

# Sistemas Lineares

Seja um sistema descrito pela equação diferencial ordinária, doravante referido como a versão autônoma da equação de estados,

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)_{n \times n} x(t) ; x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

## Matriz de Transição de Estados

Seja  $\phi(t, t_0)_{n \times n}$ , doravante denominada de matriz de transição de estados, tal que

$$\frac{d\phi}{dt}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0) ; \phi(t_0, t_0) = I_n \quad (2)$$

A solução de 1 é

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 \quad (3)$$

A coluna k-ésima de  $\phi(t_0, t_0)$  é a solução de 1 com a condição inicial

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

Uma forma alternativa para se obter  $\phi(t, t_0)$  é selecionar  $n$  vetores linearmente independentes  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  e obter as soluções  $x^i(t)$  da equação 1 correspondentes às condições iniciais  $x(t_0) = x^i$ . Nesse caso, pode-se definir a matriz fundamental  $\psi(t)$  como sendo

$$\psi(t) := \begin{bmatrix} x^1(t) & x^2(t) & \cdots & x^n(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

e pode-se verificar que

$$\phi(t, t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0) \quad (6)$$

Propriedades de  $\phi(t, t_0)$ :

- Unicidade
- $\phi^{-1}(t, t_0) = \phi(t_0, t)$
- $\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0)$
- $\det \phi(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^t \text{tr} A(\sigma) d\sigma)$  [Abel-Jacobi-Liouville]

Para os sistemas lineares representados no espaço de estados por

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) ; x(t_0) = x_0 \quad (7)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (8)$$

o mapeamento  $u \rightarrow y$  é da forma

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (9)$$

$$y(t) = C(t)\phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(\tau)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \quad (10)$$

No caso particular de  $A$  não depender de  $t$ :

$$\phi(t, t_0) = \exp(A(t - t_0)) \quad (11)$$

Seja  $\Delta(s)$  o polinômio característico de  $A$ :

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det(sI - A) \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \end{aligned} \quad (12)$$

## Teorema de Cayley-Hamilton

Segundo o Teorema de Cayley-Hamilton, a matriz anula o seu polinômio característico, ou seja:

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0 \quad (13)$$

Esse resultado é muito útil para se obter a fórmula explícita de  $\exp(A(t - t_0))$ .

## Sistemas LTI

Os sistemas lineares invariantes no tempo, referidos como sistemas LTI, são representados no espaço de estados por

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t_0) = x_0 \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (15)$$

e o mapeamento  $u \rightarrow y$  é dado por

$$y(t) = C \exp(A(t - t_0)) x_0 + \int_{t_0}^t C \exp(A(t - \tau)) Bu(\tau) d\tau \quad (16)$$

No caso particular de  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  e  $u(t) = \delta(t)$ , tem-se

$$g(t) := y(t)|_{u=\delta} = C \exp(At) B \quad (17)$$

de forma que

$$y(t) = [g * u](t) \quad (18)$$

Fazendo-se uso da propriedade da transformada de Laplace

$$\text{Laplace}\{[g * u](t)\} = G(s)U(s) \quad (19)$$

constata-se de 18 que

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (20)$$

em que  $G(s)$  é denominada de função de transferência.

Pode-se fazer também uso da transformada de Laplace em 14, assumindo  $x_0 = 0$  de modo a se obter

$$\begin{aligned} \text{Laplace}\left\{\frac{dx}{dt}(t)\right\} &= \text{Laplace}\{Ax(t) + Bu(t)\} \\ sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned} \quad (21)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Laplace}\{y(t)\} &= \text{Laplace}\{Cx(t) + Du(t)\} \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \quad (22)$$

Combinando-se 21 e 22, obtém-se em vista de 20 que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (23)$$

## Controlabilidade e Observabilidade

O estado  $x_0$  da representação  $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$  é dito ser controlável em  $[t_0, t_1]$ , se e somente se  $\exists u_{[t_0, t_1]}$  que transfere  $(t_0, x_0)$  para  $(t_1, x_1)$  com  $x_1$  arbitrário. A representação  $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$  é dita ser completamente controlável em  $[t_0, t_1]$ , se e somente se  $\forall x_0$  é controlável em  $[t_0, t_1]$ .

Se uma representação é completamente controlável, é possível atingir  $\{t_1, 0\}$  a partir de  $\{t_0, x_0\}$  para um  $x_0$  arbitrário,  $t_0 < t_1$ . De 9 tem-se que

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (24)$$

$$\phi(t_1, t_0)x_0 = - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (25)$$

$$x_0 = - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (26)$$

Note-se em 26 que o mapeamento  $L : u \rightarrow - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$  é linear, de modo que o conjunto de estados  $x_0$  controláveis é o conjunto imagem  $im\{L[u]\}$ .

Definindo-se o gramiano de controlabilidade

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\phi^T(t_0, \tau)d\tau \quad (27)$$

tem-se uma matriz que representa um operador linear  $W : x \rightarrow W(t_0, t_1)x$ . Pode-se mostrar que  $im\{L[u]\} = im\{W(t_0, t_1)\}$ .

Teorema de Brockett: Para uma representação  $\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $\exists u$  que transfere  $\{t_0, x_0\}$  para  $\{t_1, x_1\}$ ,  $t_0 < t_1$  se e somente se

$$(x_0 - \phi(t_0, t_1)x_1) \in im\{W(t_0, t_1)\}. \quad (28)$$

Se  $rank\{W(t_0, t_1)\} = n$ , então a transferência de  $\{t_0, x_0\}$  para  $\{t_1, x_1\}$  pode ser realizada pelo sinal

$$u(t) = -B^T(t)\phi^T(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \phi(t_0, t_1)x_1] \quad (29)$$

que possui a característica de ser o controle de mínima energia.

No caso de sistemas LTI, são equivalentes:

- $\{A, B\}$  completamente controlável
- linhas de  $\exp(At)B$  são linearmente independentes
- $W(t_0, t_1)$  é não singular  $t_1 > t_0 > 0$

- $\text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$  (Kalman's rank condition)
- $\text{rank}[sI - AB] = n; \forall s \in C$  (Popov-Belevitch-Hautus test)

Teorema (Wonham, 1967): Os polos de um sistema LTI podem ser alocados arbitrariamente por realimentação de estados, se e somente se a representação for completamente controlável.

O estado  $x_0$  da representação  $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$  é dito ser observável se  $x_0$  é determinável a partir do conhecimento da sua resposta à excitação nula  $y_{[t_0, t_1]}$ . A representação  $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$  é dita ser completamente observável em  $[t_0, t_1]$  não existe nenhum estado  $x_0 \in R^n$  que não seja observável.

Definindo-se o gramiano de observabilidade

$$M(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \phi(\tau, t_0) d\tau \quad (30)$$

$\{A, C\}$  é completamente observável em  $[t_0, t_1]$  se núcleo de  $M(t_0, t_1)$  é  $\{0\}$ . Note-se, ainda que para o operador linear  $L : x_0 \rightarrow C(t)\phi(t, t_0)x_0$ ,  $\text{Ker}\{L\} = \text{Ker}\{M(t_0, t_1)\}$ .

No caso de sistemas LTI, são equivalentes:

- $\{A, C\}$  completamente observável
- colunas de  $C \exp(At)$  são linearmente independentes
- $M(t_0, t_1)$  é não singular  $t_1 > t_0 > 0$

$$\bullet \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

## O Problema de Desacoplamento de Distúrbios

Dado um sistema descrito pelas equações de estado

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t); x(0) = x_0 \quad (31)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (32)$$

a idéia é obter uma lei de controle de modo que uma perturbação  $w(t)$  conhecida, não afete  $y(t)$ . Nesse problema, se

$$u(t) = Fx(t) + Gw(t) \quad (33)$$

a equação de estado torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= Ax(t) + B[Fx(t) + Gw(t)] + Ew(t) \\ &= (A + BF)x(t) + (BG + E)w(t) \end{aligned} \quad (34)$$

ou seja

$$y(t) = C \exp((A + BF)t)x_0 + \int_0^t C \exp((A + BF)(t - \tau)) (BG + E) w(\tau) d\tau \quad (35)$$

Caso  $A + BF$  possua auto-valores no semi-plano esquerdo,  $C \exp((A + BF)t) \downarrow 0$  à medida que  $t \uparrow \infty$ . Além disso, deseja-se fazer

$$\int_0^t C \exp((A + BF)(t - \tau)) (BG + E) w(\tau) d\tau \equiv 0 \quad (36)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} C \\ C(A + BF) \\ \vdots \\ C(A + BF)^{n-1} \end{bmatrix} (BG + E) = 0 \quad (37)$$

Como exemplo, considere um processo modelado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Adotando-se

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}; G = [-1] \quad (39)$$

tem-se que

$$[BG + E] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$[A + BF] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$C[BG + E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

$$C[A + BF][BG + E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (43)$$

e, além disso

$$\text{eig}([A + BF]) = \text{eig}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix} -2 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

## Formas Canônicas

Forma canônica controlável: Dada uma representação completamente controlável

$$\frac{dx}{dt}(t) = A_{n \times n} x(t) + B_{n \times 1} u(t) \quad (44)$$

pode se fazer uma transformação similar  $\bar{x} = Px$ , de modo que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt}(t) &= \frac{dPx}{dt}(t) \\ &= P \frac{dx}{dt}(t) \\ &= P(Ax(t) + Bu(t)) \end{aligned} \quad (45)$$

e, notando que  $x = P^{-1}\bar{x}$ , obter

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = PAP^{-1}\bar{x}(t) + PBU(t) \quad (46)$$

em que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

e

$$PB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \quad (48)$$

No caso, a matriz de transformação  $P$  é da forma

$$P = \begin{bmatrix} p \\ pA \\ \vdots \\ pA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (49)$$

em que  $p$  é a última linha da matriz  $U = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$

Quando  $B$  possui  $m < n$  colunas, ou seja,  $u(t)$  possui  $m$  linhas, a matriz  $U$  será o tipo  $n \times nm$ . Se  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  é uma coluna de  $B$ , seja  $d_i$  tal que os elementos do conjunto  $\{b_i, Ab_i, \dots, A^{d_i-1}b_i\}$  sejam linearmente independentes. Caso a representação seja completamente controlável, é possível construir

$$\bar{U} = [b_1 \ Ab_1 \ \cdots \ A^{d_1-1}b_1, \dots, b_m \ Ab_m \ \cdots \ A^{d_m-1}b_m] \quad (50)$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^m d_i = n \quad (51)$$

Definam-se ainda

$$\begin{aligned} k_1 &= d_1 \\ k_2 &= d_1 + d_2 \\ &\vdots \\ k_m &= d_1 + d_2 + \cdots + d_m \end{aligned} \quad (52)$$

e  $p_i$  a linha  $k_i$ -ésima de  $\bar{U}^{-1}$ , ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1A \\ \vdots \\ p_1A^{d_1-1} \\ \vdots \\ p_m \\ p_mA \\ \vdots \\ p_mA^{d_m-1} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Utilizando-se a matriz  $P$  assim obtida para transformação similar, tem-se

$$\hat{B} = PB = \begin{bmatrix} 0_{(d_1-1) \times m} \\ 1 \ * \ * \ * \ * \\ 0_{(d_2-1) \times m} \\ 0 \ 1 \ * \ * \ * \\ \vdots \\ 0_{(d_m-1) \times m} \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ij} &= (PAP^{-1})_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} ; i = j \\ \hat{A}_{ij} &= (PAP^{-1})_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} ; i \neq j \end{aligned} \quad (55)$$

em que  $*$  denotam números que não são relevantes para a apresentação dos conceitos.

Para simplificar a notação, é conveniente definir ainda

$$A_m = \begin{bmatrix} (PAP^{-1})_{d_1} \\ (PAP^{-1})_{d_2} \\ \vdots \\ (PAP^{-1})_{d_m} \end{bmatrix} \quad (56)$$

em que  $(PAP^{-1})_{d_i}$  é a linha  $d_i$ -ésima de  $PAP^{-1}$  e

$$B_m = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Exemplo: Considere um sistema cuja representação no espaço de estados possui as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

com  $m = 2$  e  $n = 4$ . Este sistema é completamente controlável utilizando-se apenas um dos sinais de controle, ou seja, os pares  $(A, b_1)$  e  $(A, b_2)$  são completamente controláveis, em que

$B = [b_1|b_2]$ . Nessas condições, pode-se escolher  $d_1 = 1$  e  $d_2 = 3$ , obtendo-se

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Uma vez que

$$\overline{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

faz-se

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ p_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

de forma que a matriz de transformação similar toma a forma

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

A forma canônica controlável é, portanto, dada pelas matrizes  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (63)$$

e

$$\hat{B} = PB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Aqui,

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (65)$$

e

$$B_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

## Teorema da Estrutura

Teorema da Estrutura: Se  $\{A, B, C, D\}$  é completamente controlável e  $P$  é a matriz que representa a transformação similar para a forma canônica controlável, então

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (67)$$

$$= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + D \quad (68)$$

$$= [\hat{C}S(s) + DQ(s)]Q^{-1}(s)$$



em que  $\hat{C} = CP^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} S_{n \times m}(s) &= \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s_m(s) \end{bmatrix} \\ s_i &= \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & \cdots & s^{d_i-1} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (69)$$

e

$$Q(s) = B_m^{-1} \left( \begin{bmatrix} s^{d_1} & & & \\ & s^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{d_m} \end{bmatrix} - A_m S(s) \right) \quad (70)$$

Exemplo: Considere as matrizes  $A$  e  $B$  apresentadas anteriormente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

juntamente com a matriz de saída

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

e assumindo  $D = 0$ , bem como a matriz de transformação similar

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

A representação na forma canônica controlável é dada por

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\hat{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Neste exemplo, mantendo-se a escolha  $d_1 = 1$  e  $d_2 = 3$ , tem-se

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \quad (77)$$

de modo que, utilizando-se da fórmula 70, juntamente com as matrizes  $A_m$  e  $B_m$  fornecidas em 65 e 66, respectivamente, obtém-se

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \right) \quad (78)$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s^3 - 4s^2 + 3s - 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

A função de transferência  $G(s)$  é dada, portanto, pela expressão

$$G(s) = [\widehat{C}S(s) + DQ(s)] Q^{-1}(s) \quad (80)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s^3 - 4s^2 + 3s - 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (81)$$

$$= \frac{1}{s^4 - 4s^2 + 3s - 1} \begin{bmatrix} s & s^2 \\ s^3 - 4s^2 + 1 & -3s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Note que, fazendo-se

$$N(s) = [\widehat{C}S(s) + DQ(s)] \quad (83)$$

e

$$D(s) = Q(s) \quad (84)$$

tem-se a forma usual de função de transferência

$$G(s) = N(s)D(s)^{-1} \quad (85)$$

Uma matriz racional  $G(s)$  é dita ser própria se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) < \infty \quad (86)$$

e estritamente própria se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0 \quad (87)$$

## Realizações

Realização de uma função de transferência: Dada uma matriz racional própria  $G(s)$ , realização é uma quádrupla  $\{A, B, C, D\}$  tal que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (88)$$

## Grau de McMillan

O grau de McMillan de uma função de transferência própria  $G(s)$  é a ordem da realização mínima de  $G(s)$ .

## Realizações Mínimas

Uma realização  $\{A, B, C, D\}$  de  $G(s)$  é mínima se e somente se é simultaneamente completamente controlável e observável [2], [1] e [12], entre outras.

## Realização de Gilbert

Seja  $G(s)_{p \times m}$  uma função de transferência estritamente própria ( $D = 0_{p \times m}$ )

$$G(s) = [g_{ij}(s)] ; i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, m \quad (89)$$

e

$$\Delta(s) = s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (90)$$

o mínimo múltiplo comum dos denominadores de  $g_{ij}(s)$ . Assumindo-se que as raízes  $\lambda_i, i = 1, \dots, r$  do polinômio característico são distintas, pode-se escrever

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i) \quad (91)$$

e podem ser obtidas matrizes  $R_i, i = 0, \dots, r-1$ , tais que

$$G(s) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s - \lambda_i} R_i \quad (92)$$

ou seja,

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) G(s) \quad (93)$$

Denote-se

$$\rho_i := \text{rank}(R_i) \quad (94)$$

e sejam matrizes  $C_i$  e  $B_i$  escolhidos de modo que

$$R_i = C_i B_i \quad (95)$$

Nessas condições, uma realização controlável  $\{A, B, C, 0\}$  é

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\rho_1 \times \rho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{\rho_r \times \rho_r} \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$C = [C_1 \quad \dots \quad C_r] \quad (98)$$

Exemplo: Considere a função de transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ -\frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (99)$$

e

$$\Delta(s) = (s+1)(s+2) \quad (100)$$

A expansão em frações parciais leva a identidade

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 2s+4 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$= \frac{1}{s+1} R_1 + \frac{1}{s+2} R_2 \quad (102)$$

ou

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Portanto,

$$\rho_1 = 2 \quad (105)$$

$$\rho_2 = 1 \quad (106)$$

e uma possibilidade de escolha de  $C_i$  e  $B_i$  seria

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{C_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{B_1} \quad (107)$$

e

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{C_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}_{B_2} \quad (108)$$

A realização diagonal de Gilbert é, portanto, da forma

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} u \quad (109)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \quad (110)$$

e

$$y = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \quad (111)$$

Para verificação, basta calcular  $C(sI - A)^{-1}B$ . Além disso, pode-se verificar que a representação é completamente controlável e observável, ou seja, é mínima.

## Realização utilizando Parâmetros de Markov

Uma outra forma de realização pode ser obtida com base em parâmetros de Markov. Considere inicialmente a função de transferência

$$G(s) = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (112)$$

e note que

$$\frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} = \frac{\beta_0}{h_0} + \frac{(\beta_1 - \alpha_1 \beta_0)}{h_1} s^{-1} + \dots \quad (113)$$

$$= h_0 + h_1 s^{-1} + h_2 s^{-2} + \dots \quad (114)$$

em que, após a devida organização, obtém-se

$$h_0 = \beta_0 \quad (115)$$

$$h_1 = -\alpha_1 h_0 + \beta_1$$

$$h_2 = -\alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_0 + \beta_2$$

$$\vdots$$

$$h_k = -\alpha_1 h_{k-1} - \alpha_2 h_{k-2} - \dots - \alpha_k h_0 + \beta_k$$

Portanto, a função de transferência pode ser escrita na forma

$$G(s) = h_0 + h_1 s^{-1} + h_2 s^{-2} + \dots \quad (116)$$

Defina-se, agora, a matriz de Hankel, denotado  $H(m, n)$  por

$$H(m, n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \dots & h_{m+n-1} \end{bmatrix} \quad (117)$$

Por outro lado, considere a representação no espaço de estados

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (118)$$

cuja representação no domínio transformado é

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (119)$$

Sabendo-se que

$$(sI - A)^{-1} = I + As^{-1} + A^2 s^{-2} + \dots \quad (120)$$

a equação 119 pode ser reescrita como

$$G(s) = C \left( I + As^{-1} + A^2 s^{-2} + \dots \right) B \quad (121)$$

$$= CB + CABs^{-1} + CA^2 Bs^{-2} + \dots \quad (122)$$

Comparando-se a expressão 114 e 121, obtém-se que

$$h_k = CA^{k-1}B$$

conhecidos como parâmetros de Markov.

Os passos para utilizar o conceito de parâmetros de Markov para realizar funções de transferência são:

- A partir do  $G(s)$  de ordem  $n$ , efetuar a divisão longa e obter os parâmetros de Markov  $\{h_1, \dots, h_{2n}\}$
- Construir a matriz de Hankel

$$H(n+1, n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n} \end{bmatrix} \quad (123)$$

- Determinar o posto de  $H(n+1, n)$

$$n^* = \rho\{H(n+1, n)\} \quad (124)$$

- Obter  $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n^*} & \frac{1}{n^*+1} & \frac{0}{n^*+2} & \cdots & \frac{0}{n+1} \end{bmatrix}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n^*} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} H(n+1, n) = 0 \quad (125)$$

- Construir as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n^*} \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$B = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n^*} \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

Pode-se verificar que

$$h_1 = CB \quad (129)$$

$$h_2 = CAB \quad (130)$$

$$h_3 = CA^2B \quad (131)$$

$$\vdots \quad (132)$$

e, além disso, que tanto

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n^*-1}B \end{bmatrix} = H(n^*, n^*) \quad (133)$$

quanto

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n^*-1} \end{bmatrix} = I \quad (134)$$

possuem rank  $n^*$ . Portanto, a representação é completamente controlável e observável, ou seja, a realização é mínima.

### Lema de Inversão de Matrizes

Considere matrizes  $F_{n \times m}$  e  $G_{m \times n}$ . Então  $\det(I_m + GF) = \det(I_n + FG)$ .

Verificação do Lema de Inversão de Matrizes: Sejam  $A$  e  $B$  matrizes inversíveis. Então

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \right) &= \det(A) \det(B - CA^{-1}D) \\ &= \det(B) \det(A - DB^{-1}C) \end{aligned} \quad (135)$$

pois

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D \\ CA^{-1} & B \end{bmatrix} \quad (136)$$

ou

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \right) \det \left( \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) &= \det \left( \begin{bmatrix} I & D \\ CA^{-1} & B \end{bmatrix} \right) \\ \det \left( \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \right) \det(A^{-1}) &= \det(B - CA^{-1}D) \\ \det \left( \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \right) &= \det(A) \det(B - CA^{-1}D) \end{aligned} \quad (137)$$

Analogamente,

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & DB^{-1} \\ C & I \end{bmatrix} \quad (138)$$

ou

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \right) \det \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \right) &= \det \left( \begin{bmatrix} A & DB^{-1} \\ C & I \end{bmatrix} \right) \\ \det \left( \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \right) &= \det(B) \det(A - DB^{-1}C) \end{aligned} \quad (139)$$

Portanto, fazendo-se  $A = I_n$ ,  $B = I_m$ ,  $C = -G_{m \times n}$  e  $D = F_{n \times m}$ , em

$$\det(A) \det(B - CA^{-1}D) = \det(B) \det(A - DB^{-1}C) \quad (140)$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\det(I_n) \det(I_m + G_{m \times n} I_n^{-1} F_{n \times m}) &= \det(I_m) \det(I_n + F_{n \times m} I_m^{-1} G_{m \times n}) \\ \det(I_m + GF) &= \det(I_n + FG)\end{aligned}\quad (141)$$

### Matriz de Diferença de Retorno (*Return Difference Matrix*)

Considere um sistema em malha fechada da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Ky + v\end{aligned}\quad (142)$$

ou seja

$$\frac{dx}{dt} = (A - BKC)x + Bv \quad (143)$$

Nessas condições,

$$\begin{aligned}\Delta_{open}(s) &= \det(sI - A) \\ \Delta_{closed}(s) &= \det(sI - A + BKC)\end{aligned}\quad (144)$$

de modo que [11], [8], [10]

$$\begin{aligned}\Delta_{closed}(s) &= \det\left((sI - A)\left(I + (sI - A)^{-1} BKC\right)\right) \\ &= \det(sI - A) \det\left(I + (sI - A)^{-1} BKC\right)\end{aligned}\quad (145)$$

Fazendo-se  $G = (sI - A)^{-1} BK$  e  $F = C$  no lema de inversão de matrizes  $\det(I_m + GF) = \det(I_n + FG)$ , a equação 145 se torna

$$\begin{aligned}\Delta_{closed}(s) &= \det(sI - A) \det\left(I + C(sI - A)^{-1} BK\right) \\ &= \Delta_{open}(s) \det(I + L(s)K)\end{aligned}\quad (146)$$

em que  $G(s)$  é a função de transferência de malha aberta

$$L(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (147)$$

Logo, a relação entre os polinômios característicos de malha fechada e de malha aberta é dada por

$$\frac{\Delta_{closed}(s)}{\Delta_{open}(s)} = \det(I + G(s)K) \quad (148)$$

A matriz de diferença de retorno  $R(s)$  é, por definição,

$$R(s) = I + G(s)K \quad (149)$$

Teorema: Se  $\Delta_{open}(s)$  possui  $P$  polos no semi-plano direito, então  $\Delta_{closed}(s)$  é Hurwitziano se e somente se a curva de Nyquist de  $\det(R(s))$  envolve a origem  $-P$  vezes.



Caso particular de  $C_{n \times n}$  e  $B_{n \times n}$ : Significa que  $u$  e  $y$  são  $n \times 1$ ,  $G(s)$  e  $K$  são  $n \times n$ . Da equação 146, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta_{closed}(s) &= \Delta_{open}(s) \det(I + G(s)K) \\
&= \Delta_{open}(s) \det\left(G(s) \left(G^{-1}(s) + K\right)\right) \\
&= \Delta_{open}(s) \det(G(s)) \det\left(G^{-1}(s) + K\right) \\
&= \Delta_{open}(s) \det\left(C(sI - A)^{-1}B\right) \det\left(G^{-1}(s) + K\right) \\
&= \Delta_{open}(s) \det(C) \det(sI - A)^{-1} \det(B) \det\left(G^{-1}(s) + K\right) \\
&= \det(C) \det(B) \det\left(G^{-1}(s) + K\right) \\
&= \lambda \det\left(G^{-1}(s) + K\right)
\end{aligned} \tag{150}$$

em que  $\lambda$  é uma constante e, portanto, não afeta o cálculo das raízes de  $\Delta_{closed}(s) = 0$ .

Portanto, para testar se  $\Delta_{closed}(s)$  é Hurwitziana, basta que se estude  $\det(G^{-1}(s) + K)$ . Essa tarefa se torna muito fácil se a função de transferência inversa do sistema apresentar dominância diagonal.

## Dominância Diagonal

Uma matriz complexa  $M_{r \times r}$  é dita ser dominante na diagonal, em média, se

$$|m_{ii}| > \sum_{j=1}^r \frac{|m_{ij}| + |m_{ji}|}{2} ; i = 1, 2, \dots, r \tag{151}$$

Se uma matriz de funções racionais  $R(s)$  é dominante na diagonal para  $\forall s \in \Gamma$ , em que  $\Gamma$  é o contorno de Nyquist, então o número de envoltimentos da origem de  $\det(R(s))$  é igual ao número de envolvimento dos elementos da diagonal de  $R(s)$ , [5].

Assim, se  $G^{-1}(s)$  apresentar dominância diagonal, pode-se estudar, para cada  $i$  separadamente, o número de envoltimentos de  $G_{ii}^{-1}(s) + K_{ii}$ . Uma forma de se fazer esta verificação de modo gráfico é utilizar o teorema de Gershgorin.

## Círculos de Gershgorin

Os auto-valores de uma matriz  $M_{r \times r}$  está na união dos discos (centrados em  $m_{ii}$  com raio igual à soma dos módulos dos elementos da linha  $i$ , excluindo  $m_{ii}$ )

$$|s - m_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^r |m_{ij}| ; i = 1, 2, \dots, r \tag{152}$$

e também na união

$$|s - m_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^r |m_{ji}| ; i = 1, 2, \dots, r \tag{153}$$

Os gráficos da figura 1 ilustram o aspecto das bandas de Gershgorin, obtidas para  $s = j\omega$  com  $\omega$  variando de 0.1 a 10, de uma função de transferência inversa  $G(s)_{2 \times 2}$ . Como nenhum círculo

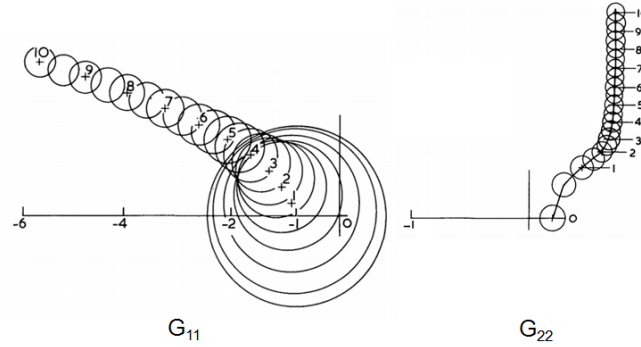


Figura 1: Exemplo de arranjo inverso de Nyquist com os círculos de Gershgorin sobrepostos. Retirado do artigo do Prof. N Munro, Design of controllers for open-loop unstable multivariable system using inverse Myquist array, Proc IEE, 1972.

contém a origem,  $M$  apresenta dominância diagonal. Na figura 2 são vistos os mesmos gráficos apresentados na figura 1, traçados mediante a utilização do script *gershband* do *MIMO toolbox* para o MATLAB. Os elementos da matriz de transferência utilizados para a confecção desses gráficos encontram-se à direita da figura 2. Os círculos de Gershgorin podem ser utilizados para

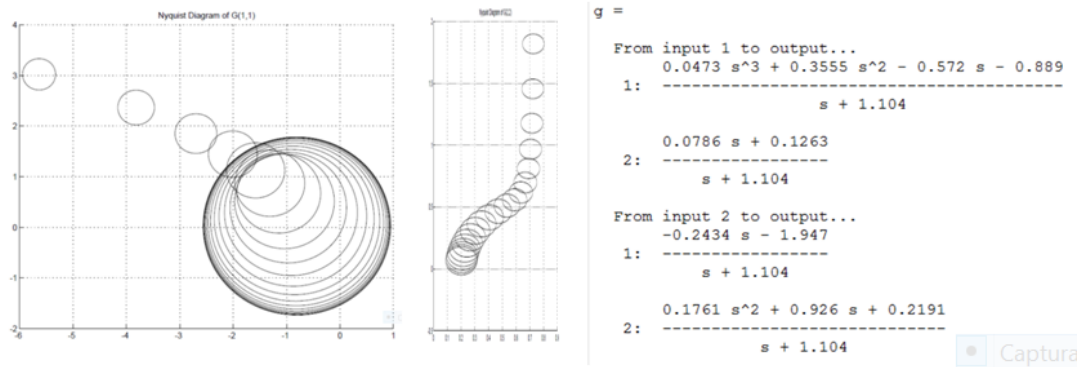


Figura 2: Exemplo de arranjo inverso de Nyquist com os círculos de Gershgorin sobrepostos obtido com a utilização do MIMO Toolbox da MATLAB, *gershband()*.

projeto de controladores estáveis. Se para cada elemento diagonal  $g_{ii}^{-1}$  a banda de Gershgorin não inclui a origem ou os pontos críticos  $K_i$  o critério de Nyquist inverso é satisfeito. Um método para o projeto de uma matriz de ganhos de realimentação da saída, empregando o conceito de dominância diagonal. Considere o sistema ilustrado na figura 3 em que  $H$  e  $K$  são matrizes a serem projetados e  $G(s)$  é uma função de transferência com  $n$  entradas e  $n$  saídas. A matriz  $H$  é utilizada para transformar a função de transferência para a forma dominante na diagonal. Os passos para obtenção de  $K$ , a matriz de ganhos para a realimentação da saída são:

- Passo 1: Fazer  $H = I$
- Passo 2: Fazer  $P(s) = HG^{-1}(0)G(s)$

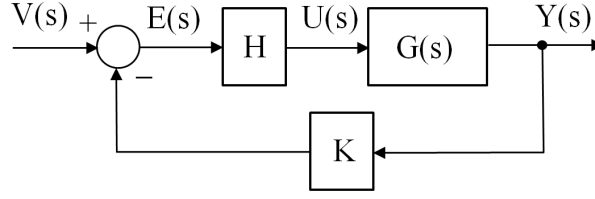


Figura 3: Estrutura utilizada para projeto de controlador baseado em dominância diagonal.

- Passo 3: Plotar  $p_{ii}^{-1}(s)$  para  $s \in \Gamma$ , contorno de Nyquist
- Passo 4: Sobrepor os círculos de Gershgorin
- Passo 5: Se  $p_{ii}^{-1}(s)$  não for dominante na diagonal, ajustar  $H$  e tornar ao Passo 2
- Passo 6: Escolher  $k_i$  utilizando o critério de Nyquist

### Critério Generalizado de Nyquist

Um método alternativo para se caracterizar a estabilidade de sistemas multivariáveis é utilizar o critério generalizado de Nyquist. Como visto anteriormente, o polinômio correspondente ao determinante da matriz de diferença de retorno  $\det(R(s))$  pode ser utilizado para o estudo da estabilidade em malha fechada. Para cada  $s$  fixo,

$$\det(R(s)) = \det(I + L(s)) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(s) \quad (154)$$

em que  $L(s) = G(s)K$  e  $\lambda_i(s)$  são os auto-valores de  $I + L(s)$ . Os auto-valores  $\lambda_i(s)$  de  $I + L(s)$  são obtidos como as raízes de

$$\det(\lambda I - (I + L(s))) = 0 \quad (155)$$

ou

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (I + L(s))) &= \det(\lambda I - I - L(s)) \\ &= \det((\lambda - 1)I - L(s)) \\ &= \det(\mu I - L(s)) \end{aligned} \quad (156)$$

que permite escrever um polinômio em  $\mu$  para cada valor de  $s$ :

$$\mu^n + a_1(s)\mu^{n-1} + a_2(s)\mu^{n-2} + \dots + a_{n-1}(s)\mu + a_n(s) = 0 \quad (157)$$

Denotando por  $\mu_i(s)$  as raízes desse polinômio 157, tem-se utilizando o fato  $\lambda_i(s) = 1 + \mu_i(s)$  e em vista de 154

$$\det(R(s)) = \prod_{i=1}^n (1 + \mu_i(s)) \quad (158)$$

O critério generalizado de Nyquist pode ser assim formulado [8], [10]: Se um sistema linear multivariável controlável e observável é tal que  $\Delta_{open}(s)$  possui  $P$  polos no semi-plano direito,

então  $\Delta_{closed}(s)$  é Hurwitziano se e somente se a curva de Nyquist de  $\mu_i(s)$  envolve  $-P$  vezes o ponto crítico  $-1 + j0$ .

Exemplo: Considere o sistema (retirado de PARKS, P.C. and HAHN, V. - Stability Theory, Prentice Hall, 1993)

$$G(s) = \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix} \quad (159)$$

A equação 158 é, no caso, da forma

$$\det \left( \mu(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (160)$$

$$\mu^2(s) - \frac{2s-3}{1.25(s+1)(s+2)}\mu(s) + \frac{s^2+3s+2}{1.25(s+1)(s+2)} = 0$$

ou seja,

$$\mu_1(s) = \frac{s-1.5 + \sqrt{-6s+0.25}}{1.25(s+1)(s+2)} \quad (161)$$

$$\mu_2(s) = \frac{s-1.5 - \sqrt{-6s+0.25}}{1.25(s+1)(s+2)} \quad (162)$$

À medida que  $s$  percorre o contorno de Nyquist, obtém-se as curvas apresentadas na figura 4, obtidas com o auxílio do script *nyqmimo* do *MIMO toolbox* para o MATLAB. Os elementos da matriz de transferência utilizados para a confecção desses gráficos encontram-se à direita dessa figura. Observando-se que na figura 4 os pontos notáveis mais próximos do ponto crítico  $-1$  são

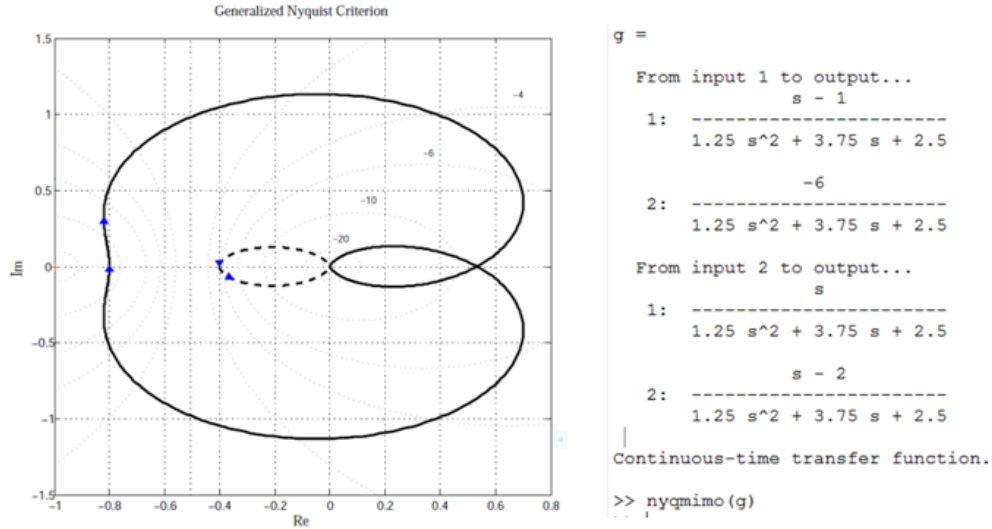


Figura 4: Lugar de Nyquist Generalizado.

-0.8 e -0.4, conclui-se que o sistema é estável para  $0 < k_1 < 1/0.8 = 1.25$  e  $k_2 < 1/0.4 = 2.5$ .

## Gang of Four

Em princípio, o material desta seção poderia ser apresentado considerando plantas MIMO. Porém, para efeito de consisção na apresentação, adotar-se-á  $G_P(s)$  SISO e  $G_C(s)$  um controlador linear. A figura 5 apresenta o diagrama em blocos da estrutura de controle estudada nessa seção. Porém, como a idéia é estudar propriedades de malha, não é considerada a função de transferência *feedforward*  $F(s)$  e é admitido que o sensor possui resposta rápida, ou seja  $H(s) = 1$ . Assim, com a simplificação, tem-se que  $Y(s) = Z(s) + \text{ruído de medida}$  e  $Y_{ref}(s) = R(s)$ . Nessas condições, as funções de transferência de malha fechada relevantes são:

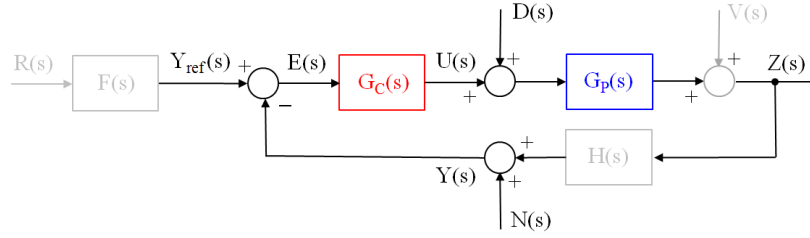


Figura 5: Uma típica configuração de malha de controle.

$$Z = \frac{G_P}{1 + G_P G_C} D - \frac{G_P G_C}{1 + G_P G_C} N + \frac{G_P G_C}{1 + G_P G_C} Y_{ref} \quad (163)$$

$$E = -\frac{G_P}{1 + G_P G_C} D - \frac{1}{1 + G_P G_C} N + \frac{1}{1 + G_P G_C} Y_{ref} \quad (164)$$

$$U = -\frac{G_P G_C}{1 + G_P G_C} D - \frac{G_C}{1 + G_P G_C} N + \frac{G_C}{1 + G_P G_C} Y_{ref} \quad (165)$$

em que a variável  $s$  foi omitida. Para facilitar a notação, é conveniente definir

$$L(s) = G_P(s)G_C(s) \quad (166)$$

que é a função de transferência de malha aberta.

As seguintes funções de transferência recebem denominações especiais de Sensitividade  $S(s)$  e Sentividade Complementar  $T(s)$ , em vista da importância desses em projetos de controladores.

$$S = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (167)$$

$$T = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (168)$$

É usual que sejam definidas, ainda,

$$Q = \frac{G_P(s)}{1 + L(s)} \quad (169)$$

$$R = \frac{G_C(s)}{1 + L(s)} \quad (170)$$

e reescrever as equações 163, 164 e 165 na forma

$$Z(s) = Q(s)D(s) - T(s)N(s) + T(s)Y_{ref}(s) \quad (171)$$

$$E(s) = -Q(s)D(s) - S(s)N(s) + S(s)Y_{ref}(s) \quad (172)$$

$$U(s) = -T(s)D(s) - R(s)N(s) + R(s)Y_{ref}(s) \quad (173)$$

A condição para estabilidade da malha fechada é que as raízes da equação

$$1 + L(s) = 0 \quad (174)$$

estejam todos no semi-plano esquerdo.

Para que a saída auxiliar  $y(t)$  restreie bem a referência  $y_{ref}(t)$ , o erro  $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$  deve ser pequeno, ou seja,  $E$  deve ser pequeno em algum sentido. Tendo-se em vista que

$$E(s) = S(s)Y_{ref}(s) \quad (175)$$

a condição de bom rastreamento da referência requer  $S$  pequeno, também em algum sentido.

Por outro lado, para se ter uma boa rejeição do ruído de medida  $N$  na saída  $Z$ , deve-se ter  $T$  pequeno em algum sentido, já que

$$Z(s) = T(s)N(s) \quad (176)$$

Porém, uma dificuldade fundamental é que, para cada  $s$ ,

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + L(s)} + \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (177)$$

$$= \frac{1 + L(s)}{1 + L(s)} \quad (178)$$

$$= 1 \quad (179)$$

de modo que não se pode ter, para um dado  $s = j\omega$ ,  $|S(j\omega)|$  e  $|T(j\omega)|$  simultaneamente pequenos. Felizmente, o bom rastreamento está relacionado com sinais de baixa frequência e basta  $|S(j\omega)|$  ser pequeno em baixas frequências e, para se ter uma boa rejeição de ruído na saída, relacionada com frequências elevadas,  $|T(j\omega)|$  pequeno. A condição

$$|S(j\omega)| \downarrow \text{ para } \omega \downarrow \quad (180)$$

pode ser caracterizada com uso de  $\|\cdot\|_\infty$ , propondo uma função peso  $W_S(s)$ , de modo que

$$\|W_S S\|_\infty \leq 1 \quad (181)$$

Como a idéia é ter  $|S(j\omega)|$  pequeno em baixas frequências,  $|W_{rast}(j\omega)|$  deve ser grande em baixas frequências, ou seja, um filtro passa baixas.

Analogamente, a condição

$$|T(j\omega)| \downarrow \text{ para } \omega \uparrow \quad (182)$$

pode ser caracterizada com o auxílio de uma função peso  $W_T(s)$  do tipo filtro passa altas, impondo

$$\|W_T T\|_\infty \leq 1 \quad (183)$$

A rejeição do distúrbio  $d(t)$ , considerando que em geral  $G_P(s)$  atenua frequências mais elevadas, requer  $S$  pequeno, já que

$$Z = \frac{G_P}{1 + G_P G_C} D \quad (184)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1 + G_P G_C}}_S G_P D \quad (185)$$

Se não é desejável que ocorram valores elevados na saída do controlador, a função de transferência  $(n, r, d) \rightsquigarrow u$  deve ser pequena. Logo, a condição desejada é

$$\|W_R G_C S\|_\infty \leq 1 \quad (186)$$

Assuma, agora que o modelo  $G(s)$  possui incertezas aditivas de modelamento

$$G(s) = G_P^{nom}(s) + \Delta G_P(s) \quad (187)$$

e se deseja baixa sensibilidade da saída com respeito à incertezas aditivas no modelo.

Se  $Z(s)$  é a saída do modelo nominal correspondente a uma referência  $R(s)$

$$Z(s) = \frac{G_P^{nom}(s) G_C(s)}{1 + G_P^{nom}(s) G_C(s)} R(s) \quad (188)$$

a saída real é dada por

$$Z + \Delta Z = \frac{[G_P^{nom} + \Delta G_P] G_C}{1 + [G_P^{nom} + \Delta G_P] G_C} R \quad (189)$$

$$\simeq \frac{G_P^{nom} G_C}{1 + G_P^{nom} G_C} R + \frac{\Delta G_P G_C}{(1 + G_P^{nom} G_C)^2} R \quad (190)$$

em que o argumento  $s$  foi omitido. É utilizada uma aproximação de primeira ordem de para se obter a expressão. Observando-se a equação 190, tem-se

$$\Delta Z = \frac{\Delta G_P G_C}{(1 + G_P^{nom} G_C)^2} R \quad (191)$$

donde, em termos relativos,

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta G_P G_C}{(1 + G_P^{nom} G_C)^2} \frac{1 + G_P^{nom} G_C}{G_P^{nom} G_C} \quad (192)$$

$$= \frac{1}{1 + G_P^{nom} G_C} \frac{\Delta G_P}{G_P^{nom}} \quad (193)$$

e, portanto, de um modo não rigoroso,

$$\frac{\frac{\Delta Z}{Z}}{\frac{\Delta G_P}{G_P^{nom}}} = \frac{1}{1 + G_P^{nom} G_C} = S \quad (194)$$

Logo, a baixa sensibilidade da saída a incertezas aditivas no modelo requer que para frequências  $\omega$  em que  $G_P(j\omega)$  apresenta magnitudes elevadas,

$$|S(j\omega)| \downarrow \text{ para } \omega \downarrow \quad (195)$$

Como feito anteriormente, adotando-se  $|W_S(j\omega)|$  do tipo filtro passa baixas, a condição a ser imposta é

$$\|W_S S\|_\infty \leq 1 \quad (196)$$

No caso de incertezas multiplicativas, uma forma de caracterizá-las é escrever

$$G_P(j\omega) = G_P^{nom}(j\omega) [1 + W_I(\omega) \Delta(j\omega)] \quad (197)$$

em que  $|\Delta(j\omega)| \leq 1$  e  $W_I(\omega)$  são escolhidos pelo projetista, à luz das especificações. Enquanto  $\Delta(j\omega)$  fornece uma incerteza de "direção",  $W_I(\omega)$  altera a "magnitude" da incerteza. O termo  $W_I$  é um fator multiplicador para cada  $\omega$ .

Para se estudar o problema de estabilidade robusta a incertezas multiplicativas, suponha novamente que a planta real é caracterizada por

$$G_P(j\omega) = G_P^{nom}(j\omega) [1 + W_I(\omega) \Delta(j\omega)] \quad (198)$$

em que  $|\Delta(\omega)| \leq 1$  e  $W_I(\omega)$  são escolhidos pelo projetista. A condição de estabilidade requer que a curva de

$$L^{incerto}(j\omega) = G_P^{nom}(j\omega) [1 + W_I(\omega) \Delta(j\omega)] G_C(j\omega) \quad (199)$$

$$= L(j\omega) + \mu(\omega) \Delta(j\omega) L(j\omega) \quad (200)$$

não enlace o ponto  $(-1, 0)$  à medida que  $\omega$  percorre o contorno de Nyquist. Observa-se na figura

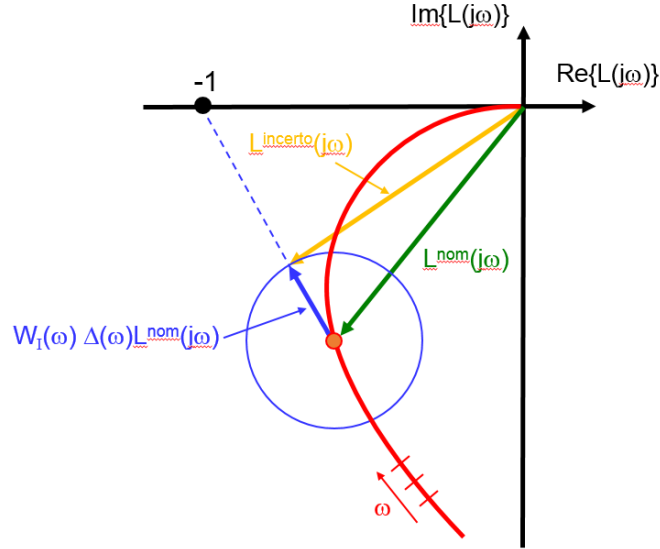


Figura 6: Configuração básica de uma malha de controle

6 que  $L^{incerto}(j\omega)$  não enlaça  $(-1, 0)$  se, para  $\forall \omega$

$$|W_I(\omega) \Delta(j\omega) L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (201)$$

Como

$$|W_I(\omega) \Delta(j\omega) L(j\omega)| \leq |W_I(\omega) L(j\omega)| \quad (202)$$



a condição 201 será satisfeita se

$$|W_I(\omega) L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$

ou,

$$\left| \frac{W_I(\omega) L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < 1 \quad (203)$$

$$|W_I(\omega) T(j\omega)| < 1 \quad (204)$$

A tabela seguinte apresenta alguns dos quesitos mais utilizados na prática e as respectivas condições em termos de  $S(s)$  e  $T(s)$ , a serem utilizadas mais à frente.

<i>Quesito</i>	<i>Condição</i>
Rastreamento da Referência	$\ W_S S\ _\infty \leq 1$
Rejeição do Ruído de Medida	$\ W_T T\ _\infty \leq 1$
Reduzida Ação de Controle	$\ W_R S\ _\infty \leq 1$
Robustez a Incerteza Aditiva	$\ W_S S\ _\infty \leq 1$
Estabilidade Robusta a Incertezas Multiplicativas	$\ W_I T\ _\infty \leq 1$

## Integral da Sensitividade de Bode

Considere  $L(s) = G_P(s)G_C(s)$  com grau relativo maior ou igual a 2 e que  $L(s)$  possui  $p_i, i = 1, \dots, N_p$  polos no SPD. então

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \text{res} \{p_i\} \quad (205)$$

Portanto, a área acima de 0 dB da curva  $\ln |S(j\omega)|$  deve ser compensada pela área abaixo, de modo a resultar um certo número no lado direito da equação 205. Obviamente, caso  $L(s)$  não possua polos no SPD, esse número é 0.

## Parametrização Q

Por simplicidade de notação, é tratado apenas o caso SISO. Denote por  $S$  a família de funções racionais próprias e estáveis. Será mostrado que, dada uma planta cuja representação é  $G_P(s) \in S$ , o conjunto de todos os controladores estabilizantes é dado por [15], [4]

$$\left\{ G_C = \frac{Q}{1 - G_P Q}, Q \in S \right\} \quad (206)$$

De fato, lembrando a apresentação do *gang of four*, as funções de transferência que devem ser estáveis para se obter estabilidade interna do sistema,

$$\begin{bmatrix} Z \\ E \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + G_P G_C} \begin{bmatrix} G_P & -G_P G_C & G_P G_C \\ -G_P & -1 & 1 \\ G_P G_C & -G_C & G_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ N \\ Y_{ref} \end{bmatrix} \quad (207)$$

Substituindo-se

$$G_C = \frac{Q}{1 - G_P Q} \quad (208)$$

obtém-se

$$\frac{1}{1 + G_P G_C} \begin{bmatrix} G_P & -G_P G_C & G_P G_C \\ -G_P & -1 & 1 \\ G_P G_C & -G_C & G_C \end{bmatrix} \quad (209)$$

$$= \frac{1}{1 + G_P \frac{Q}{1 - G_P Q}} \begin{bmatrix} G_P & -G_P \frac{Q}{1 - G_P Q} & G_P \frac{Q}{1 - G_P Q} \\ -G_P & -1 & 1 \\ G_P \frac{Q}{1 - G_P Q} & -\frac{Q}{1 - G_P Q} & \frac{Q}{1 - G_P Q} \end{bmatrix} \quad (210)$$

$$= (1 - G_P Q) \begin{bmatrix} G_P & -\frac{G_P Q}{1 - G_P Q} & \frac{G_P Q}{1 - G_P Q} \\ -G_P & -1 & 1 \\ \frac{G_P Q}{1 - G_P Q} & -\frac{Q}{1 - G_P Q} & \frac{Q}{1 - G_P Q} \end{bmatrix} \quad (211)$$

$$= \begin{bmatrix} G_P (1 - G_P Q) & -G_P Q & G_P Q \\ -G_P (1 - G_P Q) & -(1 - G_P Q) & (1 - G_P Q) \\ G_P Q & -Q & Q \end{bmatrix} \quad (212)$$

Por hipótese,  $G_P(s) \in S$  e  $Q \in S$ , de modo que todas as funções de transferência em 212 são estáveis.

Reciprocamente, assuma que um certo  $G_C(s)$  estabiliza internamente um sistema. Nesse caso, seja

$$Q = \frac{G_C}{1 + G_P G_C} \quad (213)$$

e note que  $Q \in S$ . Além disso

$$Q = \frac{G_C}{1 + G_P G_C} \quad (214)$$

$$Q (1 + G_P G_C) = G_C \quad (215)$$

$$Q = G_C - G_P Q G_C \quad (216)$$

$$Q = (1 - G_P Q) G_C \quad (217)$$

$$G_C = \frac{Q}{1 - G_P Q} \quad (218)$$

e  $G_C(s)$  possui a forma requerida.

Quando a planta  $G_P$  não é estável, a obtenção de um controlador internamente estabilizante requer maior cuidado.

Para ilustração de potenciais efeitos indesejados, pode-se relembrar o problema de alocação de polos. Se  $N(s)$  e  $D(s)$  fossem apenas polinômios a equação de Bézout, juntamente com  $\Delta_{desejado}(s)$ ,

$$N(s)X(s) + D(s)Y(s) = \Delta_{desejado}(s) \quad (219)$$

forneceria polinômios  $X(s)$  e  $Y(s)$ , que permitiria obter

$$G_C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (220)$$

o que resultaria, em vista do fato de que para sistemas SISO estritamente próprios, pode-se escrever

$$\Delta_{closed}(s) = \Delta_{open}(s) [1 + G_P(s)G_C(s)] \quad (221)$$

o que leva a

$$\Delta_{closed}(s) = \Delta_{open} [1 + G_P G_C] \quad (222)$$

$$= DY \left[ 1 + \frac{N}{D} \frac{X}{Y} \right] \quad (223)$$

$$= DY \frac{NX + DY}{DY} \quad (224)$$

$$= NX + DY \quad (225)$$

$$= \Delta_{desejado}(s) \quad (226)$$

Porém, considere a planta trivial

$$G_P(s) = \frac{1}{s} \quad (227)$$

e faça-se a associação

$$N(s) = 1 \quad (228)$$

$$D(s) = s \quad (229)$$

Caso a equação de Bézout seja

$$X(s) + sY(s) = 1 \quad (230)$$

uma solução seria  $X(s) = 1$  e  $Y(s) = 0$ , o que não permite obter um controlador genuíno

$$G_C(s) = \frac{1}{(0)} \quad (231)$$

ou a solução  $X(s) = 1 - s$  e  $Y(s) = 1$ ,

$$G_C(s) = \frac{1-s}{1} \quad (232)$$

que não é própria.

Porém, assumindo que  $N(s) \in S$  e  $D(s) \in S$ , é possível obter uma solução adequada, por exemplo

$$X = \frac{1}{s} \quad (233)$$

$$Y = \frac{s-1}{s^2} \quad (234)$$

que são próprios. De fato,

$$X(s) + sY(s) = \frac{1}{s} + s \frac{s-1}{s^2} \quad (235)$$

$$= \frac{s + s^2 - s}{s^2} = 1 \quad (236)$$

Retomando o problema de obter o conjunto de controladores estabilizantes, seja uma planta  $G_P(s) = N(s)/D(s)$ , representada na forma de fatorização coprima, com  $N(s)$  e  $D(s)$  pertencentes a  $S$  e tome-se  $X(s) \in S$  e  $Y(s) \in S$  satisfazendo

$$N(s)X(s) + D(s)Y(s) = 1 \quad (237)$$

Nessas condições, o conjunto de controladores estabilizantes é dado por

$$\left\{ \frac{X(s) + D(s)Q(s)}{Y(s) + N(s)Q(s)}; Q \in S \right\} \quad (238)$$

## QFT

A sigla QFT significa *Quantitative Feedback Theory* que consiste, basicamente, em prover um método baseado no domínio da frequência para projeto de controladores robustos. O texto apresentado aqui foi adaptado de [13] e [6].

Considere uma malha de controle cujo diagrama em blocos encontra-se ilustrada na Figura 7, sendo  $G_P(s)$  e  $G_C(s)$  uma planta SISO-LTI. Embora não se trate aqui o projeto de  $F(s)$ , essa função de transferência *feedforward* é usada comumente em projetos QFT como mais um grau de liberdade para modificar a resposta do sistema.

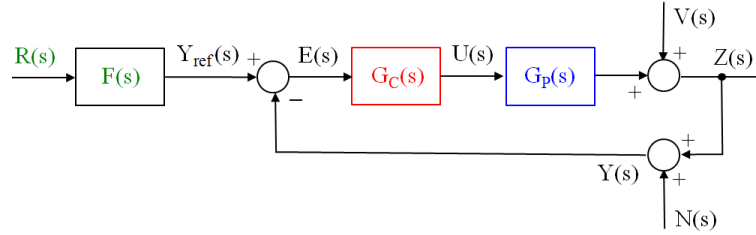


Figura 7: Configuração básica de uma malha de controle

Para ilustrar os procedimentos utilizados nos projetos utilizando QFT, considere um sistema descrito pela função de transferência

$$G_P(s) = \frac{ka}{s(s+a)} \quad (239)$$

em que os parâmetros  $a$  e  $k$  possuem incertezas. Mais especificamente,  $a \in [1, 4]$  e  $k \in [1, 5]$ . O problema é obter um controlador  $G_C(s)$  que apresente adequado desempenho para toda a família de plantas

$$P = \left\{ \frac{ka}{s(s+a)}; a \in [1, 4] \text{ e } k \in [1, 5] \right\} \quad (240)$$

A figura 8 apresenta a carta de Nichols em que se observa a resposta em frequência da planta nominal, bem como alguns pontos referentes a diferentes combinações de valores dos parâmetros  $k$  e  $a$ .

As regiões a serem evitadas, caracterizadas por

$$|S(j\omega)| < S_{\max} \quad (241)$$

para  $\omega$  pertencente a uma faixa de frequências a ser ajustada, são chamadas de U-bounds ou *sensitivity bounds* e se relacionam com estabilidade robusta. As regiões caracterizadas por

$$\alpha(\omega) \leq |T(j\omega)| \leq \beta(\omega) \quad (242)$$

são chamadas de B-bounds ou *tracking bounds* e se relacionam com o desempenho. A condição 242 pode ser verificada facilmente, notando que equivale à condição

$$\frac{\max_{G_P \in P} \left| \frac{G_P(j\omega)G_C(j\omega)}{1+G_P(j\omega)G_C(j\omega)} \right|}{\min_{G_P \in P} \left| \frac{G_P(j\omega)G_C(j\omega)}{1+G_P(j\omega)G_C(j\omega)} \right|} \leq \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)} \quad (243)$$

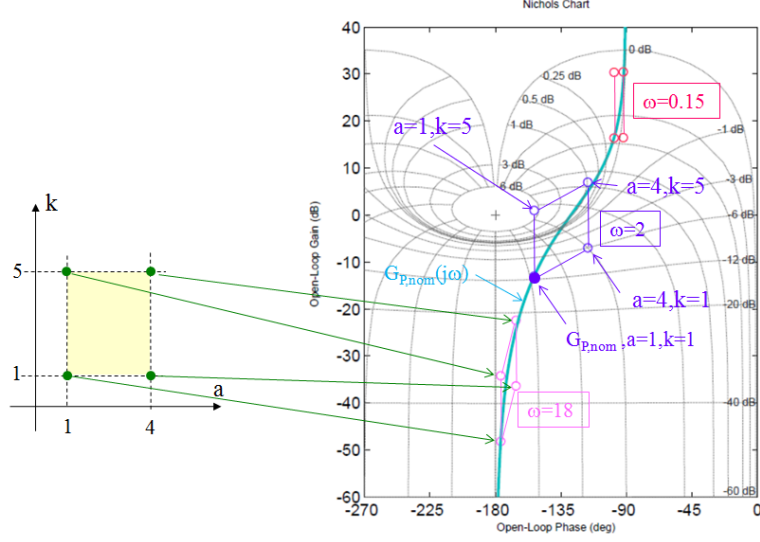


Figura 8: *Templates* para frequências  $\omega = 0.15, 2.0$  e  $18.0$ .

Os limites U-bounds, B-bounds e similares são conhecidos como Horowitz bounds.

A figura 9 apresenta as U-bounds para  $\omega = \{0.5, 1, 3, 30Hz\}$  com  $S_{\max} = 2.5$  e as B-bounds para  $\omega = \{0.01, 0.02, 0.1, 0.2, 0.5Hz\}$  correspondendo a valores de  $\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}$  de  $\{1.0011, 1.0043, 1.107, 1.47, 3.1\}$  obtido de

$$\alpha(\omega) = \frac{0.3}{(j\omega)^2 + 0.99j\omega + 0.3} \quad (244)$$

$$\beta(\omega) = \frac{0.06607(j\omega + 30)}{(j\omega)^2 + 1.2j\omega + 2} \quad (245)$$

As funções  $\alpha(\omega)$  e  $\beta(\omega)$  podem ser obtidas fazendo simulações após escolher a forma da resposta desejada. No caso, foi adotado o modelo de segunda ordem.

Tendo obtido as Bandas de Horowitz, faz-se o *loopshaping* de modo tradicional, utilizando-se o  $G_P$  nominal e o controlador escolhido, por exemplo um compensador cascata avançador de fase, como no caso ilustrado na figura 10.

## Decomposição em Valores Singulares

A decomposição em valores singulares possui várias utilidades em controle multivariável, incluindo redução de modelos, análise da resposta em frequência e balanceamento de modelos, entre outros. Por exemplo, sistemas de múltiplas entradas e saídas apresentam, geralmente, acoplamentos entre os canais, de modo que além da informação de ganho, é necessário que se conheça a direção em que estes atuam. A utilização da decomposição em valores singulares (SVD  $\equiv$  Singular Value Decomposition) permite obter tais informações.

Uma matriz  $U$  é dita ser unitária se

$$U^* = U^{-1} \quad (246)$$

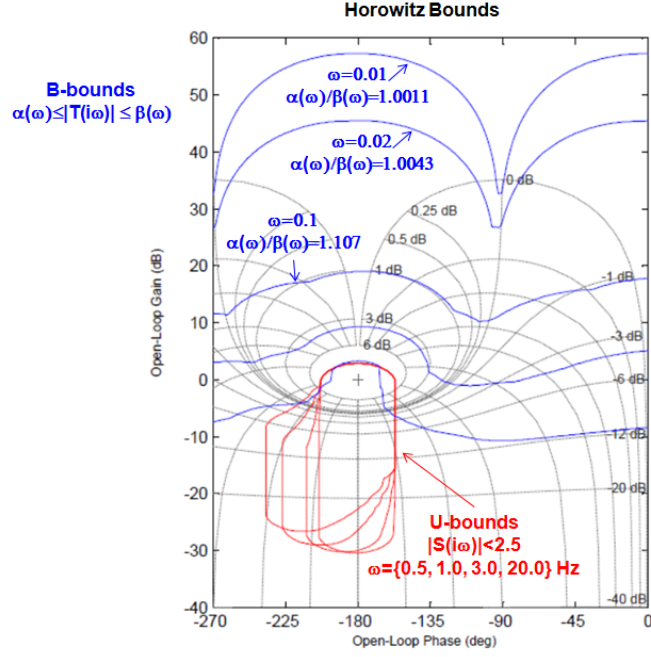


Figura 9: Exemplos de Bandas de Horowitz.

Uma matriz  $A_{p \times q}$  pode ser escrita na forma

$$A = U \Sigma V^* \quad (247)$$

em que  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias de dimensões  $p \times p$  e  $q \times q$ , respectivamente, e a matriz  $\Sigma$  possui a forma especial

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } p \geq q \\ \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix} & \text{se } p \leq q \end{cases} \quad (248)$$

com  $D$  diagonal e de dimensão  $d \times d$ ,  $d = \min \{p, q\}$

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d \end{bmatrix} \quad (249)$$

$$\bar{\sigma} = \max_i \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\} \quad (250)$$

$$\underline{\sigma} = \min_i \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\} \quad (251)$$

(Relação entre auto-valores e valores singulares) Dada uma matriz  $A$ ,

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} \quad (252)$$

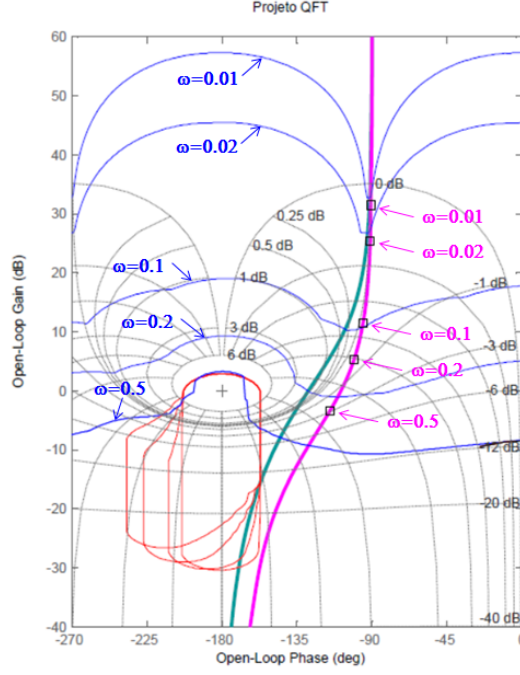


Figura 10: Exemplo de um projeto utilizando o conceito de QFT

Imediata, a partir da forma de  $AA^*$

$$AA^* = U\Sigma V^* (U\Sigma V^*)^* \quad (253)$$

$$= U\Sigma V^* V\Sigma U^* \quad (254)$$

$$= U\Sigma\Sigma U^* \quad (255)$$

$$= U \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{bmatrix} U^* \quad (256)$$

e, analogamente para  $A^*A$ .

Seja  $G(j\omega)$  a matriz complexa obtida fazendo-se  $s = j\omega$  em uma função de transferência, com  $\omega$  fixo. Utilizando-se SVD, obtém-se

$$G(j\omega) = U(\omega) \Sigma(\omega) V^*(\omega) \quad (257)$$

em que, pelo fato de  $U$  e  $V$  serem unitárias, as suas colunas são tais que

$$u_i^*(\omega) u_i(\omega) = 1 \quad (258)$$

$$u_i^*(\omega) u_j(\omega) = 0 \quad (259)$$

$$v_i^*(\omega) v_i(\omega) = 1 \quad (260)$$

$$v_i^*(\omega) v_j(\omega) = 0 \quad (261)$$

para  $i, j = 1, \dots, d$  e  $i \neq j$ . Multiplicando-se 257 à direita por  $V(\omega)$ , tem-se

$$G(j\omega) V(\omega) = U(\omega) \Sigma(\omega) \quad (262)$$

ou, em termos do  $i$ -ésimo componente

$$G(j\omega) v_i(\omega) = \sigma_i(G(j\omega)) u_i(\omega) \quad (263)$$

O valor singular  $\sigma_i(\omega)$  representa, portanto, o ganho de  $G(\cdot)$  na frequência  $\omega$  quando excitado na direção  $v_i$

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \frac{\|G(j\omega) v_i(\omega)\|_2}{\|u_i(\omega)\|_2} \quad (264)$$

$$= \|G(j\omega) v_i(\omega)\|_2 \quad (265)$$

uma vez que  $\|u_i(\omega)\|_2 = u_i^*(\omega) u_i(\omega) = 1$ . Usando o princípio da superposição, para uma entrada qualquer  $r(\omega)$ ,

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|G(j\omega) r(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (266)$$

O gráfico de  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$  e  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$  em dB versus  $\log \omega$  é também chamado de curvas de Bode, em analogia com o caso SISO.

Seja  $G(s)$  uma função de transferência própria e estável. A norma  $\|\cdot\|_\infty$  é definida por

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (267)$$

## Representação das Incertezas

Retoma-se, aqui, a representação de incertezas multiplicativas no modelo é a multiplicativa. Se  $G_P^{nom}(s)$  é o modelo nominal, a planta real é assumida ser da forma

$$G_P(s) = G_P^{nom}(s) [1 + W_I(s) \Delta_I(s)] \quad (268)$$

em que  $\|\Delta_I\| \leq 1$  e  $W_I(\cdot)$  é um peso definido de acordo com as exigências das especificações de desempenho. O subscrito  $(\cdot)_I$  se refere ao fato da incerteza estar no lado da entrada (*input*) de  $G_P(s)$ , conforme a estrutura vista na figura em que é apresentada uma representação em diagrama de blocos.

A motivação para esta forma de representação pode ser visualizada através do caso particular em que  $G_P(s)$  é somente um ganho  $g_P \in [g_{\min}, g_{\max}]$ . Tome-se como o ganho nominal o valor médio

$$g_P^{nom} = \frac{g_{\max} + g_{\min}}{2} \quad (269)$$

Se  $W_I$  for escolhido como

$$W_I = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{g_{\max} + g_{\min}} \quad (270)$$

então,

$$g_P = g_P^{nom} [1 + W_I \Delta_I] \quad (271)$$

$$= g_P^{nom} + \frac{g_{\max} - g_{\min}}{2} \Delta_I \quad (272)$$

e  $g_P$  varia de  $g_{\min}$  a  $g_{\max}$ , à medida que  $\Delta_I$  varia de  $-1$  a  $1$ .

As incertezas podem também ser representadas na saída da planta,

$$G_P(s) = [1 + W_O(s) \Delta_O(s)] G_P^{nom}(s) \quad (273)$$



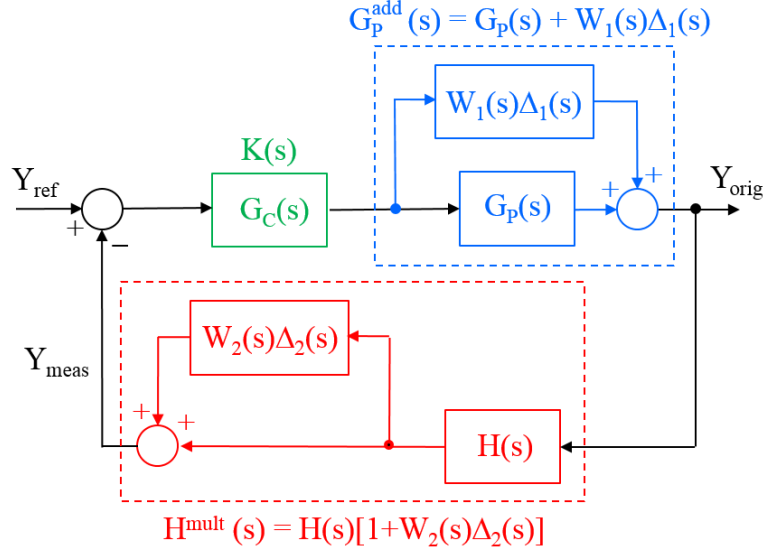


Figura 11: Incertezas aditivas e multiplicativas em uma malha de controle.

em que  $\|\Delta_O\| \leq 1$ , e podem ser movidas para entrada, desde que sejam tomados cuidados no sentido de se considerar o efeito do ganho  $G(j\omega)$  sobre  $W_I$ .

É grande a classe de plantas podem ser colocadas na forma ilustrada à esquerda da figura 12 em que as incertezas  $\Delta_i(s)$  estão agrupadas em uma matriz bloco diagonal

$$\Delta(s) = \text{diag} \{ \Delta_1(s), \dots, \Delta_\ell(s) \} \quad (274)$$

e destacadas do restante do sistema.

## Transformações Lineares Fracionais

Considere uma matriz  $P_{p \times q}$ , particionada segundo

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (275)$$

em que as dimensões são  $[P_{11}]_{p_1 \times q_1}$ ,  $[P_{12}]_{p_1 \times q_2}$ ,  $[P_{21}]_{p_2 \times q_1}$  e  $[P_{22}]_{p_2 \times q_2}$ . Dadas as matrizes  $\Delta_{p_1 \times q_1}$  e  $K_{p_2 \times q_2}$ , as transformações lineares fracionais superior (*u* de upper) e inferior (*l* de lower) são definidas, respectivamente, por

$$F_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \quad (276)$$

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (277)$$

A utilidade das LFT pode ser vista notando que no diagrama mais à esquerda da figura 12,

$$Z(s) = F_u(P, \Delta)W(s) \quad (278)$$

$$= \left[ P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \right] W(s) \quad (279)$$

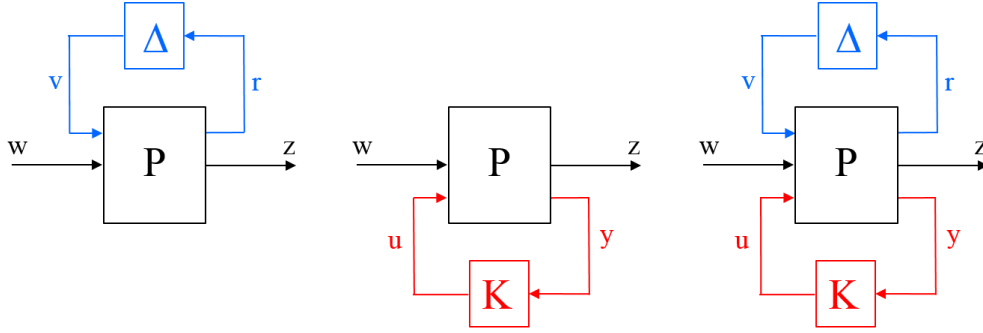


Figura 12: Estruturas comumente utilizadas em projeto de controladores:  $\Delta$  é o bloco de incertezas,  $P$  é a planta e  $K$  é o controlador

O controlador  $K(s)$  também pode ser destacado, de modo que o sistema pode ser representado como no diagrama em blocos do meio da figura 12 que permite escrever, em vista da LFT,

$$Z(s) = F_\ell(P, K) W(s) \quad (280)$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \end{bmatrix} W(s) \quad (281)$$

Destacando tanto  $\Delta(s)$  quanto  $K(s)$  como no diagrama de blocos mais à direita da figura 12 e considerando que

$$\begin{bmatrix} R(s) \\ Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (282)$$

a utilização de LFT permite escrever

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = F_u(\bar{P}, \Delta) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (283)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{P}_{22} + \bar{P}_{21}\Delta(I - \bar{P}_{11}\Delta)^{-1}\bar{P}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (284)$$

em que

$$\bar{P}_{11} = [P_{11}(s)] \quad (285)$$

$$\bar{P}_{12} = \begin{bmatrix} P_{12}(s) & P_{13}(s) \end{bmatrix} \quad (286)$$

$$\bar{P}_{21} = \begin{bmatrix} P_{21}(s) \\ P_{31}(s) \end{bmatrix} \quad (287)$$

$$\bar{P}_{22} = \begin{bmatrix} P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix} \quad (288)$$

A LFT fornece, a partir de 283 que

$$Z(s) = F_\ell\left(F_u(\bar{P}, \Delta), K\right) W(s) \quad (289)$$

## Controle $H_\infty$

O diagrama em blocos da figura 13 pode ser colocada na forma padrão à direita da figura 12 por simples reorganização. Para facilitar a apresentação, tomou-se apenas o caso de  $\Delta = 0$

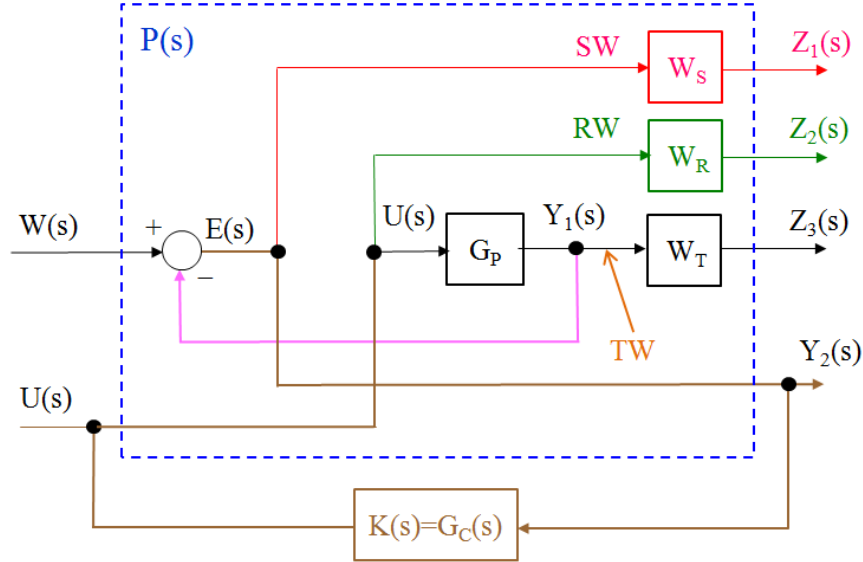


Figura 13: Estrutura de controle em malha fechada de 1 grau de liberdade

São introduzidos filtros peso  $W_S$ ,  $W_T$  e  $W_K$  para que o projetista possa adequar as especificações de desempenho.

$$z^{new} = \begin{bmatrix} W_S(s) & & \\ & W_T(s) & \\ & & W_R(s) \end{bmatrix} z^{old} \quad (290)$$

A função de transferência  $w \rightsquigarrow z$  é dada por

$$G_{wz}(s) = F_\ell(P(s), K(s)) \quad (291)$$

em que

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_S & -W_S G_P \\ 0 & W_R \\ 0 & W_T G_P \\ 1 & -G_P \end{bmatrix} \quad (292)$$

e, ainda,  $G_C(s) = K(s)$ . As condições de desempenho e de estabilidade, portanto, representadas por

$$\|G_{wz}\|_\infty = \|F_\ell(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_R R \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (293)$$

O problema de controle  $H_\infty$  é reduzido ao problema de determinar todos os controladores  $K(s)$  que estabilizam o sistema e de modo que a transferência  $w \rightsquigarrow z$  seja minimizada

$$\min_K \|F_\ell(P, K)\|_\infty \quad (294)$$

Aplicações práticas não requerem a solução ótima do problema de controle  $H_\infty$ , mas sim um  $K(s)$  de modo que

$$\|F_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (295)$$

em que  $\gamma > 0$  pode ser iterado, caso necessário, sendo que idealmente,  $\gamma = 1$ .

Um  $K(s)$  que satisfaz 295, denominado sub-ótimo, pode ser obtido com base no seguinte resultado devido a K. Glover e J.C. Doyle, 1988.

Seja  $\{A, B, C, D\}$  uma realização de

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (296)$$

particionado consistentemente

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (297)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (298)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (299)$$

Sejam as hipóteses (algumas podem ser relaxadas, mas levam a expressões mais intrincadas):

- a)  $\{A, B_2, C_2\}$  é estabilizável e detetável
- b)  $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  e  $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$
- c)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  possui colunas l.i.  $\forall \omega$
- d)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  possui linhas l.i.  $\forall \omega$
- e)  $D_{12}^T C_1 = 0$  e  $B_1 D_{21}^T = 0$
- f)  $(A, B_1)$  estabilizável e  $(A, C_1)$  detetável

Se as hipóteses a-f são satisfeitas então

$$\|F_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (300)$$

para o controlador

$$K(s) = -Z_\infty L_\infty (sI - A_\infty)^{-1} F_\infty \quad (301)$$

em que

$$Z_\infty = \left( I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty \right)^{-1} \quad (302)$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^T \quad (303)$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty \quad (304)$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \quad (305)$$

e as matrizes  $X_\infty$  e  $Y_\infty$  são obtidas da equação de Riccati

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty \left( \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X_\infty = 0 \quad (306)$$

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty \left( \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) Y_\infty = 0 \quad (307)$$

Uma demonstração para uma versão mais geral do resultado pode ser encontrada em Zhou e Doyle [14].

O controlador

$$u = Ky \quad (308)$$

$$= \left[ -Z_\infty L_\infty (sI - A_\infty)^{-1} F_\infty \right] y \quad (309)$$

pode ser separado em uma matriz de ganhos de realimentação

$$u = F_\infty \hat{x} \quad (310)$$

e um estimador de estados

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \overbrace{A\hat{x} + B_2 u - Z_\infty L_\infty (y - C_2 \hat{x})}^{\text{estimador usual}} + \gamma^{-2} \overbrace{B_1 B_1^T X_\infty \hat{x}}^{\hat{w}} \quad (311)$$

Nota-se que 311 inclui um termo adicional que representa estimativa da entrada exógena no pior caso. À medida que  $\gamma \rightarrow \infty$  o controlador  $H_\infty$  tende a ser idêntico ao  $LQG$  ( $H_2$ ).

### Ajuste de pesos

Uma forma de propor os pesos  $W_S$  é utilizar a fórmula encontrada em [12]

$$W_S(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B}{s + \omega_B A} \quad (312)$$

em que  $M \geq 1$ , tipicamente  $M = 2$  e  $A \ll 1$ , por exemplo,  $A = 10^{-3}$ . Para  $s \rightarrow 0$ ,  $W_S(s) \rightarrow \frac{1}{A}$  e para  $s \rightarrow \infty$ ,  $W_S(s) \rightarrow \frac{1}{M}$ . Portanto, para  $s = j\omega$  com valores baixos de  $\omega$ ,  $|W_S(j\omega)|$  é grande, faz com que  $|W_S(j\omega)S(j\omega)|$  seja pequeno, como se deseja. Nessas condições,

$$|W_S(j\omega)| = \left| \frac{j\frac{\omega}{M} + \omega_B}{j\omega + \omega_B A} \right| \quad (313)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{M^2} + \omega_B^2}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_B^2 A^2}} \quad (314)$$

Logo,  $\omega$  tal que  $|W_S(j\omega)| = 1$  é dado por

$$1 = \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{M^2} + \omega_B^2}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_B^2 A^2}} \quad (315)$$

$$\omega^2 + \omega_B^2 A^2 = \frac{\omega^2}{M^2} + \omega_B^2 \quad (316)$$

$$\omega^2 \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) = \omega_B^2 (1 - A^2) \quad (317)$$

$$\omega = \omega_B \sqrt{\frac{(1 - A^2) M^2}{M^2 - 1}} \quad (318)$$

Para o caso  $M = 2$  e  $A = 10^{-3}$ , tem-se que  $\omega = 1.1547\omega_B$ .

## Método LTR

O método LTR (*Loop Transfer Recovery*) consiste em projetar, inicialmente, uma função de transferência alvo que satisfaz as especificações desejadas e, posteriormente, recuperá-la através de um procedimento sistemático baseado no regulador linear-quadrático com estimador de estados. Embora apresente algumas limitações (sistemas de fase mínima e tendência a gerar controladores de ganho elevado), permite realizar importantes conexões entre os domínios do tempo e da frequência. A apresentação desta seção segue o material em Cruz, [3] e Maciejowski [9].

Assuma que a planta a ser controlada é descrita pela equação diferencial ordinária linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (319)$$

$$y = Cx \quad (320)$$

e a correspondente função de transferência é

$$G_P(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (321)$$

Uma forma de obter um controlador do tipo realimentação de estados

$$u = -Kx \quad (322)$$

é resolver o problema de minimizar o índice de desempenho quadrático

$$J[u] = \int_0^\infty \left[ y^T(t) y(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt \quad (323)$$

A solução do problema de minimizar um custo do tipo quadrático 323 sujeito a restrições lineares 319 é da forma 322, em que

$$K = R^{-1}B^T P \quad (324)$$

e  $P$  satisfaz a equação algébrica de Riccati

$$PA + A^T P + C^T C - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (325)$$

A solução do problema linear-quadrático pode ser parametrizada de forma conveniente através de

$$R = \rho I \quad (326)$$

em que  $\rho > 0$ .

Se  $G_P(s)$  for de fase mínima, então

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} P = 0 \quad (327)$$

Para a demonstração desse resultado 327 pode-se consultar Zhou et al, [15].

Lema: Se  $G_P(s)$  for de fase mínima, então

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} \sqrt{\rho} K = MC \quad (328)$$

em que  $M$  é uma matriz ortogonal (ou seja,  $M^T M = I$ ).

Substituindo-se  $R = \rho I$  em 325,

$$PA + A^T P + C^T C - PB\rho^{-1}B^T P = 0 \quad (329)$$

$$PA + A^T P + C^T C - \overbrace{PB\rho^{-1}}^{K^T} \overbrace{\rho\rho^{-1}B^T P}^K = 0 \quad (330)$$

$$PA + A^T P + C^T C - (\sqrt{\rho}K^T)(\sqrt{\rho}K) = 0 \quad (331)$$

Como  $\rho \downarrow 0^+ \Rightarrow P \downarrow 0$

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} (\sqrt{\rho}K^T)(\sqrt{\rho}K) = C^T C \quad (332)$$

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} (\sqrt{\rho}K) = MC \quad (333)$$

para algum  $M$  ortogonal.

Uma vez que o estado  $x$  não é diretamente disponível, deve-se estimá-lo a partir de  $y$  e  $u$ . Se  $L$  é o ganho do observador de estados, a estimativa  $\hat{x}$  é dada por

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (334)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (335)$$

Utilizando-se o controle

$$u = -K\hat{x} \quad (336)$$

obtém-se de 334 que

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} - BK\hat{x} - LC\hat{x} + Ly \quad (337)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (338)$$

sugerindo como controlador (e considerando a inversão de sinal entre  $y$  e  $e$ ).

$$G_C(s) = K(sI - [A - BK - LC])^{-1} L \quad (339)$$

Teorema Fundamental do Método LTR. Se  $\{A, B\}$  é controlável,  $\{A, C\}$  é observável,  $G_P(s)$  é quadrada e de fase mínima,

$$K = \rho^{-1}B^T P \quad (340)$$

em que  $\rho > 0$  e  $P$  satisfaz

$$PA + A^T P + C^T C - \frac{1}{\rho}PBB^T P = 0 \quad (341)$$

então

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} G_C(s) = [C(sI - A)^{-1} B]^{-1} C(sI - A)^{-1} L \quad (342)$$

Introduza a notação

$$\varphi = (sI - A)^{-1} \quad (343)$$

$$\psi = (sI - A + LC)^{-1} \quad (344)$$

e note que

$$G_C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L \quad (345)$$

$$= K(\psi^{-1} + BK)^{-1}L \quad (346)$$

Aplicando-se o lema de inversão de matrizes (uma prova pode ser encontrada em Kailath [7])

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (347)$$

à expressão 345, mediante a associação

$$\psi^{-1} \rightsquigarrow A \quad (348)$$

$$B \rightsquigarrow B \quad (349)$$

$$I \rightsquigarrow C \quad (350)$$

$$K \rightsquigarrow D \quad (351)$$

resulta

$$G_C(s) = K[\psi - \psi B(I + K\psi B)^{-1}K\psi]L \quad (352)$$

$$= K\psi L - K\psi B(I + K\psi B)^{-1}K\psi L \quad (353)$$

$$= [I - K\psi B(I + K\psi B)^{-1}]K\psi L \quad (354)$$

$$= (I + K\psi B)^{-1}K\psi L \quad (355)$$

$$= (\sqrt{\rho}I + \overbrace{\sqrt{\rho}K\psi B}^{\times})^{-1}\overbrace{\sqrt{\rho}K\psi L}^{\times} \quad (356)$$

Em vista do lema , os termos marcados com  $\times$  tendem a  $MC$  e, portanto

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} G_C(s) = (C\psi B)^{-1}C\psi L \quad (357)$$

A relação entre  $\psi$  e  $\varphi$  pode ser explicitada pelo lema de inversão de matrizes, fazendo-se a associação

$$sI - A \rightsquigarrow A \quad (358)$$

$$H \rightsquigarrow B \quad (359)$$

$$I \rightsquigarrow C \quad (360)$$

$$C \rightsquigarrow D \quad (361)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \psi &= (sI - A + LC)^{-1} \\ &= \overbrace{(sI - A)^{-1}}^{\varphi} - (sI - A)^{-1}L(I + C(sI - A)^{-1}L)^{-1}C(sI - A)^{-1} \\ &= \varphi - \varphi L(I + C\varphi L)^{-1}C\varphi \end{aligned} \quad (362)$$



Substituindo esta expressão de  $\psi(s)$  em 357, obtém-se

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} G_C(s) = (C\psi B)^{-1} C\psi L \quad (363)$$

$$= \left[ C\varphi B - C\varphi L (I + C\varphi L)^{-1} C\varphi B \right]^{-1} C\psi L \quad (364)$$

$$= (C\varphi B)^{-1} (I + C\varphi L) C\psi L \quad (365)$$

$$= (C\varphi B)^{-1} (I + C\varphi L) C \left( \varphi - \varphi L (I + C\varphi L)^{-1} C\varphi \right) L$$

$$= (C\varphi B)^{-1} C\varphi L \quad (366)$$

$$= \left[ C(sI - A)^{-1} B \right]^{-1} C(sI - A)^{-1} L \quad (367)$$

$$= G_P^{-1}(s) C(sI - A)^{-1} L \quad (368)$$

Segundo o teorema fundamental do método LTR (Teorema xxxxxxxxxxxxx, o controlador  $G_C(s)$  tende a cancelar a dinâmica da planta à medida que  $\rho \downarrow 0^+$  e a função de transferência total (controlador + planta) tende a

$$G_A(s) = C(sI - A)^{-1} L \quad (369)$$

que é denominada, doravante, de alvo.

O problema se reduz, portanto, a buscar uma matriz  $L$  conveniente. A busca de  $L$  pode ser tornada sistemática através da utilização de um estimador de estados especial, o filtro de Kalman.

Considere ruídos virtuais  $w(t)$  e  $v(t)$  no sistema original

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Hw \quad (370)$$

$$y = Cx + v \quad (371)$$

em que

$$E[w(t)] = 0 \quad (372)$$

$$E[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau) \quad (373)$$

$$E[v(t)] = 0 \quad (374)$$

$$E[v(t)v^T(\tau)] = V\delta(t - \tau) \quad (375)$$

$$w(t) \perp v(\tau) \quad (376)$$

As expressões para o filtro de Kalman correspondentes a 370 e 371 são

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (377)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (378)$$

em que

$$L = SC^T V^{-1} \quad (379)$$

e  $S$  satisfaz a equação algébrica de Riccati

$$AS + SA^T + HWH^T - SC^T V^{-1} CS = 0 \quad (380)$$

Identidade de Kalman: Definindo-se

$$G_V(s) = C(sI - A)^{-1}H \quad (381)$$

$$G_A(s) = C(sI - A)^{-1}L \quad (382)$$

$$= C(sI - A)^{-1}SC^TV^{-1} \quad (383)$$

tem-se que

$$[I + G_A(s)]V[I + G_A(-s)]^T = V + G_V(s)WG_V^T(-s) \quad (384)$$

De fato, a partir da equação algébrica de Riccati, tem-se

$$\begin{aligned} -AS - SA^T - HWH^T + SC^TV^{-1}CS &= 0 \\ sS - sS - AS - SA^T - HWH^T + SC^TV^{-1}CS &= 0 \\ (sI - A)S + S(-sI - A)^T - HWH^T + SC^TV^{-1}CS &= 0 \end{aligned} \quad (385)$$

Multiplicando-se 385 por  $C(sI - A)^{-1}$  pela esquerda e por  $(-sI - A^T)^{-1}C^T$  pela direita e inserindo-se convenientemente  $VV^{-1}$  ou  $V^{-1}V$ , resulta

$$VG_A^T(-s) + G_A(s)V - G_V(s)WG_V^T(-s) + G_A(s)VG_A^T(-s) = 0 \quad (386)$$

Transportando  $-G_V(s)WG_V^T(-s)$  para direita e somando  $V$  nos dois lados

$$V + VG_A^T(-s) + G_A(s)V + G_A(s)VG_A^T(-s) = V + G_V(s)WG_V^T(-s) \quad (387)$$

obtém-se o resultado desejado

$$[I + G_A(s)]V[I + G_A(-s)]^T = V + G_V(s)WG_V^T(-s) \quad (388)$$

A expressão 384 pode ser simplificada, adotando-se

$$W = I \quad (389)$$

$$V = \mu I \quad (390)$$

com  $\mu > 0$ . Neste caso, 384 se reduz a

$$[I + G_A(s)][I + G_A(-s)]^T = I + \frac{1}{\mu}G_V(s)G_V^T(-s) \quad (391)$$

e os valores singulares de  $I + G_A(s)$  podem ser obtidos de

$$[I + G_A(j\omega)][I + G_A(-j\omega)]^T = I + \frac{1}{\mu}G_V(j\omega)G_V^T(-j\omega) \quad (392)$$

$$[I + G_A(j\omega)][I + G_A(j\omega)]^* = I + \frac{1}{\mu}G_V(j\omega)G_V^*(j\omega) \quad (393)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i([I + G_A(j\omega)][I + G_A(j\omega)]^*) &= \lambda_i\left(I + \frac{1}{\mu}G_V(j\omega)G_V^*(j\omega)\right) \\ \sigma_i([I + G_A(j\omega)]) &= \sqrt{1 + \frac{1}{\mu}\sigma_i^2(G_V(j\omega))} \end{aligned} \quad (394)$$

ou seja,

$$\sigma_i([I + G_A(j\omega)]) = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu}\sigma_i^2(C(j\omega I - A)^{-1}H)} \quad (395)$$

Se  $\mu \ll 1$ , a expressão 395 fornece a fórmula

$$\sigma_i(G_A(j\omega)) \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i \left( C(j\omega I - A)^{-1} H \right) \quad (396)$$

que pode ser utilizada para o ajuste da função de transferência alvo  $G_A(s)$  através da seleção de  $\mu$  e de  $H$ .

Em vista de 394,  $G_A(j\omega)$  satisfaz também a condição

$$\underline{\sigma} \left( [I + G_A(j\omega)] \right) \geq 1 \quad (397)$$

que no caso de sistemas de uma entrada e uma saída significa que

$$|1 + G_A(j\omega)| \geq 1 \quad (398)$$

ou seja,  $G_A(j\omega)$  não intersecta o círculo de raio unitário com centro em  $(-1, 0)$ . Consequentemente,  $G_A(j\omega)$  apresenta

$$MF \in (-60^\circ, 60^\circ) \quad (399)$$

$$MG \in \left[ -\frac{1}{2}, \infty \right) \quad (400)$$

como pode ser visto na figura 14.

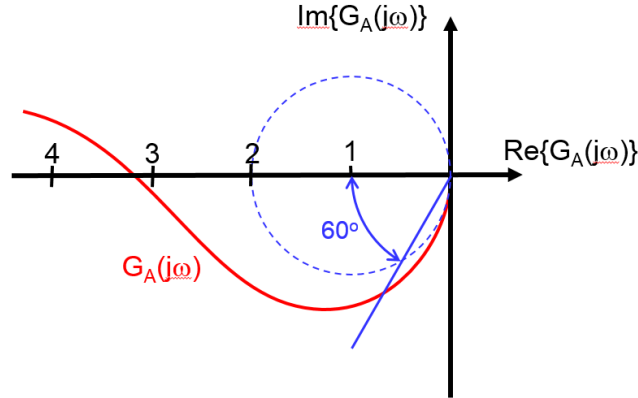


Figura 14: Margens de Ganho e Fase para um projeto LQR.

O método LTR envolve os seguintes passos principais:

Passo 1: Traduzir as especificações de estabilidade e desempenho em termos da região que pode ser ocupada por  $\underline{\sigma}(G_A(j\omega))$  e  $\bar{\sigma}(G_A(j\omega))$ .

Passo 2: Selecionar  $\mu$  e  $H$  considerando

$$\sigma_i(G_A(j\omega)) \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i \left( C(j\omega I - A)^{-1} H \right) \quad (401)$$

e a região caracterizada no passo 1. Uma tentativa inicial com  $H = B$  é interessante, pois neste caso  $G_p(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} B$  que é a planta original. Para  $\omega \rightarrow 0$  e  $A$  inversível,

$$\sigma_i(G_A(j\omega)) \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i \left( CA^{-1} H \right) \quad (402)$$

e a escolha do ganho de baixa frequência pode ficar facilitada se  $H$  for tal que  $CA^{-1}H = I$ . Para  $\omega \rightarrow \infty$ ,

$$\sigma_i(G_A(j\omega)) \simeq \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}}\sigma_i(CH) \quad (403)$$

e permite a escolha da frequência de cruzamento através do ajuste de  $\mu$ .

Passo 3: Resolver a equação algébrica de Riccati

$$AS + SA^T + HH^T - \frac{1}{\mu}SC^TCS = 0 \quad (404)$$

Passo 4: Calcular

$$L = \frac{1}{\mu}SC^T \quad (405)$$

Passo 5: Resolver a equação algébrica de Riccati

$$PA + A^TP + C^TC - \frac{1}{\rho}PBB^TP = 0 \quad (406)$$

Passo 6: Calcular

$$K = \frac{1}{\rho}B^TP \quad (407)$$

Passo 7: Calcular a função de transferência do controlador

$$G_C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L \quad (408)$$

# Bibliografia

- [1] ANTSAKLIS, P., AND MICHEL, A. *Linear Systems*. McGraw Hill, 1997.
- [2] CHEN, C. *Introduction to Linear Systems Theory*. Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [3] CRUZ, J. *Controle Robusto Multivariável*. EDUSP, SP, 1996.
- [4] DOYLE, J., FRANCIS, B., AND TANNENBAUM, A. *Feedback Control Theory*. MacMillan, 1992.
- [5] GANTMACHER, F. *Theory of Matrices*, vol. 1 and 2. Chelsea, NY, 1959.
- [6] HOUPIS, C., RASSMUSSEN, S., AND GARCIA-SANZ, M. *Quantitative Feedback Theory*. Taylor e Francis, 2006.
- [7] KAILATH, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [8] MACFARLANE, A. *Frequency Response Methods in Control Systems*. John Wiley, 1979.
- [9] MACIEJOWSKI, J. *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley, 1989.
- [10] MUNRO, N. *Modern Approaches to Control System Design*. Peter Peregrinus, 1979.
- [11] ROSENBROCK, H. *Multivariable and State-Space Theory*. Academic Press, 1974.
- [12] SKOGESTAD, S., AND POSTLETHWAITE, J. *Multivariable Feedback Control*. John Wiley, 1996.
- [13] YANIV, O. *Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [14] ZHOU, K., AND DOYLE, J. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, NJ, 1998.
- [15] ZHOU, K., DOYLE, J., AND GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.