underbrace{\frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2}}_{NL} + \underbrace{\log\left(\frac{dy}{dt}\right)}_{NL} + \underbrace{\frac{1}{\sin(y)}}_{NL} + \underbrace{\exp(|u|)}_X = 0 \quad (2)$$

O termo indicado  $X$  na equação 2 pode ser pré-compensado pelo controlador que deve gerar a saída  $v$  ao invés de  $u$ , segundo a fórmula de conversão

$$v(t) = \exp(|u(t)|) \quad (3)$$

O sistema é dito ser linear se  $F$  assume a forma particular

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t) y = u(t) \quad (4)$$

Caso o sistema seja também invariante no tempo, os parâmetros  $a_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  não dependem explicitamente de  $t$ .

## Sistemas SISO - LTI

Nesse texto, os modelos estudados serão do tipo SISO - *Single-Input Single-Output* e LTI - *Linear Time-Invariant*, ou seja,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t) \quad (5)$$

em que  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são constantes reais.

Na área de Sistemas e Controle, é um costume comum simplificar a notação, adotando-se:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}; \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \dots; y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}; y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} \quad (6)$$

de modo que a expressão 5 pode ser reescrita mais compactamente

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (7)$$

Fornecidas as condições de contorno, usualmente condições iniciais, a equação diferencial ordinária 5 pode ser resolvida valendo-se de métodos bem conhecidos. Aqui, a equação diferencial

ordinária de  $n$ -ésima ordem 5 será inicialmente transformada em  $n$  equações de primeira ordem, fazendo-se

$$x_1 = y \quad (8)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad (10)$$

Nessas condições, tomando-se derivadas em  $t$  nas equações 8, obtém-se o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ \dot{x}_1 &= y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} \dot{y} - a_n y + u \end{aligned} \quad (13)$$

$$= -a_1 x_n - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + u \quad (14)$$

Definindo-se o vetor  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ , a ser chamado mais tarde de "estado", obtém-se de 11 que

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u \quad (15)$$

De 8, tem-se também que

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C x \quad (16)$$

## Respostas de sistemas LTI

### Solução no domínio do tempo

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias 15 pode ser obtida pelo método construtivo via iteração de Picard [1].

Aqui, será apenas verificado o fato de que a expressão

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (17)$$

é a solução de

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (18)$$

dada uma condição inicial  $x(0)$ .

De fato, notando que a variável de integração é  $\tau$  e não  $t$ , a equação 17 é reescrita como

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (19)$$

$$= e^{At} \left( x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right) \quad (20)$$

Diferenciando-se a expressão 19 em  $t$ , obtém-se

$$\dot{x} = Ae^{At} \underbrace{\left( x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right)}_x + e^{At} e^{-At} Bu \quad (21)$$

$$= Ax + Bu \quad (22)$$

## Exponencial de Matriz

A solução 17 envolve a expressão  $\exp(At)$  com  $A_{n \times n}$ . Por definição [3],

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots \quad (23)$$

mas utilizando-se o Teorema de Cayley-Hamilton,  $e^{At}$  pode ser obtido de

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (24)$$

em que os coeficientes  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  podem ser determinados resolvendo-se o sistema de  $n$  equações

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \\ &\dots \\ e^{\lambda_n t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2(t)\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} \end{aligned} \quad (25)$$

em que  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são os auto-valores de  $A_{n \times n}$ , caso sejam distintos, ou seja  $i \neq j \rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ .

Se houver auto-valores com multiplicidades maiores que 1, então, deve se utilizar as expressões derivadas. Por exemplo, se  $\lambda_i$  possui multiplicidade 3 ( $< n$ ), então deriva-se 2 vezes em  $\lambda_i$  a expressão  $e^{\lambda_i t}$  para se obter 3 equações.

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \alpha_2(t)\lambda_i^2 + \alpha_3(t)\lambda_i^3 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} \\ t e^{\lambda_i t} &= \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_i + 3\alpha_3(t)\lambda_i^2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-2} \\ t^2 e^{\lambda_i t} &= 2\alpha_2(t) + 6\alpha_3(t)\lambda_i + \dots + (n-2)(n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-3} \end{aligned} \quad (26)$$

## Solução no domínio do transformado

A Transformada de Laplace  $F(s) = \mathcal{L}[(f)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$ , pode ser utilizada para obter a solução de modelos tipo LTI.

Lembrando que

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (27)$$

pode-se escrever a partir de 18 que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\dot{x}\right] &= \mathcal{L}[Ax + Bu] \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned} \quad (28)$$

de modo que a versão transformada da saída  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$  é dada por

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \underbrace{C(sI - A)^{-1}BU(s)}_{G(s)} \quad (29)$$

A expressão  $G(s)$  é a Função de Transferência do sistema em questão.

No caso de  $x(0) = 0$ , a relação entrada-saída é um mero ganho

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (30)$$

e, portanto, no domínio transformado, podem-se empregar representações tipo grafos como o *fluxograma*.

### Relações entre as soluções nos domínios $t$ e $s$

Considere uma entrada  $u$  do tipo impulsivo, ou seja,  $u(t) = \delta(t)$ , delta de Dirac. Considerando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0) \quad (31)$$

obtém-se de 17 para o caso  $x(0) = 0$  que

$$y(t) = Cx(t) \quad (32)$$

$$= Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (33)$$

$$= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau \quad (34)$$

$$= Ce^{A(t-\tau)}B \Big|_{\tau=0} \quad (35)$$

$$= Ce^{At}B \quad (36)$$

A resposta a uma entrada impulso é denotada por

$$g(t) \triangleq y(t) \Big|_{u=\delta} = Ce^{At}B \quad (37)$$

supondo o sistema inicialmente em repouso. É importante ressaltar, porém, que o sistema foi admitido estar em repouso para  $t < 0$ . Logo, definindo-se o sinal degrau unitário

$$1(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad (38)$$

a resposta impulso é, de fato,

$$g(t) = Ce^{At}B \times 1(t) \quad (39)$$

Assumindo-se que  $u(t) = 0$ , pode-se notar que

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B u(\tau)d\tau \quad (40)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) u(\tau)d\tau \quad (41)$$

$$= [g * u](t) \quad (42)$$

ou seja,

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (43)$$

Portanto,  $G(s)$  é a Transformada de Laplace de  $g(t)$ , o que justifica a notação adotada.

É interessante lembrar, ainda, que o polinômio característico da matriz  $A_{n \times n}$  é o polinômio de grau  $n$  dado por

$$\Delta(s) = \det(sI - A) \quad (44)$$

e coincide com o denominador da função de transferência

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (45)$$

$$= C \left[ \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) \right] B \quad (46)$$

$$= \frac{1}{\Delta(s)} C \text{adj}(sI - A) B \quad (47)$$

Os polos de um sistema são números complexos que anulam o denominador de  $G(s)$  e coincides com os auto valores de  $A$ .

É possível verificar diretamente que  $y(t) = [g * u](t)$  é solução de  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ ,  $x(0) = 0$ .  
Necessita-se verificar que

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (48)$$

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu \quad (49)$$



ou seja,

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} [g * u](t) \quad (50)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (51)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [C e^{A(t-\tau)} B \times 1(t - \tau)] u(\tau) d\tau \quad (52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [C e^{A(t-\tau)} B \times 1(t - \tau)] u(\tau) d\tau \quad (53)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [C A e^{A t} B \times 1(t) + C e^{A(t-\tau)} B \delta(t - \tau)] u(\tau) d\tau \quad (54)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [C A e^{A(t-\tau)} B \times 1(t - \tau)] u(\tau) d\tau + C e^{A(t-\tau)} B \Big|_{t=\tau} u(t) \quad (55)$$

$$= C A \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} [e^{A(t-\tau)} B \times 1(t - \tau)] u(\tau) d\tau}_{Ax} + C B u \quad (56)$$

$$= C A x + C B u \quad (57)$$

## Métodos para Obtenção de Modelos

O primeiro passo para se projetar um controlador para um dado sistema físico é obter um modelo matemático que descreva adequadamente o seu comportamento. Estando de posse desse modelo, podem ser caracterizadas as especificações de desempenho também na forma quantitativa. Os principais enfoques para a obtenção de modelos são de caixa transparente e o de caixa opaca, também conhecidos como de caixa branca e de caixa preta, respectivamente. Na prática, são utilizadas técnicas híbridas ou translúcidas, também conhecidas como de caixa cinza.

### Enfoque Caixa "Transparente" ou "Branca"

Quando é possível conhecer o conteúdo no interior da caixa que representa o sistema, as relações constitutivas entre os elementos que o compõe podem, eventualmente, serem utilizadas para se obter o seu modelo matemático. Usualmente a descrição envolve variáveis internas além de  $u$  e  $y$ . Posteriormente será apresentado o conceito formal de estado que, a grosso modo, é um conjunto dessas variáveis internas dispostas na forma de vetor. Existem variadas ferramentas e técnicas para obtenção de modelos matemáticos, tais como a analogia elétrico-mecânica entre as leis físicas, grafos de ligação para disciplinar a conexão entre os diversos componentes, bem como o formalismo Lagrangeano [11], [9], [20].

## Modelamento usando leis físicas

De modo geral, a idéia é utilizar leis físicas derivadas de princípios físicos tais como os de conservação da massa, energia, momento e carga. Por exemplo, pode-se mencionar as leis de Kirchhoff para modelar circuitos elétricos e a leis de Newton para modelar sistemas mecânicos.

Como exemplo, considere o circuito apresentado na figura 2

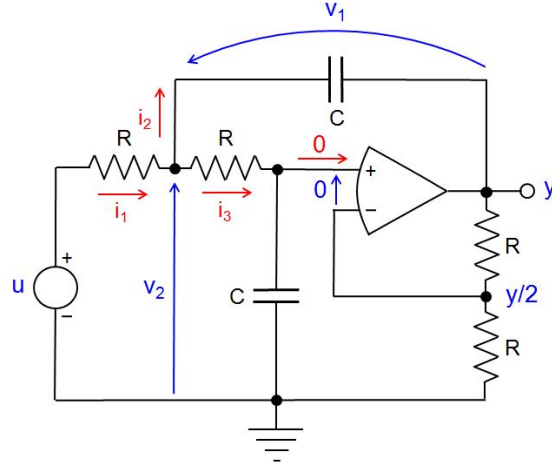


Figura 2: Um circuito de segunda ordem utilizando um amplificador operacional - OpAmp. A entrada de corrente em um OpAmp é quase zero, face à sua impedância elevada de entrada. A diferença de tensão entre os terminais + e - é quase zero, faze ao seu elevado ganho

Utilizando-se a Lei de Kirchhoff para correntes, tem-se que

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (58)$$

Pela Lei de Kirchhoff para tensões, tem-se que

$$-u + Ri_1 + Ri_3 + \frac{1}{2}y = 0 \quad (59)$$

$$-v_2 + v_1 + y = 0 \quad (60)$$

$$-v_2 + Ri_3 + \frac{1}{2}y = 0 \quad (61)$$

O comportamento dos elementos do circuito fornecem

$$i_2 = C\dot{v}_1 \quad (62)$$

$$i_3 = C\frac{\dot{y}}{2} \quad (63)$$

e, portanto, combinando as equações 59 e 58, obtém-se

$$Ri_1 + Ri_3 + \frac{1}{2}y = u \quad (64)$$

$$R(i_2 + i_3) + Ri_3 + \frac{1}{2}y = u \quad (65)$$

$$RC\dot{v}_1 + RC\dot{y} + \frac{1}{2}y = u \quad (66)$$

Por outro lado, das equações 60 e 61

$$-v_2 + v_1 + y = -v_2 + Ri_3 + \frac{1}{2}y \quad (67)$$

$$v_1 = Ri_3 - \frac{1}{2}y \quad (68)$$

e, portanto

$$C\dot{v}_1 = CRi_3 - \frac{C}{2}\dot{y} \quad (69)$$

Da expressão 63, tem-se ainda que

$$\dot{i}_3 = C\frac{\ddot{y}}{2} \quad (70)$$

e, portanto, a equação 69 é reescrita como

$$C\dot{v}_1 = CRC\frac{\ddot{y}}{2} - \frac{C}{2}\dot{y} \quad (71)$$

Substituindo-se  $C\dot{v}_1$  na expressão 66, tem-se

$$R(C\dot{v}_1) + RC\dot{y} + \frac{1}{2}y = u \quad (72)$$

$$R\left(CRC\frac{\ddot{y}}{2} - \frac{C}{2}\dot{y}\right) + RC\dot{y} + \frac{1}{2}y = u \quad (73)$$

$$R^2C^2\ddot{y} + RC\dot{y} + y = 2u \quad (74)$$

Eventualmente os modelos podem envolver heurísticas ou leis concebidas a partir de observações. Por exemplo, no modelo de Arrow e Nerlove que busca modelar o fenômeno de *marketing*, a reserva de *goodwill*  $G$  tende a aumentar com o investimento em propagandas  $u$  e, na ausência deste, diminuir com o tempo com a constante de decaimento  $\alpha$ .

$$\frac{dG}{dt} = -\alpha G + u \quad (75)$$

### Modelamento usando o conceito de Lagrangeano

Considere o sistema ilustrado na figura 3 (Máquina de Atwood). Utilizando-se conceitos básicos de física, pode-se escrever as expressões para as Energias Potencial  $U$  e a Cinética  $T$  :

$$U = m_1 g q + m_2 g (L - q) \quad (76)$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{q})^2 \quad (77)$$

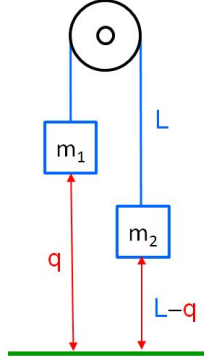


Figura 3: Máquina de Atwood. A corda que une as massas  $m_1$  e  $m_2$  possui comprimento  $L$ .

O Lagrangeano é, portanto, dado por

$$\mathcal{L} = T - U \quad (78)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{q})^2 - m_1 g q - m_2 g (L - q) \quad (79)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \dot{q} \quad (80)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -m_1 g + m_2 g \quad (81)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{q} \quad (82)$$

Utilizando-se a fórmula de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (83)$$

resulta que

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} + m_1 g - m_2 g = 0 \quad (84)$$

ou seja,

$$\ddot{q} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (85)$$

Considere agora um outro sistema ilustrado na figura 4 e que envolve grandezas eletromagnéticas e mecânicas. O Lagrangeano é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \overbrace{L(z) \dot{q}^2}^{\text{Elétrica}} + \overbrace{m \dot{z}^2 - k z^2}^{\text{Mecânica}} \right] \quad (86)$$

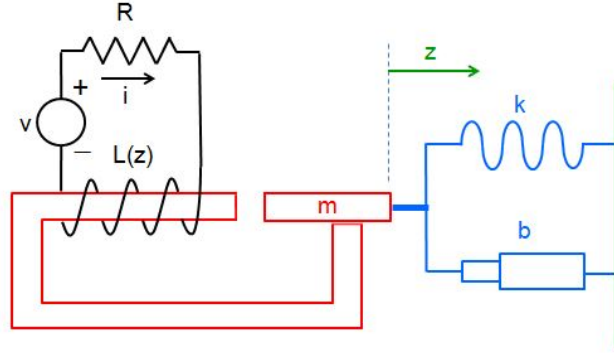


Figura 4: Um sistema eletro-mecânico acoplado, em que o movimento da massa  $m$  devido à atração magnética afeta o valor da indutância  $L(z)$ .

em que  $L(z)$  representa a indutância do eletroímã em função da posição  $z$  da parte móvel do material de massa  $m$  que participa do circuito magnético. Os elementos dissipadores de energia são o resistor e o amortecedor

$$D = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 + \frac{1}{2}b\dot{z}^2 \quad (87)$$

Pela fórmula de Lagrange, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = v \quad (88)$$

$$L(z)\ddot{q} + R\dot{q} = v \quad (89)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = 0 \quad (90)$$

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz - \frac{1}{2} \frac{dL}{dz} \dot{q}^2 = 0 \quad (91)$$

As equações 89 e 91 constituem o modelo matemático para o sistema eletromecânico da figura 4

$$L(z)\ddot{q} + R\dot{q} = v \quad (92)$$

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz - \frac{1}{2} \frac{dL}{dz} \dot{q}^2 = 0 \quad (93)$$

## Enfoque Caixa "Opaca" ou "Preta"

Trata-se do caso em que não se busca enxergar o que está no interior da caixa que representa o sistema. Nesse caso, os modelos podem ser obtidos, muitas vezes, através de experimentação. Excitando-se um sistema com um sinal de entrada  $u$  adequado e observando-se a resposta  $y$ , é possível estabelecer uma relação entrada-saída na forma de um modelo dito *externo*. Por exemplo, sabendo-se que um determinado sistema é LTI de segunda ordem, pode-se aplicar um

sinal de entrada do tipo degrau unitário e observar a sua saída que deverá ter a forma ilustrada na figura 5. Medindo-se o Tempo de Subida, o Sobressinal e o Erro em Regime Permanente, é possível determinar os valores numéricos dos parâmetros de um modelo para esse sistema.

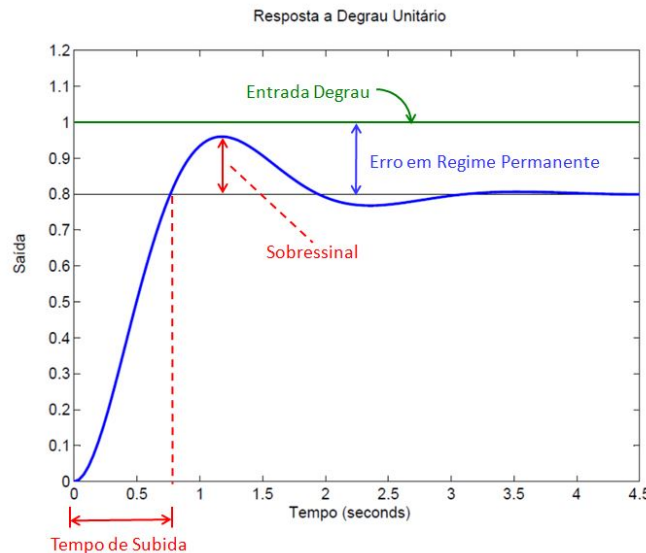


Figura 5: Resposta a uma excitação tipo degrau unitário, de um sistema de segunda ordem, exibindo as características notáveis que podem ser utilizadas para a identificação do modelo

## Inadequações de Modelos

As leis de controle determinadas com o uso de modelos inadequados podem apresentar desempenho comprometido quando utilizado com os processos reais. Entre os fatores que podem contribuir para a degradação do desempenho estão

- Sinais que se afastam muito do ponto de linearização. Por exemplo, uma mola obedece à lei de Hooke para pequenos tracionamentos ( $f = kx$ ) mas tende a ficar mais *duro* se for muito solicitado ( $f = kx^3$ ) e, eventualmente, pode se romper. Um outro exemplo é o fato de que intensidades muito grandes de campo magnético tendem a produzir saturação do núcleo de reatores, alterando a sua indutância.
- Ruídos desprezados. Por exemplo, vibrações da plataforma onde está instalado o equipamento, campo eletromagnético devido a centelhamento de máquina de solda a ponto, rajadas de vento, entre outros..
- Fenômenos não modelados. Por exemplo, folga de engrenagem, atrito seco, modos de flexão de vigas, anisotropia do meio, entre outros.
- Equipamentos e componentes não-ideais. Por exemplo, amplificadores operacionais, par termoeletrônico e cilindros hidráulicos, apresentando, respectivamente, faixa de passagem limitada, não-linearidades e vazamento de fluido.

- Variações lentas com o tempo. Por exemplo, envelhecimento de componentes, deslocamento do centro de massa devido ao consumo de combustível, oscilações climáticas, entre outras possibilidades.
- Atrasos de transporte. Por exemplo, devido a localização remota do sensor, utilização de rede internet para transmissão de dados, tempo de processamento para cálculo do sinal de controle, entre outras possibilidades.
- Má utilização. Por exemplo, veículos com excesso de passageiros, operação em ambientes hostis, manutenção de baixa qualidade, entre outras.

## Sistemas de Segunda Ordem

A função de transferência de um sistema SISO-LTI de segunda ordem genérico é da forma

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \quad (94)$$

Porém, reescrendo-se 94 na forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (95)$$

observa-se que os polos ficam descritos por expressões muito convenientes

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \implies s = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad (96)$$

Se  $0 < \xi < 1$ , os polos são complexos conjugados e dados por

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (97)$$

e denotados frequentemente na forma

$$s = -\sigma \pm j\omega_d \quad (98)$$

$$\sigma = \xi\omega_n \quad (99)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (100)$$

A obtenção de  $\xi$  e de  $\omega_n$ , a partir de  $\alpha$  e  $\beta$  em 94, é imediata notando que

$$b = \omega_n^2 \implies \omega_n = \sqrt{\beta b} \quad (101)$$

$$a = 2\xi\omega_n \implies \xi = \frac{a}{2\omega_n} = \frac{a}{2\sqrt{\beta b}} \quad (102)$$

## Resposta Degrau de um Sistema de Segunda Ordem

O caso mais interessante é aquele em que  $0 < \xi < 1$ , já que os polos constituem um par complexo conjugado. Como a resposta de um sistema LTI que possui um polo em  $p$  apresenta termos tipo

$e^{pt}$  na saída, então, quando se tem polos complexos, a saída apresenta termos  $e^{-\sigma t \pm j\omega_d t}$ , ou seja, um componente oscilatório  $\text{sen}(\omega_d t + \phi)$ .

Introduzindo a notação  $\beta = \cos^{-1}(\xi)$  tem-se que a resposta degrau apresenta como grandezas notáveis o tempo de subida

$$t_r = \frac{(\pi - \beta)}{\omega_d} \quad (103)$$

e o sobressinal (*overshoot*, sobressinal, sobrepasso)

$$M_p = \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\pi\right) \quad (104)$$

A razão para a utilização da notação  $\beta$  é clara quando se observa a figura 6.

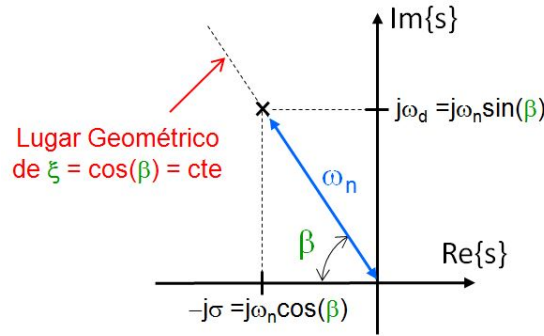


Figura 6: Relação entre a localização dos polos de um sistema de segunda ordem e os parâmetros  $\omega_n$  e  $\beta$ , bem como entre  $\xi$  e  $\beta$

## Polos Dominantes

Sistemas de segunda ordem podem ser facilmente especificados mediante duas de suas características: percentagem de sobressinal + tempo de subida, razão de decaimento + tempo de acomodação, margem de fase + faixa de passagem, entre outras combinações, uma vez que, assumindo que o tempo é contínuo, são necessários apenas dois parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$  para determinar a posição dos polos.

Um grande número de sistemas pode ser aproximado por modelos de segunda ordem, utilizando-se o conceito de polos dominantes.

Seja um sistema que possui polos  $p_1 = -\sigma + j\omega$ ,  $p_2 = -\sigma - j\omega$  ( $\sigma > 0, \omega \geq 0$ ) além de polos  $p_i$ ,  $i = 3, \dots, n$  de modo que  $\text{Re}\{p_i\} \ll -\sigma$ ,  $i = 3, \dots, n$ . Lembrando que  $e^{\text{Re}\{p_i\}t}$  decai muito mais rapidamente que  $e^{-\sigma t}$ , constata-se que após um breve transitório, os modos que predominam são  $e^{p_1 t}$  e  $e^{p_2 t}$ .

Como exemplo da utilização do conceito de polos dominantes, considere o problema de ajuste da posição de um "zero" de um processo, denotado  $a$ , cuja função de transferência em malha aberta



é

$$G(s) = \frac{1}{2} \frac{s+a}{s(s+1)(s+2)} \quad (105)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s+a}{s^3+3s^2+2s} \quad (106)$$

assumindo que a malha será fechada com ganho negativo unitário.

Adote-se como a especificação de desempenho que a resposta degrau apresente um sobressinal de 16.3%. Se a hipótese de polos dominantes for válida, o que deve ser verificado a posteriori, esse sobressinal corresponde a fazer  $\xi = 0.5$ .

A função de transferência de malha fechada é

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (107)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \frac{s+a}{s^3+3s^2+2s}}{1 + \frac{1}{2} \frac{s+a}{s^3+3s^2+2s}} \quad (108)$$

$$= \frac{s+a}{2s^3+6s^2+5s+a} \quad (109)$$

e a expressão 109 deve ter no denominador a forma 'polos dominantes + um polo afastado  $p$ ', ou seja

$$T_d(s) = \frac{s+a}{(s-p)(s^2+2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (110)$$

$$= \frac{s+a}{2(s-p)(s^2+2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (111)$$

$$= \frac{s+a}{2s^3 + (4\xi\omega - 2p)s^2 + (2\omega^2 - 4p\xi\omega)s - 2p\omega^2} \quad (112)$$

Igualando-se os denominadores de 109 e 112, tem-se que

$$2s^3 + 6s^2 + 5s + a = 2s^3 + (4\xi\omega - 2p)s^2 + (2\omega^2 - 4p\xi\omega)s - 2p\omega^2 \quad (113)$$

e, portanto, deve-se ter

$$6 = 4\xi\omega - 2p \quad (114)$$

$$5 = 2\omega^2 - 4p\xi\omega \quad (115)$$

$$a = -2p\omega^2 \quad (116)$$

Impondo a condição de projeto,  $\xi = 0.5$ , resulta um sistema de 3 equações a 3 incógnitas

$$3 = \omega - p \quad (117)$$

$$5 = 2\omega^2 - 2p\omega \quad (118)$$

$$a = -2p\omega^2 \quad (119)$$

que leva a  $\omega = 5/6$ ,  $p = -13/6$  e  $a \simeq 3$ . A parte real dos polos dominantes é dada por  $-\omega_n \cos(60^\circ) = -5/12 = -0.41667 \gg -13/6 = -2.1667$ , valendo a aproximação por polos dominantes.

## Realimentação

A realimentação (retroação, *feedback*) é utilizada para alterar a dinâmica de um sistema ou para combater incertezas. Usualmente a dinâmica é alterada para se melhorar as suas características de estabilidade. As incertezas comparecem, em geral, sob a forma de perturbações exógenas, como os casos de ruídos de medida e sinais de entrada não monitorados, ou de limitação na informação sobre o modelo, como os casos de erros de modelamento, falhas abruptas no sistema e variações lentas do sistema com o tempo.

### Robustez a incertezas no modelo

Um modelo sempre apresenta incertezas. Estas incertezas podem advir de uma série de fatores como desconhecimento de alguns fenômenos que afetam os processos, aproximações que foram feitas para simplificar o modelamento, variações no processo devido a alterações do ponto de operação ou envelhecimento de componentes e muitos outros. Considere um amplificador de

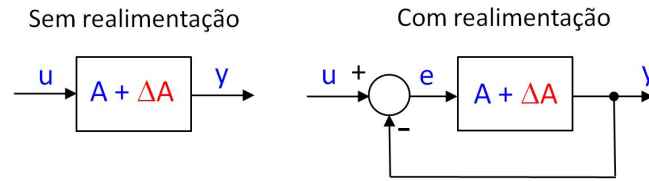


Figura 7: Amplificador com incerteza no ganho.

ganho  $A$  e incerteza  $\Delta A$ , conectado em malha aberta como no lado esquerdo da figura 7. A saída  $y$  é dada, em função da entrada  $u$ , pela equação

$$y = (A + \Delta A) u \quad (120)$$

$$= Au + \Delta Au \quad (121)$$

e quando não há incertezas, a saída é

$$y_{nom} \triangleq y|_{\Delta A=0} = Au \quad (122)$$

Supondo agora que a incerteza do modelo é de 10%,

$$\frac{\Delta A}{A} \times 100\% = 10\% \quad (123)$$

tem-se que a saída possui um erro percentual de

$$\frac{y - y_{nom}}{y_{nom}} \times 100\% = \frac{Au + \Delta Au - Au}{Au} \times 100\% \quad (124)$$

$$= \frac{\Delta A}{A} \times 100\% \quad (125)$$

$$= 10\% \quad (126)$$

Portanto, sem realimentação, a incerteza sobre o modelo é diretamente transferida para a saída.

Considere agora o mesmo amplificador de ganho  $A$  e incerteza  $\Delta A$ , conectado em malha fechada como no lado direito da figura 7.

Observando-se a figura 7, é imediato verificar que

$$e = u - y \quad (127)$$

$$y = (A + \Delta A) e \quad (128)$$

ou seja,

$$y = (A + \Delta A) (u - y) \quad (129)$$

$$y(1 + A + \Delta A) = (A + \Delta A) u \quad (130)$$

$$y = \frac{A + \Delta A}{1 + A + \Delta A} u \quad (131)$$

Quando não há incertezas, a saída é dada por

$$y_{nom} = \frac{A}{1 + A} u \quad (132)$$

e supondo novamente que a incerteza do modelo é de 10%,

$$\frac{\Delta A}{A} \times 100\% = 10\% \quad (133)$$

tem-se que a saída possui um erro percentual de

$$\frac{y - y_{nom}}{y_{nom}} \times 100\% = \frac{\frac{A + \Delta A}{1 + A + \Delta A} u - \frac{A}{1 + A} u}{\frac{A}{1 + A} u} \times 100\% \quad (134)$$

$$= \frac{1}{(1 + A + \Delta A)} \frac{\Delta A}{A} \times 100\% \quad (135)$$

$$= \frac{1}{1 + A + \Delta A} 10\% \quad (136)$$

Supondo que foi escolhido o valor  $A = 100$  a equação 136 permite escrever

$$\frac{y - y_{nom}}{y_{nom}} \times 100\% = \frac{1}{1 + 100 \pm 10} 10\% \quad (137)$$

de modo que o erro percentual da saída se situa na faixa

$$\frac{y - y_{nom}}{y_{nom}} \times 100\% \in [0.9, 1.1] \% \quad (138)$$

## Rejeição de distúrbios

Um sistema está sempre sujeito a ruídos que podem ser de diversas naturezas.

Considere a saída de um amplificador de ganho  $A$ , sujeito a um ruído aditivo  $n$  (lembrando *noise*) e conectado em malha aberta, como ilustrado no lado esquerdo da figura 8. Diretamente

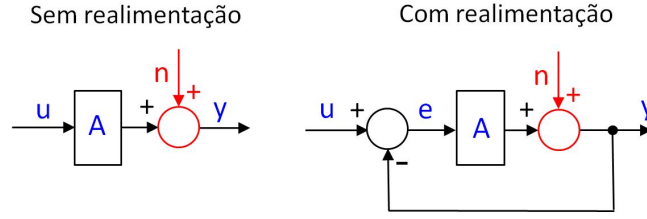


Figura 8: Efeito do ruído de saída  $n$  em um sistema de malha aberta (à esquerda) e em um sistema de malha fechada (à direita).

da figura 8, tem-se que

$$y = Au + n \quad (139)$$

ou seja, se  $y_{nom}$  é a saída quando não há ruído,

$$y_{nom} = Au \quad (140)$$

observa-se que, em vista da equação 139 e da figura 8 que

$$y = y_{nom} + n \quad (141)$$

Logo, o ruído está se superpondo diretamente ao sinal de saída.

Considere, agora, o caso realimentado, ilustrado na parte direita da figura 8. Novamente, por inspeção,

$$e = u - y \quad (142)$$

$$y = n + Ae \quad (143)$$

que, rearranjando, fornece

$$y = n + A(u - y) \quad (144)$$

$$= n + Au + Ay \quad (145)$$

Explicitando-se  $y$  a partir da equação 145, tem-se

$$y = \frac{A}{1+A}u + \frac{1}{1+A}n \quad (146)$$

e chamando de  $y_{nom}$  o caso sem ruído,

$$y_{nom} = \frac{A}{1+A}u \quad (147)$$

resulta que

$$y = y_{nom} + \frac{1}{1+A}n \quad (148)$$

Fazendo-se  $A = 100$  na expressão 148, verifica-se que o ruído é atenuado em aproximadamente 100 vezes,

$$y = y_{nom} + 0.01n \quad (149)$$

## Estabilidade

Considere um integrador puro operando em malha aberta, como ilustrado no lado esquerdo da figura 9. Se o sinal de entrada  $u$  é do tipo degrau unitário,

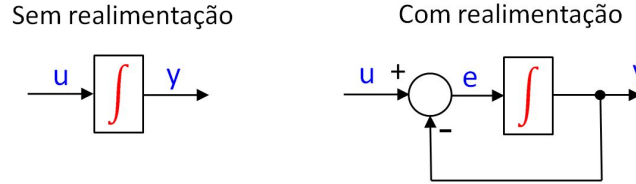


Figura 9: Um sistema para ilustrar o efeito da realimentação sobre a estabilidade

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (150)$$

a saída correspondente, a partir de  $y(0) = 0$  é

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (151)$$

$$= \int_0^t 1 d\tau \quad (152)$$

$$= t \quad (153)$$

que é um sinal que cresce indefinidamente (até violar as condições para a validade do modelo utilizado). Em outras palavras, trata-se de um sistema instável no sentido BIBO (*bounded input - bounded output*).

Fazendo-se uma realimentação como ilustrado na parte direita da figura 9 e admitindo que  $y(0) = 0$ , tem-se que

$$y(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (154)$$

$$e(t) = u(t) - y(t) \quad (155)$$

Diferenciando-se ambos os lados da equação 154 em relação a  $t$ , obtém-se que

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t) \quad (156)$$

onde, substituindo-se a expressão do erro 154, resulta

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t) - y(t) \quad (157)$$

onde, como antes,  $u(t) = 1$  para  $t \geq 0$ , caso a entrada seja do tipo degrau unitário.

É fácil verificar que a função

$$y(t) = 1 - e^{-t} \quad (158)$$

satisfaz a equação 157. De fato, substituindo-se a expressão 158 em 157,

$$\frac{d \overbrace{(1 - e^{-t})}^{y(t)}}{dt} = \overbrace{u(t)}^1 - \overbrace{(1 - e^{-t})}^{y(t)} \quad (159)$$

$$-\frac{de^{-t}}{dt} = 1 - 1 + e^{-t} \quad (160)$$

$$e^{-t} = e^{-t} \quad (161)$$

## Critérios para análise da estabilidade

Nessa revisão está-se tratando apenas de sistemas lineares invariantes no tempo. Assim, o critério de estabilidade consiste em verificar se a parte real dos e-valores de A ou os polos do sistema estão localizados no interior do semi-plano esquerdo do plano complexo.

### Definição Formal de Estabilidade

Um estado  $x_e$  é dito ser ponto de equilíbrio de

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), t) \quad (162)$$

se  $x(t_0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e, \forall t \geq t_0$ , ou seja,  $f(x_e, t) = 0, \forall t \geq t_0$ .

Sistemas lineares invariantes no tempo

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) \quad (163)$$

possuem um único ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  se  $A$  é não singular, mas infinitos pontos  $\{x_e \in Ker(A)\}$  se  $\det(A) = 0$  e constituem um subespaço do espaço de estados.

Sistemas não-lineares podem ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados [19], [17], [14] e [7]. Para efeito de análise local de um dado ponto de equilíbrio  $x_e$  de

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), t) \quad (164)$$

pode-se fazer a translação  $\check{x}(t) = x(t) - x_e$ , de modo que

$$\frac{d\check{x}}{dt}(t) = f(\check{x}(t) - x_e, t) = \check{f}(\check{x}(t), t) \quad (165)$$

e, portanto, não há perda de generalidade quando se refere apenas a pontos de equilíbrio 0.

Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito ser estável se dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (166)$$

Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito ser assintoticamente estável se é estável e  $\exists \delta > 0$  tal que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \downarrow 0 \text{ para } t \uparrow \infty \quad (167)$$

Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito ser exponencialmente estável se  $\exists \alpha, \delta, \lambda > 0$  tal que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(t_0) - x_e\| e^{-\lambda t} \quad (168)$$

Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito ser globalmente assintoticamente estável se  $\forall x(t_0)$

$$\|x(t) - x_e\| \downarrow 0 \text{ para } t \uparrow \infty \quad (169)$$

Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito ser globalmente exponencialmente estável se  $\exists \alpha, \lambda > 0$  tal que para  $\forall x(t_0)$

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(t_0) - x_e\| e^{-\lambda t} \quad (170)$$

Os sistemas com entradas forçantes, ou seja,

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (171)$$

com  $u(t) \neq 0$  e  $y(t) = h(x, u, t)$ , são usualmente estudados com relação a estabilidade entrada-saída (ou estabilidade externa).

## Estabilidade de Sistemas LTI

Sistemas de tempo contínuo, lineares e invariantes no tempo são estáveis se todos os auto-valores da matriz de sistemas  $A_{n \times n}$  (ou equivalentemente, todas as raízes do polinômio característico  $\Delta(s)$ ) possuem parte real negativa pois

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{r_i t} \quad (172)$$

se  $u(t) \equiv 0$ .

No domínio transformado, tal fato se traduz na condição que todos os polos da função de transferência estão localizados no semi-plano esquerdo.

## Crítério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Um polinômio com coeficientes reais  $\Delta(s)$  é dito ser de Hurwitz se todas as raízes de

$$\Delta(s) = 0 \quad (173)$$

possuem parte real negativa (ou, equivalentemente, todas as raízes pertencem ao semi-plano esquerdo).

Por simplicidade, será assumido que  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , visto que se algum coeficiente  $a_i$  for negativo, sabe-se que o polinômio não é de Hurwitz.

Um polinômio de grau  $n$  com coeficientes reais  $\Delta(s)$  é Hurwitz se e somente se o ângulo de fase de  $\Delta(j\omega)$  varia de  $n\frac{\pi}{2}$  quando  $\omega$  varia de  $0 \uparrow \infty$ .

A prova consiste em notar que uma raiz com parte real negativa contribui com uma variação no ângulo de fase de  $\frac{\pi}{2}$ .

**Critério de Leonhard-Mikhailov** A curva  $\Delta(j\omega)$  para  $\omega \in (0, \infty)$ , traçada no plano complexo, deve passar por exatamente  $n$  quadrantes.

**Critério de Hermite-Bieler** Sejam  $E(\cdot)$  e  $O(\cdot)$  polinômios tais que representam as partes par e ímpar de  $\Delta(s)$ , respectivamente, ou seja,

$$\Delta(s) = E(s^2) + sO(s^2) \quad (174)$$

O polinômio com coeficientes reais  $\Delta(s)$  é Hurwitz se e somente se  $E(r)$  e  $O(r)$  possuem raízes reais negativas simples intercaladas,  $\frac{a_0}{a_1} > 0$  e a primeira raiz mais próxima de 0 é de  $E(r)$ .

Decorre diretamente do Critério de Leonhard-Mikhailov, notando que  $E(-\omega^2)$  é a parte real de  $\Delta(j\omega)$  e  $\omega O(-\omega^2)$  é a parte imaginária. Para  $\omega \downarrow 0$  a fase de  $\Delta(j\omega)$  é 0, e a curva  $\Delta(j\omega)$  deve passar por  $n$  quadrantes.

Portanto, o primeiro eixo a ser cruzado é o imaginário ( $Re\{\Delta(j\omega_0)\} = E(-\omega_0^2) = 0$  para algum  $\omega_0$ ) e à medida que  $\omega \uparrow \infty$ , cruza sucessivamente o eixo real e o imaginário, até passar por  $n$  quadrantes.

Polinômios  $E(r)$  e  $O(r)$  que satisfazem as condições do Critério de Hermite-Bieler são chamados de pares positivos.

Na busca de um método sistemático para verificar se os polinômios  $E(r)$  e  $O(r)$  são pares positivos, a idéia é construir um arranjo do tipo recursivo.

Seja  $n$  par, uma vez que para  $n$  ímpar o resultado é análogo.

Dados os coeficientes de  $E(r)$  e  $O(r)$  seja  $P(r)$  um polinômio cujos coeficientes são obtidos da tabela

$$\begin{array}{rcll} E & : & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & a_n \\ O & : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ P & : & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{\frac{n}{2}} & \end{array} \quad (175)$$

em que

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \dots \quad (176)$$

Nestas condições,  $E(r)$  e  $O(r)$  formam um par positivo se e somente se  $O(r)$  e  $P(r)$  formarem um par positivo.

Por construção

$$P(r) = E(r) - \frac{a_0}{a_1} r O(r) \quad (177)$$

ou

$$E(r) = P(r) + \frac{a_0}{a_1} r O(r) \quad (178)$$



Para verificar a suficiência, assumamos que  $O(r)$  e  $P(r)$  formam um par positivo. Então as suas raízes são reais simples intercaladas e  $\frac{a_1}{b_1} > 0$ . Definindo-se o polinômio auxiliar

$$A(r) = P(r) - \lambda r O(r); \lambda \in \left(0, \frac{a_0}{a_1}\right] \quad (179)$$

verifica-se que as raízes de  $A(r)$  não podem coincidir com as de  $O(r)$ , já que quando  $O(r) = 0 \Rightarrow P(r) \neq 0$  e em particular, para  $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$ . Por outro lado, para  $\lambda \downarrow 0$  as raízes de  $P(r)$  são próximas às de  $A(r)$  e portanto, intercaladas com as raízes de  $O(r)$ . À medida que  $\lambda \uparrow \frac{a_0}{a_1}$  as raízes de  $A(r)$  não colidem com as de  $O(r)$  (pois as raízes de  $O(r)$  e  $A(r)$  não coincidem) e, pela continuidade, as raízes de  $O(r)$  e  $A(r)$  são intercaladas.

A necessidade é verificada com argumento análogo.

**CrITÉRIO de Routh-Hurwitz:** Um polinômio de grau  $n$  com coeficientes reais  $\Delta(s)$  é Hurwitz se não há troca de sinais na primeira coluna da tabela

$$\begin{array}{rcll} s^n & : & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \\ s^{n-1} & : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ s^{n-2} & : & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{\frac{n}{2}-1} & b_{\frac{n}{2}} & \\ s^{n-3} & : & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{\frac{n}{2}-1} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ s^3 & : & p_1 & p_2 & p_3 & & & & \\ s^2 & : & q_1 & q_2 & & & & & \\ s^1 & : & r_1 & & & & & & \\ s^0 & : & s_1 & & & & & & \end{array} \quad (180)$$

em que

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \dots \quad (181)$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad \dots \quad (182)$$

$$\text{e assim por diante.} \quad (183)$$

O critério consiste, portanto, na aplicação direta do mecanismo descrito pela tabulação 175 usando as expressões 176, recursivamente, a partir da última linha. Demonstrações rigorosas do Critério de Routh-Hurwitz podem ser encontradas em [10], [15] [6]

## CrITÉRIO de Nyquist

O critério de Nyquist é muito utilizado por permitir interpretação gráfica direta, por levar a definições importantes como a margem de fase e margem de ganho, bem como pela possibilidade de extensão ao caso multivariável.

Os resultados fundamentais para a demonstração do critério de Nyquist são o Teorema do Resíduo e a Fórmula de Lucas.

**Teorema!do Resíduo:** Se  $f : C \rightarrow C$  é analítica em uma região simplesmente conexa  $\Omega$  de  $C$  delimitada pela curva fechada  $\Gamma$ , exceto por singularidades  $r_1, \dots, r_q \in \overset{\circ}{\Omega}$ , então

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j \left[ \text{res}(f, r_1) + \dots + \text{res}(f, r_q) \right] \quad (184)$$

onde  $\overset{\circ}{\Omega}$  denota o interior de  $\Omega$ ,  $\Gamma$  é percorrida no sentido anti-horário e  $\text{res}(f, r_i)$  denota o resíduo de  $f$  em  $r_i$ .

O Teorema do Resíduo é um resultado fundamental em Cálculo com Variáveis Complexas e a sua demonstração pode ser encontrada em diversos livros texto.

**Teorema de Cauchy:** Se  $f : C \rightarrow C$  é analítica em uma região  $\Omega$  delimitada pela curva fechada  $\Gamma$ , então

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 0 \quad (185)$$

**Fórmula de Lucas:** Se  $p(s) = a_q(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_q)$  e  $p'(s)$  é a sua derivada, então

$$\frac{p'(s)}{p(s)} = \frac{1}{s - z_1} + \frac{1}{s - z_2} + \dots + \frac{1}{s - z_q} \quad (186)$$

$$= \sum_{i=1}^q \frac{1}{s - z_i} \quad (187)$$

Seja  $s = z_i$  uma raiz de  $p(s)$  de multiplicidade  $\ell \geq 1$  de  $p(s)$ , ou seja

$$p(s) = (s - z_i)^\ell q(s) \quad (188)$$

para algum  $q(s)$ . Derivando-se a expressão 188, obtém-se

$$p'(s) = \ell(s - z_i)^{\ell-1} q(s) + (s - z_i)^\ell q'(s) \quad (189)$$

e, portanto,

$$\frac{p'(s)}{p(s)} = \frac{\ell}{s - z_i} + \frac{q'(s)}{q(s)} \quad (190)$$

Procedendo-se análogamente com o polinômio  $q(s)$  e assim sucessivamente até a última raiz, obtém-se o resultado desejado.

A Fórmula de Lucas pode ser estendida para o caso em que  $p(s)$  é uma razão de polinômios. Considere, inicialmente, um polo  $s = r_i$  de multiplicidade  $\ell \geq 1$  de  $p(s)$ , ou seja

$$p(s) = (s - r_i)^{-\ell} q(s) \quad (191)$$

para algum  $q(s)$ . Derivando-se a expressão 188, obtém-se

$$p'(s) = -\ell(s - r_i)^{-\ell-1} q(s) + (s - r_i)^{-\ell} q'(s) \quad (192)$$

e, portanto,

$$\frac{p'(s)}{p(s)} = -\frac{\ell}{s - r_i} + \frac{q'(s)}{q(s)} \quad (193)$$

Combinando-se os resultados para os zeros e para os polos, tem-se para uma função  $f(s)$  descrita como razão de polinômios, com  $Z$  zeros e  $P$  polos em uma região  $\Omega$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{i=1}^Z \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^P \frac{1}{s - r_i} + \frac{g'(s)}{g(s)} \quad (194)$$

onde  $g(s)$  é analítica em  $\overset{\circ}{\Omega}$ .

**Princípio do Argumento:** Seja  $f : C \rightarrow C$  uma razão de polinômios, com  $z_i, i = 1, \dots, Z$  zeros e  $r_k, k = 1, \dots, P$  polos em uma região  $\Omega$  delimitada pela curva fechada  $\Gamma$ . Em vista da versão estendida da fórmula de Lucas 194,

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{i=1}^Z \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^P \frac{1}{s - r_i} + \frac{g'(s)}{g(s)} \quad (195)$$

obtém-se integrando ambos os lados

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \oint_{\Gamma} \left( \sum_{i=1}^Z \frac{1}{s - z_i} \right) ds - \oint_{\Gamma} \left( \sum_{i=1}^P \frac{1}{s - r_i} \right) ds + \overbrace{\oint_{\Gamma} \frac{g'(s)}{g(s)} ds}^0 \quad (196)$$

em que o último termo é nulo em vista do Teorema de Cauchy. Pelo Teorema do Resíduo,

$$\oint_{\Gamma} \left( \sum_{i=1}^Z \frac{1}{s - z_i} \right) ds = \sum_{i=1}^Z \left( \oint_{\Gamma} \frac{1}{s - z_i} \right) ds \quad (197)$$

$$= 2\pi j \sum_{i=1}^Z \left[ \overbrace{\text{res}(f, z_1)}^1 + \dots + \overbrace{\text{res}(f, z_q)}^1 \right] \quad (198)$$

$$= 2\pi j Z \quad (199)$$

e, analogamente,

$$\oint_{\Gamma} \left( \sum_{i=1}^P \frac{1}{s - r_i} \right) ds = 2\pi j P \quad (200)$$

de modo que

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = 2\pi j [Z - P] \quad (201)$$

A função  $w = f(s)$  mapeia uma curva  $\Gamma$  em uma outra curva  $\Lambda = f(\Gamma)$  e, por mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds &= \oint_{\Gamma} \frac{1}{f(s)} \overbrace{f'(s) ds}^{dw} \\ &= \oint_{\Lambda} \frac{1}{w} dw \\ &= \ln w|_{\Lambda} \\ &= \ln |w| e^{j\angle w} \Big|_{\Lambda} \\ &\quad \text{0 pois } \Lambda \text{ fechado} \\ &= \overbrace{\ln |w|}_{\Lambda} + \ln e^{j\angle w} \Big|_{w \odot \Lambda} \\ &= j\angle w|_{w \odot \Lambda} \\ &= 2\pi j N [0, + \infty] \end{aligned} \quad (202)$$

onde  $N[0, +\infty]$  é o número de voltas de  $\Lambda$ , em torno do 0, no sentido anti-horário. Combinando-se 201 e 202,

$$N[0, +\infty] = Z - P \quad (203)$$

A fórmula 203 permite contar a diferença entre o número de polos e zeros de uma função  $f(s)$  circundados por uma curva fechada  $\Gamma$ . A idéia do critério de Nyquist é utilizar este fato para verificar se existem polos de malha fechada no semi-plano direito, caso em que o sistema não seria estável.

**Critério de Nyquist:** Seja  $G_a(s)$  uma função de transferência em malha aberta com  $P$  polos no semi-plano direito e  $\Gamma$  o Contorno de Nyquist, a ser percorrido no sentido anti-horário. O número de polos da função de transferência de malha fechada  $G_f(s)$  obtida com realimentação unitária de  $G_a(s)$  é  $Z$ , dado por

$$Z = N[-1, +\infty] + P \quad (204)$$

em que  $N[-1, +\infty]$  é o número de enlaçamentos do ponto  $-1$  pela curva  $\Lambda = G_a(\Gamma)$ .

A razão de se ter substituído  $N[0, +\infty]$  por  $N[-1, +\infty]$  é porque quando se realimenta unitariamente a função de transferência de malha aberta para se obter a função de transferência de malha fechada

$$G_f(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} \quad (205)$$

os polos de  $G_f(s)$  são as raízes de  $1 + G_a(s) = 0$ .

Se o Contorno de Nyquist  $\Gamma$  é percorrido no sentido horário, ou seja de  $\omega = 0$  a  $\omega = \infty$ , o que corresponde, por exemplo, a usar o auxílio das curvas de Bode, os enlaçamentos de  $-1$  devem ser considerados positivos no sentido horário  $N[0, +\infty]$ .

Caso a função de transferência de malha aberta possua polos imaginários puros ou polo na origem, o contorno deve ser acrescido de desvios infinitesimais, pois o contorno  $\Gamma$  não deve passar por singularidades.

Como exemplo, considere a função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + s^2 + s^1} \quad (206)$$

Constat-se pela figura 10 que o sistema é estável para ganhos  $K$  pequenos, mas instável para  $K$  grandes.

## Tipos de Sistemas

Um sistema é dito ser de tipo  $q$  se a sua função de transferência de malha aberta for da forma

$$G(s) = \frac{K(s - z_1) \dots (s - z_m)}{s^q (s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (207)$$

Na prática, os tipos mais comumente encontrados são o 0 e o 1.

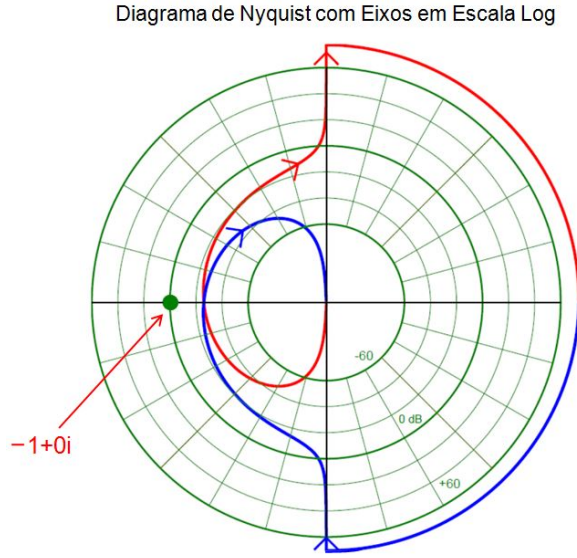


Figura 10: Exemplo de curva de Nyquist para estudo de estabilidade.

Para um dado sinal de entrada de referência  $R(s)$ , o sinal de erro, em malha fechada com realimentação unitária negativa é dado por

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad (208)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{K(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^q(s-p_1)\dots(s-p_n)}} R(s) \quad (209)$$

Para uma entrada degrau, ou seja  $R(s) = 1/s$ , o erro em regime permanente pode ser obtido pela aplicação do Teorema do Valor Final

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (210)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^q(s-p_1)\dots(s-p_n)}} \frac{1}{s} \quad (211)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^q(s-p_1)\dots(s-p_n)}} \quad (212)$$

e se o sistema for do tipo 0, a equação indica que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^0(s-p_1)\dots(s-p_n)}} \quad (213)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{K(-z_1)\dots(-z_m)}{(-p_1)\dots(-p_n)}} \neq 0 \quad (214)$$

Por outro lado, se o sistema for do tipo 1, a equação 212 indica que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^1(s-p_1)\dots(s-p_n)}} \quad (215)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K(-z_1)\dots(-z_m)}{s(-p_1)\dots(-p_n)}} = 0 \quad (216)$$

Em vista dos resultados 214 e 216, constata-se que para diminuir o erro de regime permanente no caso de sistemas do tipo 0 o valor do ganho  $K$  deve ser elevado e que no caso de sistemas do tipo 1 não se observa erro de regime permanente.

## Lugar Geométrico das Raízes

O método do Lugar Geométrico das Raízes permite obter graficamente as possíveis localizações dos polos de malha fechada, a partir dos polos e zeros de malha aberta, quando algum parâmetro, usualmente o ganho, varia em uma faixa pré-especificada. Ou seja, a idéia é obter valores de  $s$  que satisfazem (logo, raízes da equação)

$$1 + G_C(s) G_P(s) = 0 \quad (217)$$

pois, a função de transferência de malha fechada do sistema representado na figura

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_C(s) G_P(s)}{1 + G_C(s) G_P(s)} \quad (218)$$

## Construção do Lugar Geométrico das Raízes

Se o controlador consiste apenas de um ganho

$$G_C(s) = K \quad (219)$$

a ser variada na faixa  $(0, \infty)$  a expressão 217 se reduz a

$$1 + K G_P(s) = 0 \quad (220)$$

Neste caso, assumindo que  $G_P(s)$  possui  $m$  zeros e  $n$  polos

$$G_P(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (221)$$

$$= \frac{b_0 (s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (222)$$

as regras que permitem a construção gráfica do lugar geométrico das raízes (LGR), para o caso  $K > 0$ , são:

1. Segmentos do eixo real com número ímpar de polos+zeros de malha aberta  $G_P(s)$  pertencem ao LGR

2. Quando  $K \rightarrow \infty$ , as raízes de 220 tendem a se aproximar de  $n - m$  assíntotas que passam pelo ponto

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{\ell=1}^m z_\ell}{n - m} \quad (223)$$

3. Quando  $K \rightarrow \infty$ , as raízes de 220 tendem a se aproximar de  $n - m$  assíntotas que possuem inclinações

$$\phi_i = \frac{180^0 + \ell 360^0}{n - m} ; \ell = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1 \quad (224)$$

4. Os ângulos de partida dos polos ou chegada a zeros dos ramos são dados por

$$\theta_k = \text{mod}_{360^0} \left[ \sum_{i=1, i \neq k}^m \angle(z_k - z_i) - \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^n \angle(p_k - p_\ell) \right] - 180^0 \quad (225)$$

5. Os pontos de quebra (BP) podem ser encontrados resolvendo

$$\text{num}(s) \frac{d}{ds} [\text{den}(s)] - \text{den}(s) \frac{d}{ds} [\text{num}(s)] = 0 \quad (226)$$

6. Os pontos de cruzamento dos ramos do LGR com o eixo imaginário podem ser calculados utilizando o critério de Routh-Hurwitz
7. Os ramos nascem nos polos e se aproximam dos zeros, à medida que  $K$  varia de 0 a  $\infty$
8. Os zeros *atraem* os ramos enquanto os polos *repelem* os ramos
9. O LGR é simétrico em relação ao eixo das abcissas.

## Aplicações do LGR

### Ajuste de ganho

No exemplo apresentado aqui, permite-se que o tempo de subida ou o percentual de sobressinal sejam ajustados, mas não ambos simultaneamente, pois a variação do ganho  $K$  representa apenas 1 grau de liberdade. No gráfico à esquerda da figura 11,  $K$  é variado até que os polos de malha fechada estejam sobre o círculo que representa o lugar geométrico de  $\omega_n$  constante que resulta no tempo de subida requerido  $t_f$ . No gráfico à direita da figura 11,  $K$  é variado até que os polos de malha fechada estejam sobre o lugar geométrico de  $\xi$  constante.

### Realimentação tacométrica

Tacômetros são dispositivos utilizados para medir a velocidade angular do eixo de máquinas rotativas. A utilização da informação da velocidade de rotação permite, em aplicações como o de controle de servomecanismos, obter uma flexibilidade adicional em relação à utilização apenas da informação da posição angular (provida por potenciômetros ou *encoders*, por exemplo).

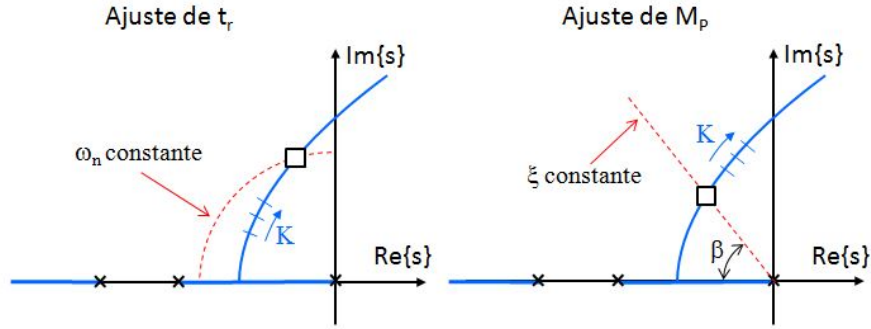


Figura 11: Ajuste do ganho  $K$  para obtenção de  $\omega_n$  e  $\xi$  desejados. Nota que se faz uso do conceito de polos dominantes.

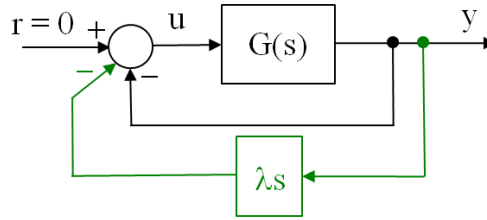


Figura 12: Sistema com realimentação tacométrica

Considere um sistema de controle com um diagrama em blocos como o ilustrado na figura 12, em que a malha de realimentação inclui o termo  $\lambda s$  em que  $\lambda$  é uma constante.

Assumindo que  $G(s)$  é da forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (227)$$

e que os polos desejados de malha fechada já foram determinados a partir as especificações de desempenho, pode-se ajustar o valor de  $\lambda$ . Nota-se que o zero devido à realimentação tacométrica atrai o ramo do LGR. Assim, ajusta-se o valor de  $\lambda$  de modo que o ramo do LGR passe por esses polos desejados e, posteriormente, ajusta-se o ganho. O gráfico à esquerda da figura 13 apresenta o LGR do sistema sem a realimentação tacométrica. O gráfico à direita apresenta o LGR com a realimentação tacométrica. A posição do zero pode ser facilmente ajustada fazendo-se  $\varphi - \psi_2 - \psi_1 = -180^\circ$ .

### Sintonização de Controladores PID

O controlador PID - Proporcional Integral e Derivativo é descrito por

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de}{dt}(t)$$

em que  $K_P, K_D$  e  $K_I$  são constantes.



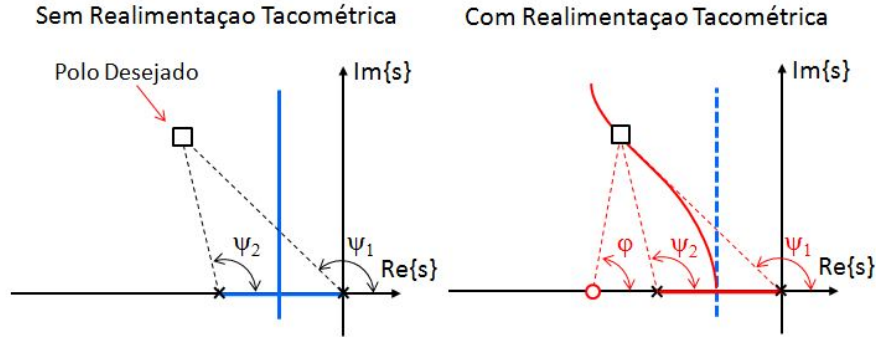


Figura 13: Ajuste do ganho direto  $K$  e do ganho da realimentação tacométrica para alocação dos polos em posições desejadas

Aplicando-se a Transformada de Laplace, obtém-se que

$$\begin{aligned}
 U(s) &= K_P E(s) + K_I \frac{E(s)}{s} + K_D s E(s) \\
 &= \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s) \\
 &= \left( \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} \right) E(s)
 \end{aligned}$$

e, portanto, o controlador PID introduz 1 polo na origem e 2 zeros na posição caracterizada por

$$K_D s^2 + K_P s + K_I = 0 \quad (228)$$

Escolhendo-se adequadamente os ganhos  $K_P, K_D$  e  $K_I$  pode-se, por exemplo, introduzir 2 zeros reais ou 1 par de zeros complexos conjugados, além do polo na origem. A figura 14 ilustra a utilização de controlador PID na configuração 1 par de zeros complexos conjugados e um polo na origem.

O controlador PID pode, por vezes, ajudar a estabilizar um sistema que, em malha aberta, apresenta polos no semi-plano direito. Considere, por exemplo, o sistema

$$G_P(s) = K \frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)} \quad (229)$$

e tome-se o controlador PID

$$G_C(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s} \quad (230)$$

Nessas condições, a função de transferência de malha aberta do controlador em cascata com o processo controlado se torna

$$G = K \frac{(s+1)(s^2+2s+5)}{s(s-1)(s^2+1)} \quad (231)$$

que é estável para  $K > 3.43$ , conforme pode ser verificado no LGR da figura 15.

É interessante notar que, nesse exemplo, o sistema é estável apenas para ganhos suficientemente elevados. Ressalta-se, também, que o processo controlado é instável em malha aberta, de modo

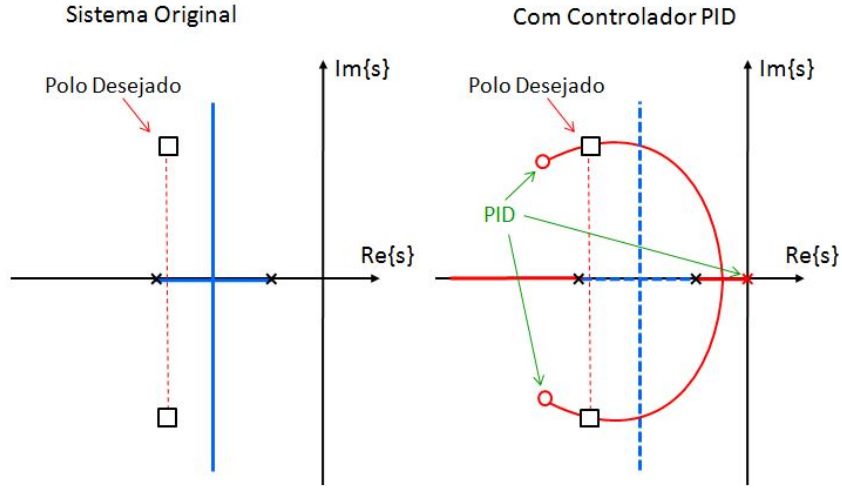


Figura 14: Exemplo de ajuste de controlador PID em que se aloca 2 zeros e um polo na origem

que na eventualidade de falha do controlador, sensor ou atuador, o sistema pode se tornar instável.

### Projeto de Compensadores Avançadoras de Fase usando LGR

Compensadores avançadores de fase, usualmente conhecido por compensador *lead* são, em geral, utilizados para melhorar o comportamento transitório de sistemas em malha fechada. Transitórios são associados a frequências mais elevadas, de modo que o compensador *lead* é um filtro passa altas

$$G_c(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1} \quad (232)$$

$$= \frac{a_1}{b_1} \frac{s + \frac{a_0}{a_1}}{s + \frac{1}{b_1}} \quad (233)$$

em que

$$\frac{a_0}{a_1} < \frac{1}{b_1} \quad (234)$$

Pode-se colocar 232 em uma forma mais elegante, fazendo-se

$$K = \frac{a_1}{b_1}; T = \frac{a_1}{a_0}; \alpha = \frac{a_0 b_1}{a_1} \quad (235)$$

que leva a

$$G_c(s) = K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (236)$$

com  $0 < \alpha < 1$ . A figura 16 apresenta a forma de se projetar um compensador avançador de fase. Tendo-se determinado os polos desejados de malha fechada, basta ajustar a condição de ângulo, no caso,  $\varphi - \psi_3 - \psi_2 - \psi_1 = -180^\circ$ . Existem variadas regras para se posicionar o zero do compensador avançador de fase.

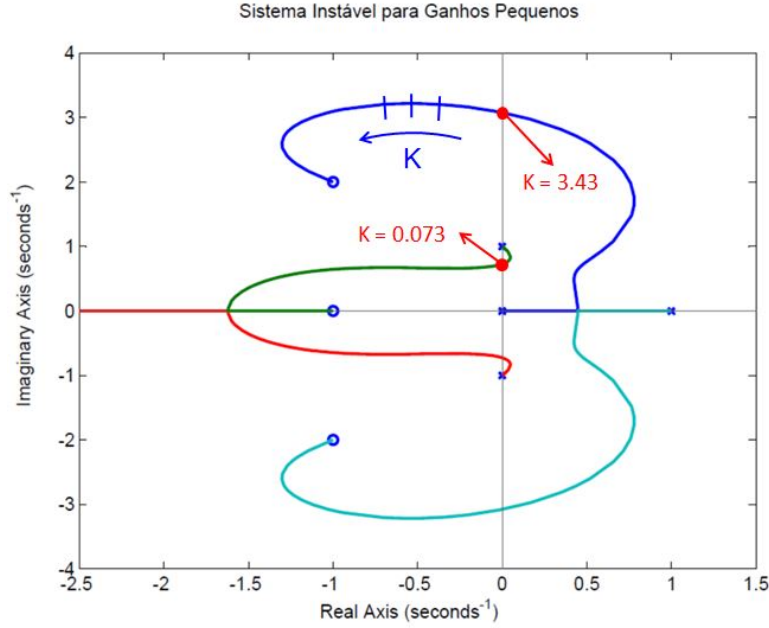


Figura 15: O controlador PID foi ajustado de forma a atrair os ramos do LGR para o semi-plano esquerdo.

### Visualização da estabilidade condicional

Alguns sistemas dinâmicos de controle são tais que, quando um parâmetro varia monotonicamente (por exemplo, o ganho em malha aberta crescendo de 0 a  $\infty$ ), apresenta tanto regiões de comportamento estável quanto instável, intercalados.

O sistema cuja malha aberta é da forma

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 5)}{s^5 + 11s^4 + 39s^3 + 49s^2 + 20s} \quad (237)$$

que possui zeros  $\{-1+2i, -1-2i\}$  e polos  $\{0, -1 \text{ (multiplicidade 2)}, -4, -5\}$ . O lugar geométrico deste sistema encontra-se traçado na figura 17. Utilizando-se o critério de Routh-Hurwitz, obteve-se que esse sistema é estável em malha fechada para  $0 < K < 0.99$  e  $97.33 < K < 166.68$ .

## Resposta em Frequência

Um sinal  $u(t)$  periódico pode ser representado como uma combinação de senos e cossenos, através da Série de Fourier (Transformada de Fourier, caso  $u(t)$  não seja periódico)

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \quad (238)$$

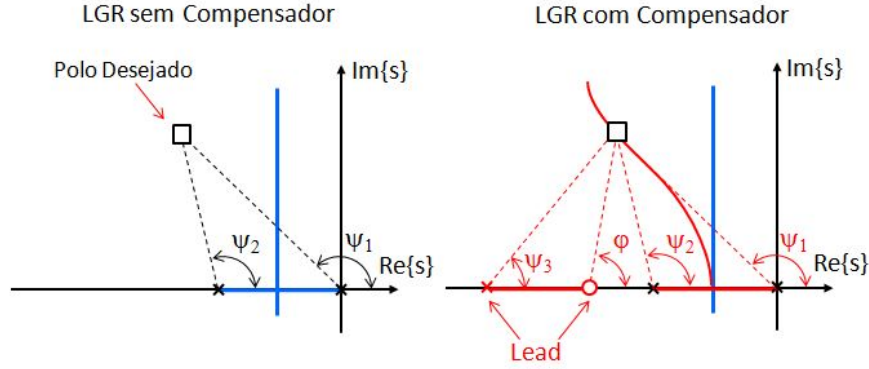


Figura 16: O compensador *lead* atrai os ramos do LGR de modo que este passe pela posição do polo de malha fechada desejada.

Pela propriedade de superposição dos sistemas lineares, se  $y_0(t)$  é a saída correspondente à entrada constante  $a_0$  e  $y_k(t)$  é a saída correspondente à entrada  $A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$ , a saída correspondente a 238 é

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \quad (239)$$

Logo, a saída  $y(t)$  em 239 fica caracterizada se cada componente  $y_k(t)$  for explicitada em termos da entrada  $A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$ , ou seja, se forem conhecidas as saídas correspondentes a entradas senoidais.

Neste contexto, seja uma excitação senoidal de amplitude  $A$  e frequência (angular,  $[rd/s]$ )  $\omega$

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (240)$$

cuja Transformada de Laplace é

$$U(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (241)$$

Em vista da definição de função de transferência 30 e a versão transformada da entrada 241, a saída  $y(t)$  de um sistema linear invariante no tempo com função de transferência  $G(s)$ , correspondente a esta excitação, é dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \quad (242)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \quad (243)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}\right] \quad (244)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{num(s)}{(s-p_1) \cdots (s-p_n)} \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)}\right] \quad (245)$$

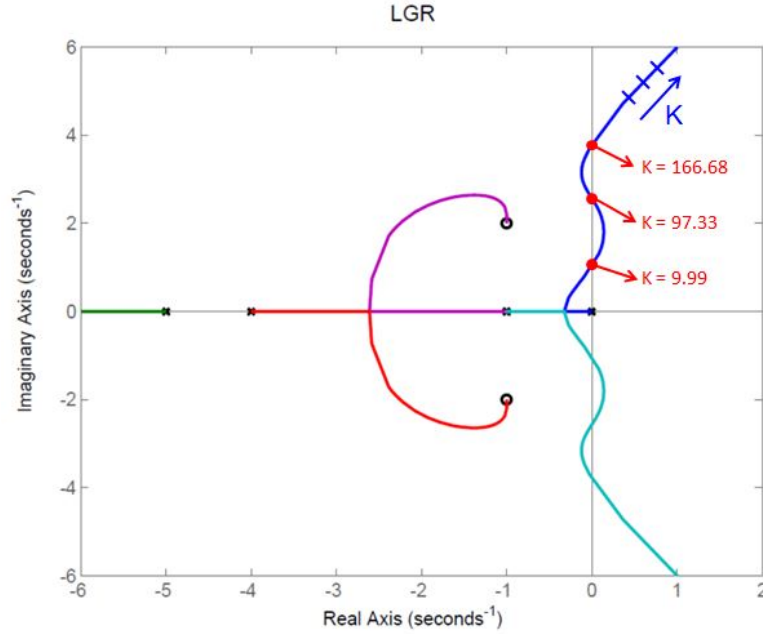


Figura 17: Um sistema que apresenta estabilidade condicional

onde  $p_i$  são os polos de  $G(s)$ . Utilizando-se o método da expansão em frações parciais,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\text{num}(s)}{(s-p_1) \cdots (s-p_n)} \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)} \right] \quad (246)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\text{num}(s)}{(s-p_1) \cdots (s-p_n)} \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \right] \quad (247)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \overbrace{\frac{k_1}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{k_n}{(s-p_n)}}^* + \frac{K_1}{(s+j\omega)} + \frac{K_2}{(s-j\omega)} \right] \quad (248)$$

Cada termo marcado com \* corresponde a componente do tipo  $e^{pt} \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$  se o sistema for estável ( $G(s)$  com todos os polos no semi-plano esquerdo). Portanto, se  $G(s)$  é estável, e para  $t$  suficientemente grande (ou seja, o sistema em regime permanente),

$$\begin{aligned} y(t)|_{t \gg 0} &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_1}{(s+j\omega)} + \frac{K_2}{(s-j\omega)} \right] \\ &= K_1 e^{-j\omega t} + K_2 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (249)$$

Os resíduos  $K_1$  e  $K_2$  são dados por

$$K_1 = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} \quad (250)$$

$$= \frac{AG(-j\omega)}{-2j} \quad (251)$$

e

$$K_2 = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} \quad (252)$$

$$= \frac{AG(j\omega)}{2j} \quad (253)$$

Como  $G(s)$  é uma razão de polinômios, verifica-se que

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)} \quad (254)$$

ou seja,

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \implies G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)} \quad (255)$$

e retornando à equação 249,

$$y(t) = K_1 e^{-j\omega t} + K_2 e^{j\omega t} \quad (256)$$

$$= \frac{AG(-j\omega)}{-2j} e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} \quad (257)$$

$$= A \left[ \frac{|G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}}{-2j} e^{-j\omega t} + \frac{|G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}}{2j} e^{j\omega t} \right] \quad (258)$$

$$= A |G(j\omega)| \left[ \frac{e^{j[\omega t + \angle G(j\omega)]} - e^{-j[\omega t + \angle G(j\omega)]}}{2j} \right] \quad (259)$$

$$= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (260)$$

A saída de um sistema linear invariante no tempo  $G(s)$  com todos os polos no semi-plano esquerdo e em regime permanente, para uma entrada senoidal

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (261)$$

é dada por

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (262)$$

Conclui-se, portanto, que a saída de um sistema linear invariante no tempo e estável, recebendo uma excitação do tipo senoidal de uma determinada frequência é também senoidal com a mesma frequência, mas com amplitude  $A |G(j\omega)|$  e defasado de  $\angle G(j\omega)$ .

Os gráficos de  $|G(j\omega)| \times \omega$  e  $\angle G(j\omega) \times \omega$  com o eixo das abscissas ( $\omega$ ) em escala logarítmica e  $|G(j\omega)|$  expresso em dB são conhecidos como curvas de Bode.

A grandeza  $|G(j\omega)|$  é um ganho pois relaciona as amplitudes da saída e da entrada

$$|G(j\omega)| = \frac{\text{Amplitude}[y(t)]}{\text{Amplitude}[u(t)]} \quad (263)$$

e o seu valor numérico em dB é dado por

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)| \quad (264)$$

É conveniente lembrar que dB é uma relação de potências

$$dB = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad (265)$$

e que, em geral,

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \quad (266)$$

de modo que

$$dB = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad (267)$$

$$= 10 \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \quad (268)$$

$$= 20 \log M \quad (269)$$

As curvas de Bode podem ser obtidas experimentalmente com relativa facilidade. Uma montagem simples para o traçado de curvas de Bode requer apenas um gerador de sinais e um osciloscópio. Equipamentos mais sofisticados como analisador de redes podem possuir esta função já incorporada. Caso se disponha de um micro-computador com interfaces análogo-digital e digital-análogo, o traçado das curvas de Bode pode ser automatizada através de um programa que produz varredura de frequência. É possível, também, esboçar as curvas de Bode a partir de  $G(s)$ , através de algumas regras simples.

Reforçando o que foi mencionado anteriormente, é possível, muitas vezes, realizar projeto de controladores sem a necessidade de obter formas fechadas para a equação de estados. Em particular, curvas de Bode são extremamente atraentes do ponto de vista de interpretação intuitiva, pois expressam a resposta em frequência de um sistema. Um exemplo muito comum encontrado no dia a dia é o da resposta em frequência de caixas acústicas, microfones e amplificadores de som.

## Visualização Simultânea das Malhas Aberta e Fechada

Quando a função de transferência em malha aberta  $G_{MA}(s) = G_C(s) G_P(s)$  (vide figura é conhecida para cada valor de  $s = j\omega$ ,  $\omega \in R^+$ , a resposta em frequência do sistema sob realimentação negativa unitária pode ser facilmente obtida utilizando

$$G_{MF}(j\omega) = \frac{G_C(j\omega) G_P(j\omega)}{1 + G_C(j\omega) G_P(j\omega)} \quad (270)$$

Em projetos de controlador, deseja-se escolher  $G_C(\cdot)$  de modo que  $G_{MF}(\cdot)$  atenda as especificações de desempenho. Assim, métodos que permitem a visualização da resposta em frequência em malha fechada são de grande valia em controle de sistemas dinâmicos.

### Carta de M e N Constantes

A carta de Nichols-Black é um ábaco que permite visualizar as respostas em frequência em malha aberta e fechada de modo simultâneo. Como a resposta em frequência também caracteriza

completamente o sistema, pode-se ajustar as características da malha fechada, atuando sobre a malha aberta, via ajuste do controlador.

A uma excitação senoidal de frequência  $\omega$ , o ganho e o atraso em fase de malha aberta são fornecidas pelo número complexo de módulo  $|G_{MA}(j\omega)|$  e fase  $\angle G_{MA}(j\omega)$ , o ganho e a fase da malha fechada é fornecida pelo número complexo de módulo  $|G_{MF}(j\omega)|$  e a fase  $\angle G_{MF}(j\omega)$ .

O que se requer do ábaco é, enfim, a obtenção do número complexo  $G_{MF}(j\omega)$  a partir de um outro número complexo  $G(j\omega)$  relacionados por

$$G_{MF}(j\omega) = \frac{G_{MA}(j\omega)}{1 + G_{MA}(j\omega)} \quad (271)$$

Considere  $G_{MA}(j\omega)$  com parte real  $X$  e parte imaginária  $Y$

$$G_{MA}(j\omega) = X + jY \quad (272)$$

A idéia é obter pontos no plano  $(X, Y)$  tais que

$$M = \left| \frac{G_{MA}(j\omega)}{1 + G_{MA}(j\omega)} \right| \quad (273)$$

$$N = \tan \angle \left( \frac{G_{MA}(j\omega)}{1 + G_{MA}(j\omega)} \right) \quad (274)$$

onde  $M$  e  $N$  são constantes, ou seja, serão as novas coordenadas onde serão lidos os valores de  $|G_{MF}(j\omega)|$  e  $\angle G_{MF}(j\omega)$  que correspondem à malha fechada.

A partir de 273,

$$M^2 = \left| \frac{G_{MA}(j\omega)}{1 + G_{MA}(j\omega)} \right|^2 \quad (275)$$

$$= \left| \frac{X + jY}{1 + X + jY} \right|^2 \quad (276)$$

$$= \frac{X^2 + Y^2}{1 + 2X + X^2 + Y^2} \quad (277)$$

e, portanto,

$$M^2 + 2XM^2 + M^2X^2 + MY^2 - X^2 - Y^2 = 0 \quad (278)$$

$$X^2(M^2 - 1) + 2XM^2 + M^2 + (M^2 - 1)Y^2 = 0 \quad (279)$$

Se  $M = 1$ , então 279 se reduz a

$$2X = 1 \quad (280)$$

$$X = \frac{1}{2} \quad (281)$$

que corresponde à uma reta passando por  $X = \frac{1}{2}$ .



Se  $M \neq 1$ , então 279 permite escrever

$$X^2 + 2X \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0 \quad (282)$$

$$\left( X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (283)$$

que corresponde, para cada  $M$ , a círculo de centro  $\left( -\frac{M^2}{M^2 - 1}, 0 \right)$  e raio  $\frac{M}{(M^2 - 1)}$ .

A expressão 274 pode ser simplificada notando que

$$\angle \left( \frac{G_{MA}(j\omega)}{1 + G_{MA}(j\omega)} \right) = \angle(G_{MA}(j\omega)) - \angle(1 + G_{MA}(j\omega)) \quad (284)$$

$$= \tan^{-1} \frac{Y}{X} - \tan^{-1} \frac{Y}{1 + X} \quad (285)$$

ou seja

$$N = \tan \angle \left( \frac{G_{MA}(j\omega)}{1 + G_{MA}(j\omega)} \right) \quad (286)$$

$$= \tan \left( \tan^{-1} \frac{Y}{X} - \tan^{-1} \frac{Y}{1 + X} \right) \quad (287)$$

$$= \frac{\tan \left( \tan^{-1} \frac{Y}{X} \right) - \tan \left( \tan^{-1} \frac{Y}{1 + X} \right)}{1 + \tan \left( \tan^{-1} \frac{Y}{X} \right) \times \tan \left( \tan^{-1} \frac{Y}{1 + X} \right)} \quad (288)$$

$$= \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1 + X}}{1 + \frac{Y}{X} \times \frac{Y}{1 + X}} \quad (289)$$

A equação 289 permite escrever

$$NX + NX^2 + NY^2 = Y \quad (290)$$

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N}Y = 0 \quad (291)$$

$$\left( X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( Y - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{2N} \right)^2 \quad (292)$$

que, novamente, são círculos de centro  $\left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2N} \right)$ .

### Carta de Nichols-Black

Ao invés de utilizar as coordenadas  $X$  e  $Y$  que correspondem às partes real e imaginário de  $G_{MA}(j\omega) = X + jY$  para traçar os lugares geométricos de  $M = |G_{MF}(j\omega)|$  e  $N = \tan \angle G_{MF}(j\omega)$  constantes, uma alternativa é utilizar  $|G_{MA}(j\omega)|$  e  $\angle G_{MA}(j\omega)$ . A Carta de Nichols é simplesmente um ábaco que, a partir de valores numéricos de  $|G_{MA}(j\omega)|$  e  $\angle G_{MA}(j\omega)$ , correspondente a um dado  $\omega$ , permite que  $|G_{MF}(j\omega)|$  e  $\angle G_{MF}(j\omega)$  seja calculada por inspeção. Usualmente  $|G_{MA}(j\omega)|$  e  $|G_{MF}(j\omega)|$  são expressos em  $dB$ .

Considere a função de transferência de malha aberta omitindo o subscrito "MA"

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (293)$$

Para cada valor de  $\omega$  tem-se um par  $(|G(j\omega)|, \angle G(j\omega))$  de malha aberta e os valores de  $|G(j\omega) / (1 + G(j\omega))|$  e  $\angle (G(j\omega) / (1 + G(j\omega)))$  de malha fechada podem ser lidos diretamente da carta de Nichols, figura 18.

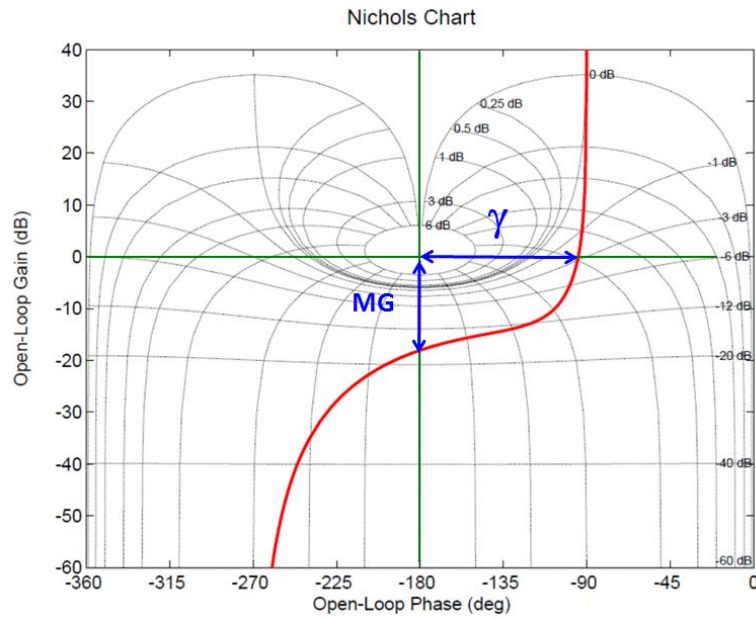


Figura 18: Carta de Nichols com indicação das margens de ganho ( $MG$ ) e de fase ( $\gamma$ )

## Especificações no Domínio da Frequência

Especificações quantitativas de desempenho podem ser fornecidas tanto no domínio do tempo  $t$ , quanto no domínio da frequência  $\omega$ . É interessante lembrar que a resposta em frequência pode, muitas vezes, ser obtida de modo simples e direto no laboratório. Os modelos no domínio do tempo também podem ser obtidos com base em experimentos, mas mediante o emprego de métodos de identificação.

## Resposta em Frequência de um Sistema de Segunda Ordem

Os pontos notáveis nas curvas de Bode de sistemas de segunda ordem são a frequência de ressonância

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (294)$$

e o pico na resposta em frequência

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (295)$$

Se o sobressinal desejado é  $M_p$ , tem-se a partir da equação 104 que o coeficiente de amortecimento requerido é

$$\xi = -\frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M_p}} \quad (296)$$

que corresponde ao pico na resposta em frequência  $M_r$  fornecido pela expressão 295. Estando de posse do valor de  $\xi$  e uma outra especificação, como o do tempo de subida, pode-se determinar  $\omega_n$  e, portanto,  $\omega_r$ .

## Margens de fase e de ganho

Considerando-se a conveniência de trabalhar com curvas de Bode de malha aberta, já que a função de transferência do processo foi fornecida e a do controlador é justamente o objetivo do projeto, pode-se invocar o critério de Nyquist para incorporar o conceito de grau estabilidade, expresso por dois indicadores: Margem de Fase e Margem de Ganho.

Margem de Ganho: é o inverso da magnitude do número complexo  $G_{MA}(j\omega_0)$  quando  $\omega_0$  é tal que  $\angle G(j\omega_0) = -180^\circ$ . Representa o ganho adicional que ainda mantém o sistema estável, quando a malha for fechada com realimentação unitária.

Margem de Fase: é a quantidade de atraso de fase que pode ser introduzido na situação  $|G_{MA}(j\omega_0)| = 1$ , de modo que o sistema continua estável, quando a malha for fechada com realimentação unitária.

As Margens de Ganho e de Fase podem ser representadas graficamente como visto na figura xxxxxxxx.

As margens de ganho e de fase podem ser visualizadas diretamente nas curvas de Bode (e, por conseguinte, na carta de Nichols-Black), conforme ilustrado na figura xxxxxxxx.

No caso de um sistema de segunda ordem caracterizado por  $(\zeta, \omega_n)$ ,  $|G_{MA}(j\omega_0)| = 1$  para

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2} \quad (297)$$

e a margem de fase  $\gamma$  é dada por

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \quad (298)$$

Uma aproximação útil para  $\gamma$  (em graus) que vale para  $\xi$  pequeno é

$$\gamma = 100 \times \xi \quad (299)$$

Em vista da expressão 296, a margem de fase determina o sobressinal no caso de sistemas de segunda ordem (ou quando há um par polos dominantes).

### Largura de banda

Intuitivamente, sistemas que possuem respostas rápidas são aqueles que atenuam pouco os componentes de frequências mais elevadas. O grau de atenuação das altas frequências em relação às baixas pode ser expresso quantitativamente pela largura de banda.

Dada uma função de transferência  $G(s)$ , a largura de banda é a faixa  $(0, \omega_c)$  onde a frequência de corte  $\omega_c$  é caracterizada por

$$|G(j\omega)| < |G(j\omega_c)| - 3 \text{ dB} \quad (300)$$

$\forall \omega > \omega_c$ .

## Projeto de Controladores no Domínio a Frequência

Como visto anteriormente, o compensador lead apresenta a forma genérica já apresentada em 236, mas com  $s = j\omega$

$$G_c(j\omega) = K \frac{j\omega + \frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{\alpha T}} \quad (301)$$

com  $0 < \alpha < 1$ .

O máximo avanço de fase ocorre para

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (302)$$

e o seu valor é

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \quad (303)$$

Se for possível aproximar o comportamento do sistema em torno das frequências de interesse como sendo de segunda ordem, as especificações de desmepenho requerem apenas o valor do sobressinal desejado ( $M_p$ ) e do tempo de resposta, que pode ser tipicamente o de subida ( $t_r$ ) ou o de acomodação ( $t_s$ ).

Para sistemas de segunda ordem, tanto o  $M_p$  quanto a margem de fase  $\gamma$  dependem somente do coeficiente de amortecimento  $\xi$ . Portanto, fornecido o  $M_p$  desejado, pode-se obter o valor da margem de fase  $\gamma$  que deve ser imposta.

Por outro lado,  $t_r$  e  $t_s$  fornecem o valor de  $\omega_n$  requerido. Se o valor de  $\xi$  é pequeno,  $\omega_n \simeq \omega_c = \omega|_{|G(j\omega)|=1}$ .

O projeto de um compensador lead utilizando as curvas de Bode consiste, portanto, em se obter  $\omega_c$  a partir de  $t_r$  e  $t_s$  e, calcular o  $\phi_{\max}$  requerido

$$\phi_{\max} = \gamma - \angle G(j\omega_c) - 180^\circ \quad (304)$$

para se ter o  $\eta$  necessário. De posse de  $\phi_{\max}$ , a expressão 303 permite obter  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1 - \phi_{\max}}{1 + \phi_{\max}} \quad (305)$$

Da expressão 302,

$$T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}}$$

e de 236

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha}}{|G(j\omega)|}}_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (306)$$

A sequência de projeto de controladores *lead* utilizando curvas de Bode encontra-se ilustrada na figura 19.

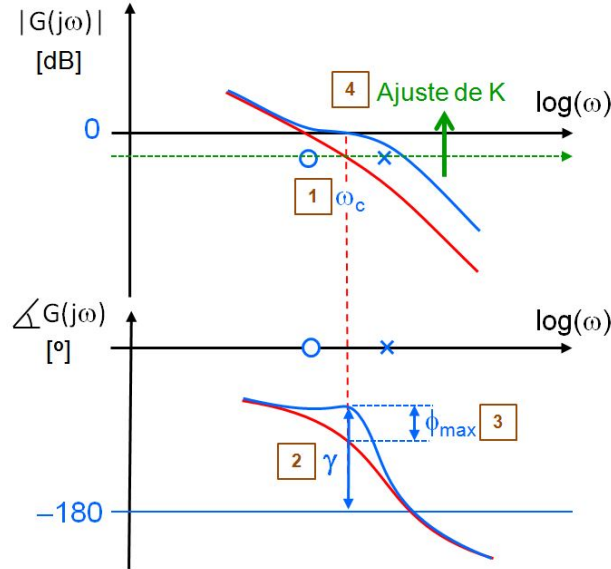


Figura 19: Exemplo de projeto de compensador avançador de fase, com a indicação da sequência de procedimentos 1 a 4

## Projeto de Controladores Atrasadoras de Fase

O compensador atrasador de fase (*lag*) é utilizado, em geral, para aumentar o valor de  $K_v$ , melhorando o rastreamento de excitações do tipo rampa. Trata-se de um filtro passa-baixa e o seu projeto é muito simples. Basta adicionar o ganho requerido em frequências baixas comparadas com aqueles da região de cruzamento 0dB.

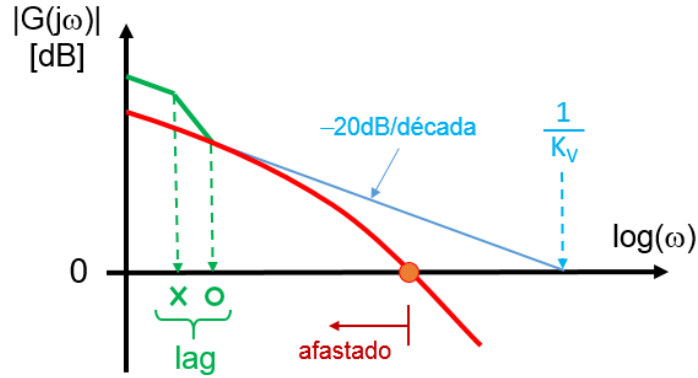


Figura 20: Exemplo de projeto de compensador atrasador de fase para melhoria do  $K_v$

## Preditor de Smith

O Preditor de Smith é utilizado para controle de sistemas com atraso de transporte. Considere a tarefa de projetar um controlador  $G_C(s)$  para um processo com atraso  $G_P(s) = G(s) \exp(-Ts)$ , conforme a figura 21. A idéia é fazer o projeto do controlador  $G_C(s)$  como se não houvesse

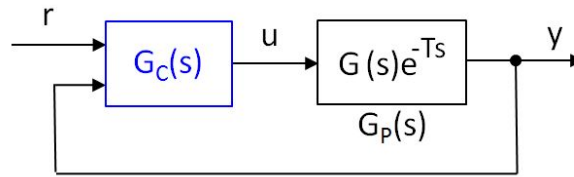


Figura 21: Exemplo de uma planta que possui atraso de transporte.

o atraso, ou seja, como se a planta fosse descrita apenas pelo fator  $G(s)$  (sem o fator  $e^{-Ts}$ ). Quaisquer métodos podem ser utilizados para fazer o projeto do  $G_C(s)$ . A saída correspondente será denotada  $\hat{Y}(s)$ . Notando que

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}(s) &= G(s)U(s) \\
 &= G(s)U(s) + G(s)e^{-Ts}U(s) - G(s)e^{-Ts}U(s) \\
 &= \underbrace{G(s)e^{-Ts}U(s)}_{G_P(s)} + (1 - e^{-Ts})G(s)U(s) \\
 &= Y(s) + (1 - e^{-Ts})G(s)U(s)
 \end{aligned}$$

constata-se que é possível obter  $\hat{y}(t)$  a partir de  $y(t)$ , requerido pelo controlador  $G_X(s)$ , mediante o uso da parcela de predição  $(1 - e^{-Ts})G(s)U(s)$ . Esse termo é facilmente computável, caso se conheça o modelo da planta. A estrutura do controlador  $G_C(s)$  pode ser visto na figura 22 Como esperado, o Preditor de Smith depende da disponibilidade de um modelo acurado da planta para produzir bons resultados.

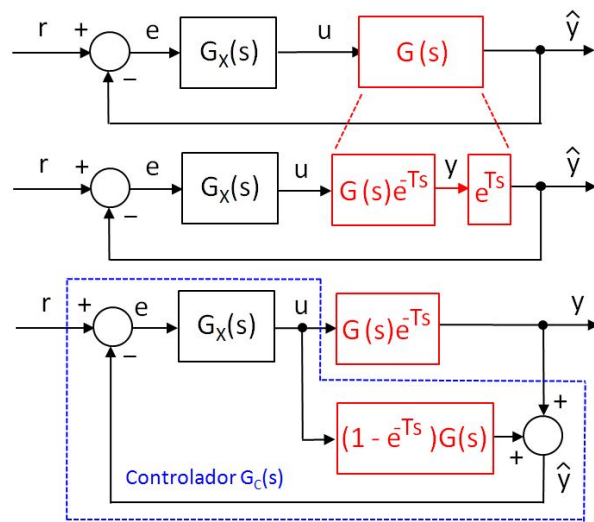


Figura 22: Sequência de argumentos utilizados para o projeto de Preditores de Smith

# Bibliografia

- [1] ARNOLD, V. *Ordinary Differential Equations*. The M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1973.
- [2] ASTROM, K., AND MURRAY, R. *Feedback Systems*. Princeton University Press, 2008.
- [3] BARNETT, S. *Matrices: Methods and Applications*. Oxford University Press, 1990.
- [4] DORF, R., AND BISHOP, R. *Modern Control Systems*, 7th ed. Addison Wesley, 1995.
- [5] FRANKLIN, G., POWELL, J., AND EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1986.
- [6] HINRICHSSEN, D., AND PRITCHARD, A. *Mathematical System Theory*. Springer Verlag, Heidelberg, 2005.
- [7] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. McMillan, 1992.
- [8] KUO, B. *Automatic Control Systems*, 7th ed. Prentice Hall, 1995.
- [9] LJUNG, L., AND GLAD, T. *Modeling of Dynamic Systems*. Springer Verlag, Heidelberg, 1994.
- [10] MANSOUR, M. A simple proof of the routh-hurwitz criterion. Tech. Rep. 88-04, ETH, 1988.
- [11] MONTEIRO, L. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2011.
- [12] NISE, N. *Control System Engineering*. Addison Wesley, 1995.
- [13] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 1970.
- [14] SASTRY, S., AND BODSON, M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, 1991.
- [15] SCHWARZ, R., AND FRIEDLAND, B. *Linear Systems*. McGraw Hill, 1965.
- [16] SHINNERS, S. *Modern Control Systems Theory and Applications*. Addison-Wesley, 1972.
- [17] SLOTINE, J., AND LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [18] VAN DE VEGTE, J. *Feedback Control Systems*. Prentice Hall, 1990.
- [19] VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1978.
- [20] WELLSTEAD, P. *Introduction to Physical Systems Modelling*. Academic Press, 1979.