

Linear Matrix Inequalities

Em publicações recentes, uma tema que tem recebido destaque na comunidade de Sistemas e Controle é o de Desigualdades Matriciais Lineares - LMI - Linear Matrix Inequalities. Assim, é oportuno que se apresente aqui um pequeno resumo sobre esse tema. Um excelente texto de referência é o livro [1]. Aplicações específicas em Sistemas e Controle podem ser vistas em [2].

1. Definição: Um conjunto Ω é dito convexo se $\forall p_1, p_2 \in \Omega$ e $\lambda \in [0, 1] \subset R$,

$$p = \lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2 \in \Omega \quad (1)$$

2. Observação: Se $p_i \in \Omega$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, N$ de modo que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (2)$$

então

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_N p_N \in \Omega \quad (3)$$

3. Definição: Uma função $f : \Omega \rightarrow R$ é dita convexa se $\forall p_1, p_2 \in \Omega$ e $\lambda \in [0, 1] \subset R$,

$$f(p) \leq \lambda f(p_1) + (1 - \lambda) f(p_2) \quad (4)$$

e estritamente convexa se a desigualdade é estrita ($<$).

4. Problema de Otimização Convexa (POC): Dada uma função convexa f e um conjunto convexo Ω , o problema é obter p^* tal que

$$\begin{aligned} f(p^*) &= \min_{p \in \Omega} f(p) \\ p^* &= \arg \{ \min f(p); p \in \Omega \} \end{aligned} \quad (5)$$

5. Teorema: Se p^* é um ponto de ótimo local para um POC, então p^* é um ponto de ótimo global para esse POC. Se a função f for estritamente convexa, então p^* é único.

6. Definição: Uma função $f : R^n \rightarrow R$ é dita ser afim se possuir a forma especial

$$\begin{aligned} f(p) &= [\gamma_0 \quad \gamma]^T \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \dots + \gamma_n p_n \end{aligned} \quad (6)$$

em que γ_0 e $\gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_n]$ são constantes (ou seja, $\gamma_i, i = 0, 1, \dots, n$ são constantes). Caso o domínio seja o conjunto de matrizes $\Omega = \{P \in R^{n \times m}\}$, a função $F : R^{n \times m} \rightarrow R^{p \times q}$, é da forma

$$F(P) = F_0 + p_{11} F_1 + \dots + p_{nm} F_{nm} \quad (7)$$

em que p_{ii} são os elementos de P .

7. Lema: Se $F : R^{n \times m} \rightarrow R^{r \times r}$ é afim, então o conjunto

$$\Omega = \{P \in R^{n \times m} | F(P) \geq 0\} \quad (8)$$

é convexo. De fato, seja $\Omega = \{P | F(P) \geq 0\}$ e tome-se P_1 e $P_2 \in \Omega$. Para $\lambda \in [0, 1] \subset R$, considere

$$P = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2 \quad (9)$$

e note que

$$\begin{aligned} F(P) &= F(\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2) \\ &= \lambda F(P_1) + (1 - \lambda) F(P_2) \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

levando-se em consideração que $F_0 = \lambda F_0 + (1 - \lambda) F_0$.

Logo, $P \in \Omega$ e, portanto, Ω é convexo. Em particular, o conjunto de $P \in R^{n \times m}$ tal que $F(P) \in \{M \in R^{r \times r} | M = M^T\}$ também é convexo.

8. Definição: Uma expressão do tipo $F(P) \geq 0$ é chamada de LMI. No caso particular $F : R^n \rightarrow R^{r \times r}$, tem-se

$$F(p) = F_0 + p_1 F_1 + \dots + p_n F_n \quad (11)$$

em que F_i são matrizes $r \times r$.

9. Exemplo 1: Considere a LMI

$$1p_2 - 1p_1 > 0 \quad (12)$$

O auto-valor é obtido fazendo-se

$$\det(\lambda - [1p_2 - 1p_1]) = 0 \quad (13)$$

que leva a

$$\lambda = p_2 - p_1 \quad (14)$$

Portanto,

$$\lambda > 0 \iff p_2 > p_1 \quad (15)$$

e a região que satisfaz 12 encontra-se ilustrada à esquerda da figura 1.

10. Exemplo 2: Considere a LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_2 > 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

O auto-valor é obtido fazendo-se

$$\det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (18)$$

que leva a

$$0 = \lambda^2 - (1 + p_2)\lambda + p_2 - p_1^2 \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{(1 + p_2) \pm \sqrt{(1 + p_2)^2 - 4p_2 + 4p_1^2}}{2}$$

Portanto,

$$\lambda > 0 \iff p_2 > p_1^2 \quad (20)$$

e a região que satisfaz 17 encontra-se ilustrada no centro da figura 1.

Esta conclusão poderia ter sido obtida de forma imediata utilizando-se o complemento de Schur, apresentado mais adiante:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} > 0 &\iff Z - YX^{-1}Y^T > 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} > 0 &\iff 1 - p_1^2 p_2^{-1} > 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ou $1 > p_1^2 p_2^{-1} \rightarrow p_2 > p_1^2$ em vista de $p_2 > 0$.

11. Exemplo 3: Considere a LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

O auto-valor é obtido fazendo-se

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (23)$$

que leva a

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - 1)^3 - (\lambda - 1)p_2^2 - (\lambda - 1)p_1^2 \\ 0 &= (\lambda - 1) \left[(\lambda - 1)^2 - p_2^2 - p_1^2 \right] \\ \lambda &= \frac{(1 + p_2) \pm \sqrt{(1 + p_2)^2 - 4p_2 + 4p_1^2}}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

Portanto, um dos autovalores é $1 > 0$ e os outros são obtidos resolvendo-se

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)^2 - p_2^2 - p_1^2 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 - p_2^2 - p_1^2 &= 0 \\ \lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4p_2^2 + 4p_1^2}}{2} \\ \lambda &= 1 \pm \sqrt{p_2^2 + p_1^2} \end{aligned} \quad (25)$$

Para se ter $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{p_2^2 + p_1^2} &< 1 \\ p_2^2 + p_1^2 &< 1 \end{aligned} \quad (26)$$

e a região que satisfaz 22 encontra-se ilustrada à direita da figura 1. 12. Observação: Pela

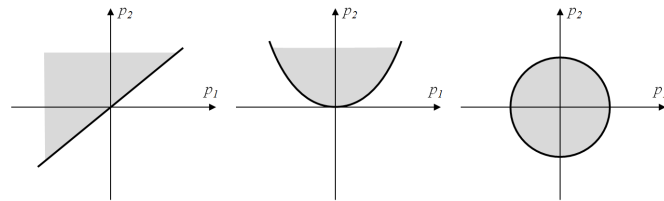


Figura 1: As regiões descritas pelas LMI dos exemplos 1, 2 e 3.

equação 8, uma LMI define um conjunto convexo no domínio de F .

13. Observação: Um sistema com vários LMIs é também uma LMI:

$$F_1(P) \geq 0; F_2(P) \geq 0; \dots; F_k(P) \geq 0 \iff$$

$$F(P) = \begin{bmatrix} F_1(P) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(P) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(P) \end{bmatrix} > 0 \quad (27)$$

14. Exemplo de aplicação: Verificação de Estabilidade Assintótica
Considere um sistema descrito por

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (28)$$

em que $A \in R^{n \times n}$. Seja $V(x)$ da forma

$$V(x) = x^T P x \quad (29)$$

que pode ser considerada função candidata de Lyapunov se $P > 0$. Como

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T (A^T P + P A) x \quad (30)$$

a origem ($x = 0$) será assintoticamente estável se $\exists P \in R^{n \times n}$, $P^T = P$ e tal que

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A^T P + P A &< 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Em notação mais compacta

$$F(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -(A^T P + P A) \end{bmatrix} > 0 \quad (32)$$

Portanto, o estudo da estabilidade assintótica foi convertida em um problema de verificação da viabilidade da LMI

$$F(P) > 0 \quad (33)$$

15. Exemplo de aplicação: Verificação de Estabilizabilidade
Considere um sistema descrito por

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (34)$$

em que $A \in R^{n \times n}$ e $B \in R^{n \times m}$. Assuma que se deseja obter uma matriz de realimentação de estados K , tal que a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ torna a origem estável. Analogamente ao caso anterior, pode-se utilizar a função 29 para o novo sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (35)$$

$$= Ax + BKx \quad (36)$$

$$= (A + BK)x \quad (37)$$

que resulta na condição

$$P > 0 \quad (38)$$

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \quad (39)$$

Constata-se, porém, que tanto K como P são incógnitas, de modo que 39 não é LMI por envolver o produto $K^T P$. Para contornar o problema, note que se impõe $P > 0$ (não-singular) e, portanto, é permitido pré e pós multiplicar a segunda desigualdade, obtendo-se

$$\begin{aligned} P^{-1} \left[(A + BK)^T P + P(A + BK) \right] P^{-1} &< 0 \\ P^{-1} A^T + P^{-1} K^T B^T + A P^{-1} + B K P^{-1} &< 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Chamando $Q = P^{-1}$ e $M = K P^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} P > 0 &\iff Q > 0 \\ A Q + Q A^T + B M + M^T B^T &< 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Caso seja possível obter Q e M que satisfaz

$$F(Q, M) = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & -(A^T Q + Q A + B M + M^T B^T) \end{bmatrix} > 0 \quad (42)$$

a matriz de ganhos de realimentação de estados é dada por

$$K = M Q^{-1} \quad (43)$$

16. Teorema (Complemento de Schur): São equivalentes:

- $X > 0$ e $Z - Y X^{-1} Y^T \geq 0$
- $X > 0$ e $\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \geq 0$

Uma vez que X é inversível, considere a matriz M não singular dada por

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ W X^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ver o resto da demo no arquivo shur-comp

$$\begin{aligned} M^T \begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} M &= \begin{bmatrix} I & Y X^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^{-1} Y^T & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & Y X^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z - Y X^{-1} Y^T & Y \\ 0 & X \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Z - Y X^{-1} Y^T & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

17. Otimização semi-definida (OSD): é o problema de obter a solução $P^* \in R^{n \times m}$ que minimiza $L : R^{n \times m} \rightarrow R$, $L(P)$ linear em P , ou seja,

$$\min_P L(P) \quad (46)$$

sujeito a

$$F(P) = F_0 + p_{11}F_{11} + \dots + p_{1m}F_{1m} + \dots + p_{n1}F_{11} + \dots + p_{nm}F_{nm} \quad (47)$$

18. Limitante para a função custo: Considere o sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu ; x(0) = x_0 \quad (48)$$

com A estável e $Q = Q^T > 0$. Se P é tal que

$$\begin{aligned} P &\geq 0 \\ A^T P + PA + Q &\leq 0 \end{aligned} \quad (49)$$

então, pode-se verificar que

$$\int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt \leq x_0^T P x_0 \quad (50)$$

Portanto, o melhor limite para a função custo é obtido resolvendo-se a OSD:

$$\min x_0^T P x_0 \quad (51)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} P &\geq 0 \\ A^T P + PA + Q &\leq 0 \end{aligned} \quad (52)$$

19. Exemplo (Problema LQR): Defina-se uma função de custo

$$J[x, u] = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (53)$$

e considere o problema de controle ótimo

$$\min J[x, u] \quad (54)$$

sujeito às restrições de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu ; x(0) = x_0 \quad (55)$$

Sabe-se que a solução para este problema é da forma

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (56)$$

com P obtido como solução da equação algébrica de Riccati,

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (57)$$

O termo $PBR^{-1}B^T P$ é do tipo quadrático, mas pode ser colocado em forma conveniente para utilização de técnicas LMI mediante utilização do Complemento de Schur:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = \underbrace{(A^T P + PA + Q)}_Z - \underbrace{(PB)}_Y \underbrace{(R^{-1})}_{X^{-1}} \underbrace{(B^T P)}_{Y^T} \quad (58)$$

levando ao LMI

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} \quad (59)$$

Portanto, o problema a ser resolvido é

$$\min x_0^T P x_0 \quad (60)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0 \quad (61)$$

20. Estabilidade Robusta: Considere o sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax ; A \in co\{A_1, \dots, A_N\} \quad (62)$$

ou seja

$$A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \quad (63)$$

em que $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$.

Considere a função $V(x) = x^T P x$ e note que se for possível obter $P = P^T > 0$ que satisfaz

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T (A^T P + PA) x < 0 ; \forall x \neq 0 \quad (64)$$

o sistema é estável. A expressão em 64 pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} x^T (A^T P + PA) x &= x^T \left[\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right)^T P + P \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) \right] x ; \forall x \neq 0 \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0 ; \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (65)$$

em vista de 63. Logo, o sistema será estável se for possível obter $P = P^T > 0$ tal que

$$A_i^T P + P A_i < 0 ; i = 1, \dots, N \quad (66)$$

21. Limitação do máximo valor singular. Seja $A(p)$ uma matriz que depende de um parâmetro p na forma $A(p) = A_0 + A_1 p$. A desigualdade $\bar{\sigma}(A(p)) < 1$ pode ser colocada na forma de LMI

$$\bar{\sigma}(A(p)) < 1 \iff A(p)A^T(p) < I \iff I - A(p)A^T(p) > 0 \quad (67)$$

Novamente, utilizando o Complemento de Schur

$$\begin{aligned} Z - YX^{-1}Y^T \geq 0 &\iff \begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ I - A(p)I^{-1}A^T(p) &\iff \begin{bmatrix} I & A(p) \\ A^T(p) & I \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (68)$$

22. Desigualdade elipsoidal: A desigualdade que restringe $p \in R^n$ em uma região elipsoidal é da forma

$$p^T Q p \leq 1 ; Q = Q^T > 0 \quad (69)$$

ou seja

$$1 - p^T Q p \geq 0 \quad (70)$$

Analogamente ao caso anterior

$$\begin{aligned} Z - Y X^{-1} Y^T \geq 0 &\iff \begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ 1 - p^T Q p &\iff \begin{bmatrix} 1 & p^T \\ p & Q \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (71)$$

23. Lema (Kalman-Yakubovich-Popov) Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a função de transferência do sistema na representação de estados mínima

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (72)$$

$$y = Cx + Du \quad (73)$$

Então, são equivalentes:

- A é Hurwitz e $\|G\|_\infty < \gamma$
- $\exists P > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & C^T D + PB \\ D^T C + B^T P & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (74)$$

24. Exemplo: Cálculo de $\|G\|_\infty$ de sistemas SISO com $D = 0$. Denotando-se por $\mu = \gamma^2$,

$$\|G\|_\infty = \min \mu \quad (75)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ \mu &> 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB \\ B^T P & -\mu \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (76)$$

25. Sistemas passivos: Um sistema com A estável e na representação mínima

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (77)$$

$$y = Cx + Du \quad (78)$$

é dito ser passivo se

$$\int_0^T u^T(t)y(t)dt \geq 0 ; \forall u(\cdot) , \forall T \geq 0 , x(0) = 0 \quad (79)$$

O sistema 77 é passivo se $\exists P = P^T > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -(D^T + D) \end{bmatrix} < 0 \quad (80)$$

26. Observação: A passividade é equivalente ao fato de $G(s)$ ser positivo real

$$G^*(s) + G(s) \geq 0, \forall \text{Re}\{s\} > 0 \quad (81)$$

27. Norma H_2 : Considere um sistema com A estável e na representação mínima

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (82)$$

$$y = Cx + Du \quad (83)$$

com a correspondente função de transferência dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (84)$$

em que se assume $\|G\|_2 < \infty$ se $D = 0$. Então

$$\|G\|_2 < \gamma \quad (85)$$

se e somente se $\exists P = P^T > 0$ e Q , tais que

$$\begin{aligned} \text{Trace}(Q) &< \gamma^2 \\ \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Q \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Pode-se verificar, inicialmente, que

$$\|G\|_2 < \gamma \iff \text{Trace}(CWC^T) < \gamma^2 \quad (87)$$

em que W é o gramiano de controlabilidade, dado por

$$W = \int_0^\infty \exp(At)BB^T \exp(A^T t)dt \quad (88)$$

e que, por sua vez, corresponde à solução da equação

$$AW + WA^T + BB^T = 0 \quad (89)$$

Lembrando que a resposta impulso é dada por

$$g(t) = y(t)|_{u(t)=\delta(t)} = C \exp(At)B \quad (90)$$

a expressão 88 se torna

$$\begin{aligned} CWC^T &= \int_0^\infty C \exp(At)BB^T \exp(A^T t)C^T dt \\ &= \int_0^\infty g^T(t)g(t)dt \end{aligned} \quad (91)$$

forneendo

$$\text{Trace} \left(CW C^T \right) = \int_0^\infty \text{Trace} \left[g^T(t) g(t) \right] dt \quad (92)$$

Em vista do Teorema de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Trace} \left[G^*(j\omega) G(j\omega) \right] d\omega = \int_0^\infty \text{Trace} \left[g^T(t) g(t) \right] dt \quad (93)$$

e pela definição de $\|G\|_2$ e $\|g\|_2$

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Trace} \left[G^*(-j\omega) G(-j\omega) \right] d\omega} \\ \|g\|_2 &= \sqrt{\int_0^\infty \text{Trace} \left[g^T(t) g(t) \right] dt} \end{aligned} \quad (94)$$

a equivalência 87 é estabelecida.

Agora, combinando 87 e 89, o problema consiste em buscar P , tal que

$$\begin{aligned} \text{Trace} \left(CW C^T \right) &< \gamma^2 \\ AW + WA^T + BB^T &< 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Uma vez que a representação é mínima, W é inversível e pode-se fazer

$$\begin{aligned} P &= W^{-1} \\ P \left(AW + WA^T + BB^T \right) P &< 0 \\ W^{-1} \left(AW + WA^T + BB^T \right) W^{-1} &< 0 \\ PA + A^T P + PBB^T P &< 0 \end{aligned} \quad (96)$$

de modo que o novo problema é obter $P > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \text{Trace} (Q) &< \gamma^2 \\ CP^{-1}C^T &< Q \\ A^T P + PA + PBB^T P &< 0 \end{aligned}$$

ou, novamente invocando o complemento de Schur,

$$\begin{aligned} \text{Trace} (Q) &< \gamma^2 \\ \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Q \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (97)$$

28. Formula útil: Como

$$\text{Trace}(MN) = \text{Trace}(NM) \quad (98)$$

se $P = V^{-1}\Lambda V$, em que Λ é diagonal, tem-se em vista de 98 que

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(P) &= \text{Trace}(V^{-1}\Lambda V) \\
 &= \text{Trace}(\Lambda V V^{-1}) \\
 &= \text{Trace}(\Lambda) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i
 \end{aligned} \tag{99}$$

Bibliografia

- [1] BOYD, S., GHAOUI, L., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [2] DUAN, G., AND YU, H. *LMI's in Control Systems*. CRC Press, 2013.