



**EE-210/2017**

**Lista de Exercícios de Revisão (opcional)**

1. (Espaços Vetoriais) Se possível, definir operações de soma e multiplicação de modo que o conjunto  $\{0,1,2\}$  seja um corpo (*field*).

2. (Operadores Lineares) Seja  $P_n$  o conjunto de polinômios de grau igual ou menor que "n" e com coeficientes reais (Exemplos de elementos de  $P_1$ :  $p(t) = 1+2t$ ,  $p(t) = 5$ ,  $p(t) = 3t$ ). Dados os polinômios  $p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots + p_nt^n$  e  $q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2 + \dots + q_nt^n$ , considere as operações de soma e produto por um escalar  $\alpha$ :

$$p(t) + q(t) = (p_0+q_0) + (p_1+q_1)t + (p_2+q_2)t^2 + \dots + (p_n+q_n)t^n$$

$$\alpha p(t) = \alpha p_0 + \alpha p_1t + \alpha p_2t^2 + \dots + \alpha p_nt^n$$

a) Verifique se  $(P_n, R)$  é um espaço linear com as operações definidas acima.

b) Sejam as bases  $\{1, 1+t\}$  para  $P_1$  e  $\{1+t+t^2, 1+t-t^2, 1-t+t^2\}$  para  $P_2$  e considere o operador  $A: (P_1, R) \rightarrow (P_2, R)$ , dado por  $A(p_0+p_1t) = p_0+p_1t+(p_0+p_1)t^2$

b1) Mostrar que  $A$  é um operador linear e

b2) Obter a representação matricial de  $A$ .

3. (Auto-Valores, Operadores Lineares) Seja  $A: R^2 \rightarrow R^2$  (um operador linear em  $R^2$  que em uma certa base é representada pela matriz  $A$ ). Mostre que

a) Se  $\lambda = \alpha + j\omega$  for auto-valor de  $A$ , então o seu conjugado,  $\bar{\lambda} = \alpha - j\omega$  também o é.

b) Os auto-vetores associados a  $\lambda$  e a  $\bar{\lambda}$  são linearmente independentes.

c) Se  $\{e, \bar{e}\}$  são os auto-vetores de  $A$  associados a  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ , respectivamente, então, na base  $\{e, \bar{e}\}$ , a representação de  $A$  é

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + j\omega & 0 \\ 0 & \alpha - j\omega \end{bmatrix}$$

d) Se  $e_r = \text{Re}\{e\}$  e  $e_i = \text{Im}\{e\}$ , então, na base  $\{e_r, e_i\}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix}$$

4. (Projeção Ortogonal) Deseja-se projetar um objeto 3-D, representado por seus pontos, sobre um plano, para efeito de visualização em tela de computador. Achar a matriz  $P$  que represente a operação *projeção ortogonal* de um vetor  $x \in R^n$ ,  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ , sobre um plano  $N$  caracterizado pela sua normal  $n \in R^n$  (portanto, deseja-se algo do tipo  $y = Px$ ), sabendo-se que a base  $\{v_1, v_2\}$  do plano  $N$  deve ser escolhida de tal forma que  $Pe_1 \in 3^\circ$  quadrante,  $Pe_2 \in 4^\circ$  quadrante e  $Pe_3 \in$  eixo vertical (ou seja, alinhado com  $v_1$ ).

5. (Transformada de Laplace)

a) Calcule a Transformada Inversa de Laplace de

$$\text{i)} \quad A(s) = \frac{s+2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

$$\text{ii)} \quad B(s) = \frac{10}{(s^2 + 3s + 2)(s^2 + 4)}$$

$$\text{iii)} \quad C(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$

b) Calcular  $f(t)$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s}$$

6. Obter o modelo linearizado (portanto, para pequenos sinais) em torno dos pontos de equilíbrio, empregando a expansão em série de Taylor:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 + \beta x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \gamma x_2 - \delta x_1 x_2 \end{cases}$$

com  $\alpha = \gamma = 1$  e  $\beta = \delta = 1.5$  (Equação do Predador-Presa de Volterra)

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + ax_2 + bx_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + cx_1 + dx_1^2 \end{cases}$$

com  $a = 4$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$  e  $d = 2$  (Equação da Corrida Armamentista de Rappaport)

7. Calcular  $\exp(At)$  e  $A^{50}$ :

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Esboçar a resposta  $y(t)$ , para entrada  $u(t)$  do tipo degrau unitário a partir de  $x(0) = [1 \ 0]^T$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 3]x$$

9. Demonstrar o Algoritmo de Frame-Sourieau-Leverrier-Fadeev: Considere uma matriz  $A_{n \times n}$ . então

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_{n-1} s + p_n$$

em que

$$-p_1 = q_1$$

$$-kp_k = q_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i q_{k-i} \quad 1 < k < n$$

$$q_k = \text{tr}(A^k) \quad 1 \leq k \leq n$$

10. Dada uma matriz A na forma companheira:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

mostrar que:

a)  $\det(sI-A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$

b) se  $\lambda$  é um autovalor de A,  $[1 \ \lambda \ \lambda^2 \ \dots \ \lambda^{n-1}]^T$  é um auto-vetor de A associado a  $\lambda$ .

11. Mostrar que o determinante de uma matriz de Vandermonde V é:

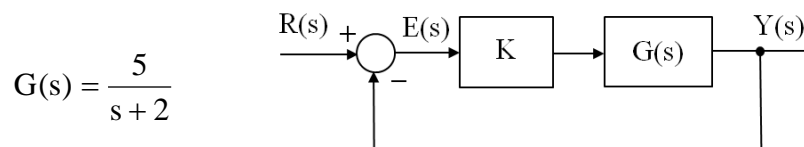
$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Obs: Matriz de Vandermonde é aquela em que a i-ésima coluna é da forma

$$V_i = [1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \lambda_i^3 \ \dots \ \lambda_i^{n-1}]^T$$

e os  $\lambda_i$  s são supostos distintos.

12. Considere o sistema em malha fechada por realimentação unitária, onde a função de transferência  $G(s)$  de malha aberta é dada por



a) Ajustar, se possível, o valor do ganho K, de modo que o erro em regime permanente  $e(\infty)$  seja menor que 5% para entrada degrau.

b) Ajustar, se possível, o valor do ganho K, de modo que o a saída  $y(t)$  atinja 50% do valor de regime permanente em menos de 500 ms.

c) Calcular o erro de regime para entrada rampa ( $R(s) = 1/s^2$ ).

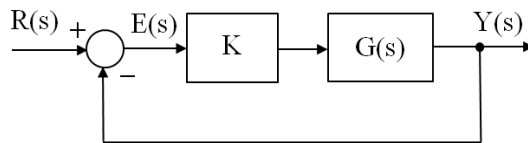
13. Considere o sistema

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Quais devem ser os valores de "a" e "b", de modo que o sistema apresente sobressinal de 20% para entrada degrau e o tempo de subida ( $t_r$ ) seja de 500 ms?

14. Considere o sistema em malha fechada, em que a função de transferência  $G(s)$  de malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)}$$



- Ajustar, se possível, o valor do ganho  $K$ , de modo que o sobressinal para entrada degrau seja de 20%.
- Ajustar, se possível, o valor do ganho  $K$ , de modo que o tempo de subida seja menor que 1.0 s.
- Ajustar, se possível, o valor do ganho  $K$ , de modo que o sobressinal seja menor que 20% e o tempo de subida, menor que 500 ms.
- Qual o erro de regime para entrada degrau ( $R(s) = 1/s$ ) para o ganho ajustado em (a)?
- Qual o erro de regime para entrada rampa ( $R(s) = 1/s^2$ ) para o ganho ajustado em (a)?

15. Esboçar, em um mesmo gráfico, a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$ , em regime permanente, considerando a excitação  $u(t) = 10 \sin(5t)$  e

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} & \text{b)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{s+25} & \text{c)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25} \end{array}$$

16. Esboçar, sem uso de pacote computacional (®MATLAB, ®Scilab ou similar) e em papel milimetrado (monolog), as curvas de Bode de Ganho e de Fase:

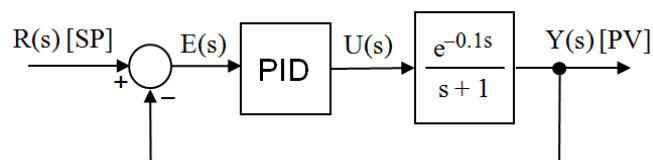
$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} & \text{c)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25} \\ \text{b)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{s+25} & \text{d)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25(s+2)}{(s^2 + 2s + 5)(s+20)} \end{array}$$

17. Traçar as respostas em frequência:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad G(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+10)} & \text{b)} \quad G(s) = e^{-0.1s} & \text{c)} \quad G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s+1} \end{array}$$

18. Qual o valor do tempo de subida e do percentual de sobressinal de um sistema de segunda ordem que apresenta, na sua resposta em frequência,  $M_r = 6$  dB e  $\omega_r = 5$  rd/min ?

19. Ajustar os parâmetros do controlador PID utilizando ambas as regras de Ziegler-Nichols de (Curva de Reação e Oscilação Limiar, obtidas por simulação ®MATLAB). Verificar o resultado por simulação numérica.



20. Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad x(0) = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Se possível, obter  $K$ , de modo que  $u = -Kx$  aloca os polos do sistema em  $-0.5 \pm 0.5j$  e traçar o gráfico de  $y(t)$  para os casos de malha aberta e malha fechada.

21. Obtenha a função de transferência  $Y(s)/U(s)$  de sistemas descritos por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

para os casos

$$a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

$$c) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

$$d) A = [-2] \quad B = 1 \quad C = [1]$$

e comente o resultado.

22. Qual o valor do tempo de subida e do percentual de sobressinal de um sistema de segunda ordem que apresenta, na sua resposta em frequência,  $M_r = 6$  dB e  $\omega_r = 5$  rd/min ?

23. Estudar, com o uso do critério de Nyquist, a estabilidade do sistema em malha fechada, com realimentação negativa unitária, em função de valores de  $K > 0$  (de modo "qualitativo", tipo  $K$  "pequenos" e "grandes") para os casos em que as funções de transferência de malha aberta são dadas por:

$$a) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-0.1s}}{s+1}$$

$$c) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2+25}$$

$$b) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(s+25)}$$

$$d) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s+1)^2}{s(s^2+0.09)^2}$$

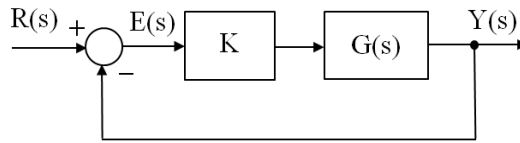
24. Qual o máximo valor de  $K$  em função de  $T$ , de modo que o sistema seja estável em malha fechada com realimentação unitária:

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s(s+1)}$$

25. Determinar o valor de  $\alpha$  de modo que, sob condição de operação com realimentação negativa unitária, a margem de fase seja de  $45^\circ$ :

$$G(s) = \frac{1}{2} \frac{\alpha s + 1}{s^2}$$

26. Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, determinar os valores do ganho  $K$  de modo que o sistema seja estável:



i)  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+3s+3)}$

ii)  $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$

iii)  $G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$

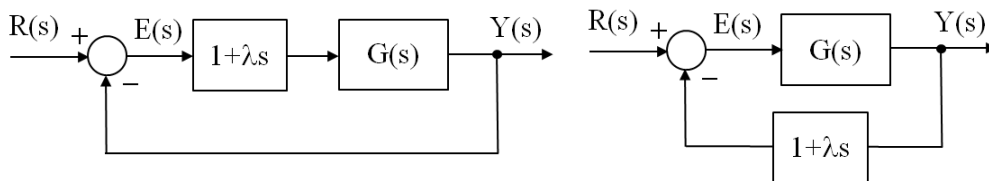
27. Determinar, empregando o critério de Routh-Hurwitz, os valores de  $K$  de modo que o sistema seja estável quando a malha for fechada com realimentação unitária ( $u = r - y$ , em que  $r$  é um sinal de referência):

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} - 10y = K \left( 3u + \frac{du}{dt} \right)$$

28. Assuma que

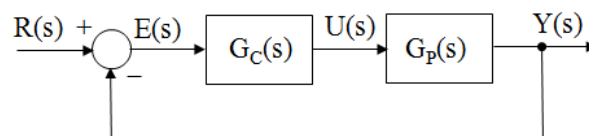
$$G(s) = \frac{6K}{(s+2)(s+3)}$$

Ajustar para ambos os sistemas abaixo, se possível, os parâmetros  $K$  e  $\lambda$  (números reais), de modo que os polos de malha fechada estejam localizados de tal forma que correspondam a um sobressinal de 20% e tempo de subida de 300 ms, para entrada degrau:



Verifique os resultados dos ajustes por simulação (®SIMULINK) e comente as diferenças.

29. Propor  $G_c(s)$ , de modo que o sistema apresente, em malha fechada, sobressinal menor que 30%, erro de regime nulo para entrada degrau, tempo de subida menor que 1.0s para entrada degrau e erro de regime menor que 0.1 para entrada rampa unitária:



em que

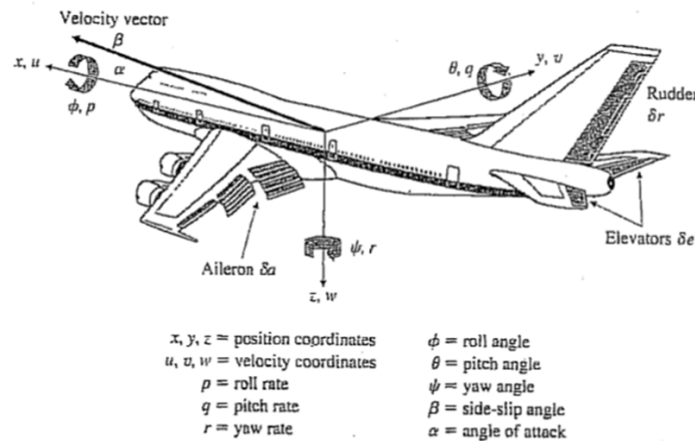
$$G_p(s) = \frac{10}{(s+2)(s+5)}$$

30. Um Boeing 747 em voo horizontal, com velocidade nominal de 830 ft/s (Mach 0.8), à altitude de 20.000ft, com massa total de 637.000 lb, é descrito pelo modelo linearizado para pequenos sinais dado por

$$\frac{dx}{dt}(t) = \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 820 & 0 & 0 \\ -0.000222 & -0.00153 & -0.668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -32.7 \\ -2.08 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

em que os componentes do vetor de estados  $x(t) = [u(t) \ w(t) \ q(t) \ \theta(t) \ h(t)]$ , sendo  $h(t)$  a altitude de voo da aeronave e  $\delta e$  corresponde à variação angular do profundor (elevator):



a) Propor valores para  $Q$  e  $\rho$  e obter a lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$  que minimiza o índice de desempenho do tipo quadrático:

$$J[x, u] = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + \rho u^2(t)] dt$$

b) Apresentar os gráficos de  $x_i \times t$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , a partir da condição inicial  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.05]^T$  utilizando a lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$

c) Projetar um observador de estados e inicializar com  $\hat{x}_i = 0$ .

d) Apresentar os gráficos de  $\hat{x}_i \times t$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , a partir da condição inicial  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.05]^T$  utilizando a lei de controle  $u(t) = -K\hat{x}(t)$

31. Considere o sistema (retirado de Khalil, H.K. - *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996, pg 144):

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 + 1.5 \cos^2(t) & 1 - 1.5 \sin(t) \cos(t) \\ -1 - 1.5 \sin(t) \cos(t) & -1 + 1.5 \sin^2(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} x$$

a) Verificar que os auto-valores da matriz de sistema " $A(t)$ " não dependem de  $t$  e estão localizados no semi-plano esquerdo.

b) Simular o sistema e verificar se a origem é um ponto de equilíbrio estável.

32. Considere o sistema descrito por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [a + b \cos(y)] \frac{dy}{dt} + c \sin(y) = 0$$

Supondo  $c > 0$ ,  $a > b > 0$  e fazendo  $x_1 = y$  e  $x_2 = \frac{dy}{dt}$ , verificar a estabilidade utilizando a função candidata de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = c[1 - \cos(x_1)] + \frac{x_2^2}{2}$$

33. Estudar a estabilidade de um certo circuito RLC em que foi utilizado um capacitor cuja característica varia de modo suave com o tempo e tal que  $0 < C_{\min} < C(t) < C_{\max} < \infty$ ,  $\forall t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{L} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{C(t)} x_1 - \frac{R}{L} x_2 \end{aligned}$$

OBS: Sugestão para a função candidata de Lyapunov

$$V(t, x) = \left[ R + \frac{2L}{RC(t)} \right] x_1^2 + 2x_1 x_2 + \frac{2}{R} x_2^2$$

34. Considere a equação de Van der Pol com o tempo revertido:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

a) Verificar se a origem é um ponto de equilíbrio estável

b) Utilizando a função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , obter uma estimativa para a região de atração desse ponto de equilíbrio (ou seja, a região em que a função  $V(x)$  satisfaz os critérios exigidos para estabilidade do ponto (0,0).

35. Estudar a estabilidade da origem (0,0) de um pêndulo com atrito, descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{L} \sin(x_1) - \frac{b}{mL} x_2 \end{aligned}$$

em que  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $L = 0.98 \text{ m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$  e  $b = 9.8 \text{ kg/s}$

a. Usando o primeiro método de Lyapunov (linearização + determinação dos e-valores)

b. Usando o segundo método de Lyapunov, através da função candidata

$$V = [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2$$

c. Usando o segundo método de Lyapunov, através da função candidata



$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{1}{2} (3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

OBS: A matriz P foi obtida resolvendo-se  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$ .

- d. Comentar os resultados obtidos em (a), (b) e (c).