

Sistemas Não-Lineares

Linearização Harmônica

A resposta a uma excitação senoidal de um sistema não-linear, mesmo sem dinâmica, não é necessariamente do tipo senoidal. Entretanto, esta resposta pode ser descrita como uma soma de senoides através da série de Fourier. Caso esta resposta seja filtrada por um sistema linear conectado em cascata de modo que prevaleça apenas a primeira harmônica, ter-se-ia uma saída senoidal para uma entrada senoidal. Nestas condições o sistema não-linear em cascata com um filtro linear apresentaria um comportamento do tipo linear, em que a saída correspondente a uma entrada senoidal é novamente do tipo senoidal. Uma aproximação interessante é, portanto, assumir que entre o sistema não-linear e o filtro linear é relevante considerar apenas a primeira harmônica do sinal ali presente [5], [2], [7], [1]. A relação entre esta primeira harmônica e a excitação de entrada é denominada de ganho equivalente.

Considere um relé ideal caracterizado por

$$u(t) = M \operatorname{sign} [e(t)] \quad (1)$$

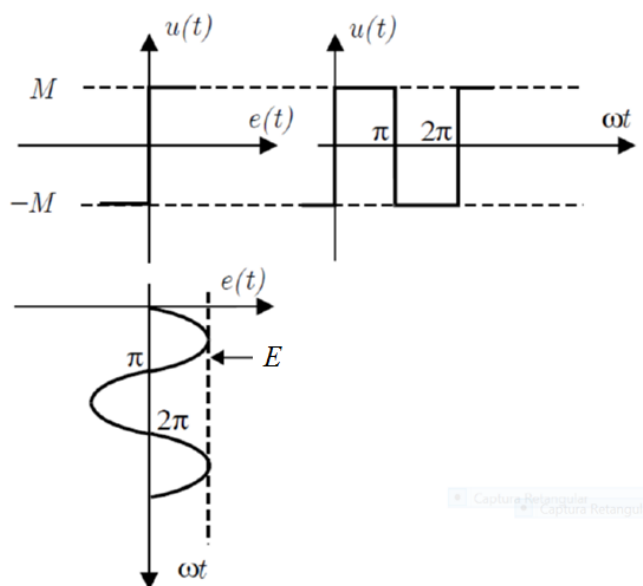


Figura 1: Relé ideal, sem histerese (memória)

No caso de uma excitação senoidal

$$e(t) = E \operatorname{sen} (\omega t) \quad (2)$$

a saída do relé é dada por

$$u(t) = \begin{cases} M & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}) \\ -M & t \in [\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}) \end{cases} \quad (3)$$

e pode ser representado pela expansão em série de Fourier

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sin(n\omega t) \quad (4)$$

em que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (6)$$

Para o exemplo particular,

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (7)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (8)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \sin(\omega t) \Big|_0^{\pi} \quad (9)$$

$$= \frac{2M}{\pi} (\sin(\pi) - \sin(0)) \quad (10)$$

$$= 0 \quad (11)$$

e

$$b_1 = 0 \quad (12)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (13)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (14)$$

$$= -\frac{2M}{\pi} \cos(\omega t) \Big|_0^{\pi} \quad (15)$$

$$= -\frac{2M}{\pi} (\cos(\pi) - \cos(0)) \quad (16)$$

$$= -\frac{2M}{\pi} (-2) \quad (17)$$

$$= \frac{4M}{\pi} \quad (18)$$

de modo que a saída aproximada é, em termos da primeira harmônica,

$$u(t) = \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t) \quad (19)$$

e o ganho equivalente é

$$N(E) = \frac{\text{amplitude}\{u(t)\}}{\text{amplitude}\{e(t)\}} \quad (20)$$

$$= \frac{4M}{\pi E} \quad (21)$$

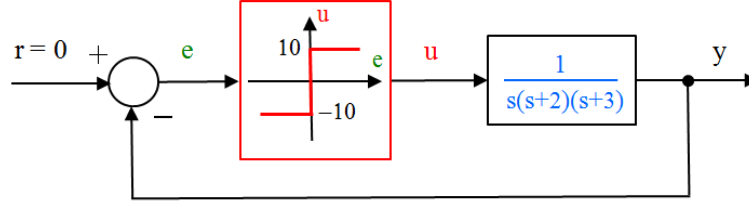


Figura 2: Exemplo de um oscilador utilizando relé.

Exemplo: Considere o sistema em malha fechada ilustrado na figura 2. O problema consiste em determinar a amplitude e a frequência de oscilação, caso esse exista. Substituindo-se o bloco não linear por um ganho equivalente $N(E)$, nota-se que se houver oscilação, então um par de polos complexos conjugados deve anular o polinômio característico

$$1 + N(E)G(s) = 0 \quad (22)$$

No caso específico,

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (23)$$

e

$$N(E) = \frac{4M}{\pi E} \quad (24)$$

Substituindo-se a expressão de $G(s)$ na equação 22 tem-se que

$$1 + N(E) \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = 0 \quad (25)$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + N(E) = 0 \quad (26)$$

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + N(E) = 0 \quad (27)$$

ou, igualando as partes reais e imaginárias a 0,

$$N(E) - 3\omega^2 = 0 \quad (28)$$

$$-\omega^3 + 2\omega = 0 \quad (29)$$

Resolvendo-se o sistema de equações que foi obtido, $\omega = \sqrt{2}$ e $N(E) = 3(\sqrt{2})^2 = 6$. Uma vez que

$$\frac{4M}{\pi E} = \frac{4 \times 10}{\pi \times E} = 6 \quad (30)$$

obtém-se a amplitude $E = 2.12$.

Quando a função não linear apresenta memória, como é o caso de relés com histerese e folgas de engrenagem, a saída u conterá componentes tanto em *sin* quanto em *cos* para uma entrada puramente *sin*. Para demonstrar esse conceito, considere o relé com histerese da figura 3 caracterizado por

$$u(t) = \begin{cases} +M & e(t) > h \\ -M & e(t) < h \\ u(t^-) & -h \leq e(t) \leq +h \end{cases} \quad (31)$$

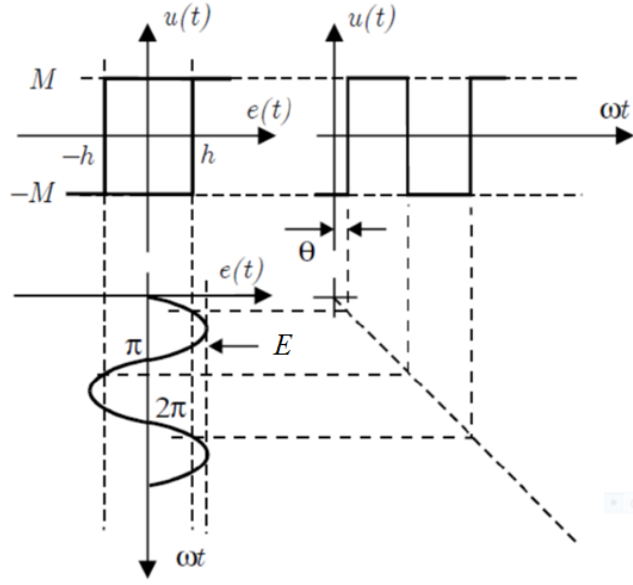


Figura 3: Relé com histerese (possui memória).

No caso de uma excitação senoidal

$$e(t) = E \sin(\omega t) \quad (32)$$

os coeficientes da primeira harmônica são

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (33)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\theta [-M] \cos(\omega t) d(\omega t) + \int_\theta^\pi [M] \cos(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (34)$$

$$= -\frac{4M}{\pi} \sin(\theta) \quad (35)$$

e

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (36)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\theta [-M] \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_\theta^\pi [M] \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (37)$$

$$= \frac{4M}{\pi} \cos(\theta) \quad (38)$$

em que

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{h}{E} \right) \quad (39)$$

Logo, o sinal $u(t)$ é aproximado por

$$u(t) = -\frac{4M}{\pi} \sin(\theta) \cos(\omega t) + \frac{4M}{\pi} \cos(\theta) \sin(\omega t) \quad (40)$$

$$= \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t - \theta) \quad (41)$$

Uma vez que a resposta aproximada $u(t)$ apresentada em 41 é senoidal de frequência ω , igual à frequência do sinal $e(t)$ de entrada, porém atrasado de $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{E}\right)$, a função descritiva é

$$N(E) = \frac{\text{amplitude}\{u(t)\}}{\text{amplitude}\{e(t)\}} e^{-j\theta} \quad (42)$$

$$= \frac{4M}{\pi E} e^{-j \sin^{-1}\left(\frac{h}{E}\right)} \quad (43)$$

$$= \frac{4M}{\pi E} \left[\cos\left(-\sin^{-1}\left(\frac{h}{E}\right)\right) + j \sin\left(-\sin^{-1}\left(\frac{h}{E}\right)\right) \right] \quad (44)$$

$$= \frac{4M}{\pi E} \left[\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{h}{E}\right)\right) + j \sin\left(-\sin^{-1}\left(\frac{h}{E}\right)\right) \right] \quad (45)$$

$$= \frac{4M}{\pi E} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{E}\right)^2} - j \frac{h}{E} \right] \quad (46)$$

Para utilizar a expressão 46, é interessante que se disponha da fórmula para $N(E)^{-1}$

$$-\frac{1}{N(E)} = -\frac{\pi E}{4M} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{E}\right)^2} + j \frac{h}{E} \right] \quad (47)$$

$$= -\frac{\pi}{4M} \left[\sqrt{E^2 - h^2} + jh \right] \quad (48)$$

de modo que a parte imaginária é

$$\text{Im} \left\{ -\frac{1}{N(E)} \right\} = -\frac{\pi h}{4M} \quad (49)$$

Exemplo: Considere o sistema cujo diagrama em blocos é visto na figura 4. O problema consiste em determinar a amplitude e a frequência de oscilação, caso esse exista.

Em vista da presença de memória na linearidade considerada, a função descritiva é complexa. A condição de oscilação é caracterizada por

$$-\frac{1}{N(E)} = G(j\omega)$$

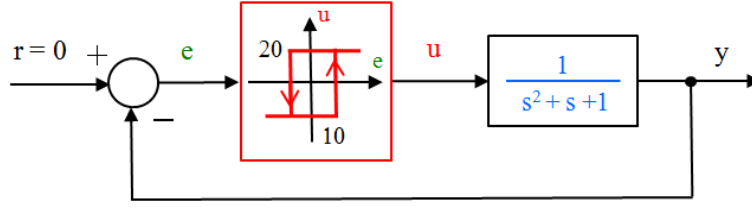


Figura 4: Exemplo de oscilador utilizando relé com histerese.

ou

$$-\frac{\pi}{4M} \left[\sqrt{E^2 - h^2} + jh \right] = \frac{1}{s^2 + s + 1} \Big|_{s=j\omega} \quad (50)$$

$$-\frac{\pi}{4M} \left[\sqrt{E^2 - h^2} + jh \right] = \frac{1}{(1 - \omega^2) + j\omega} \quad (51)$$

$$-\frac{\pi}{4M} \sqrt{E^2 - h^2} - j\frac{\pi h}{4M} = \frac{1}{(1 - \omega^2) + j\omega} \quad (52)$$

$$-\frac{\pi}{4M} \sqrt{E^2 - h^2} - j\frac{\pi h}{4M} = \frac{(1 - \omega^2) - j\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \quad (53)$$

Igualando as partes reais e as partes imaginárias, tem-se

$$\frac{\pi h}{4M} = \frac{-\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \quad (54)$$

e

$$-\frac{\pi}{4M} \sqrt{E^2 - h^2} = \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \quad (55)$$

No exemplo em questão,

$$\frac{-\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} = \frac{\pi \times 10}{4 \times 20} \approx 0.393 \quad (56)$$

que leva a $\omega \approx 1.5 \text{ rd/s}$. Logo,

$$-\frac{\pi}{4M} \sqrt{E^2 - h^2} = \frac{1 - 0.393^2}{(1 - 0.393^2)^2 + 0.393^2} = -0.328 \quad (57)$$

que, para $h = 10$ e $M = 20$, produz $E \approx 13.0$.

Em casos mais complicados, pode-se fazer uso de uma solução gráfica. Na figura 5 pode-se observar o mesmo resultado $\omega \approx 1.5$ e $E \approx 13.0$

Estabilidade de Oscilações

Suponha que o método da primeira harmônica indica que um sistema pode apresentar oscilações com amplitude E e frequência ω . Uma questão relevante para aplicações práticas é se a oscilação

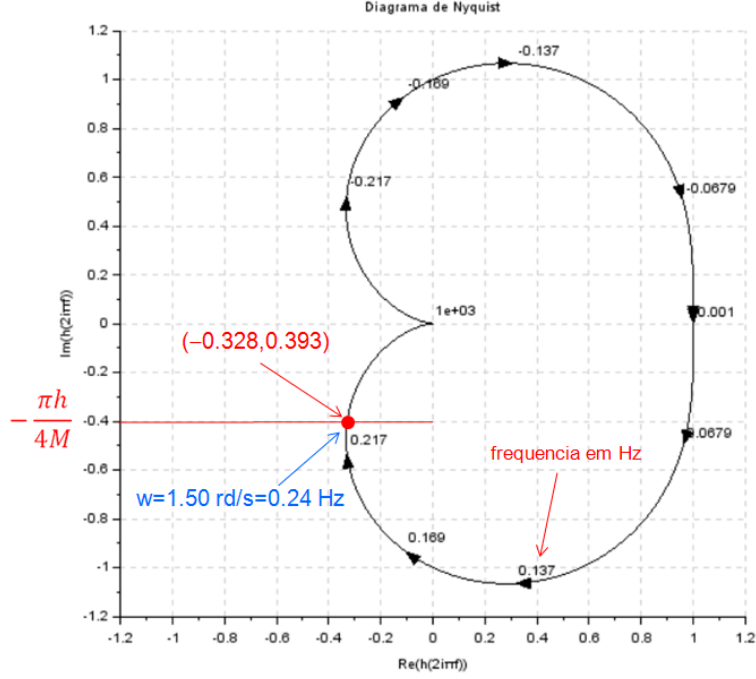


Figura 5: Solução gráfica

é estável, ou seja, quando E ou ω sofre perturbação, o sistema retorna espontâneamente à condição anterior.

Se a saída de um oscilador é

$$e(t) = E \sin(\omega t) \quad (58)$$

deseja-se verificar se após uma perturbação que alterou a amplitude e a freqüência para $E + \Delta E$ e $\omega + \Delta\omega$

$$e(t) = \sin[(\omega + \Delta\omega)t] e^{-\eta t} \quad (59)$$

o decaimento η é tal que

$$\Delta E > 0 \Rightarrow \eta > 0 \quad (60)$$

$$\Delta E < 0 \Rightarrow \eta < 0 \quad (61)$$

A condição de oscilação

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(E)} \quad (62)$$

pode ser reescrita agrupando-se os termos reais e complexos

$$A(E, \omega) + jB(E, \omega) = 0 \quad (63)$$

Notando-se que a expressão 59 pode ser reescrita como

$$e(t) = (E + \Delta E) \operatorname{Im} \left\{ e^{j(\omega + \Delta\omega)t} \right\} e^{-\eta t} \quad (64)$$

$$= (E + \Delta E) \operatorname{Im} \left\{ e^{j(\omega + \Delta\omega + j\eta)t} \right\} \quad (65)$$

a condição 63 se torna

$$A(E + \Delta E, \omega + \Delta\omega + j\eta) + jB(E + \Delta E, \omega + \Delta\omega + j\eta) = 0 \quad (66)$$

A análise local é feita expandindo-se A e B em série de Taylor

$$\overbrace{A(E, \omega)}^{\times} + \frac{\partial A}{\partial E}(E, \omega) \Delta E + \frac{\partial A}{\partial \omega} E (\Delta\omega + j\eta) \quad (67)$$

$$+ \overbrace{jB(E, \omega)}^{\times} + j \frac{\partial B}{\partial E}(E, \omega) \Delta E + j \frac{\partial B}{\partial \omega}(E, \omega) (\Delta\omega + j\eta) = 0 \quad (68)$$

em que os termos marcados com \times se anulam em vista de 63.

Igualando-se as partes real e imaginário a zero, tem-se o sistema

$$\frac{\partial A}{\partial E}(E, \omega) \Delta E + \frac{\partial A}{\partial \omega}(E, \omega) \Delta\omega - \frac{\partial B}{\partial \omega}(E, \omega) \eta = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \omega}(E, \omega_0) \eta + \frac{\partial B}{\partial E}(E, \omega) \Delta E + \frac{\partial B}{\partial \omega}(E, \omega) \Delta\omega = 0 \quad (70)$$

em que $\Delta\omega$ pode ser eliminado, levando a

$$\overbrace{\left\{ \left[\frac{\partial A}{\partial \omega}(E, \omega) \right]^2 + \left[\frac{\partial B}{\partial \omega}(E, \omega) \right]^2 \right\}}^{\geq 0} \eta = \left[\frac{\partial B}{\partial \omega}(E, \omega) \frac{\partial A}{\partial E}(E, \omega) - \frac{\partial A}{\partial \omega}(E, \omega) \frac{\partial B}{\partial E}(E, \omega) \right] \Delta E \quad (71)$$

A condição 61 e a equação 71 permitem escrever a condição de Loeb para estabilidade de oscilações

$$\left[\frac{\partial B}{\partial \omega}(E, \omega) \frac{\partial A}{\partial E}(E, \omega) - \frac{\partial A}{\partial \omega}(E, \omega) \frac{\partial B}{\partial E}(E, \omega) \right] > 0 \quad (72)$$

Backstepping

Antes de se apresentar o caso geral, é interessante que se examine um exemplo particular. Nesse contexto, considere, inicialmente, o sistema

$$\dot{x} = x^3 q(x) \quad (73)$$

em que $x \in R$ e note que a função candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{x^2}{2} \quad (74)$$

permite concluir estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio 0, para

$$q(x) = -x^2 \quad (75)$$

uma vez que

$$\dot{V} = x \dot{x} \quad (76)$$

$$= x^4 q \quad (77)$$

$$= -x^6 \leq 0 \quad (78)$$

Seja, agora, o sistema

$$\dot{x}_1 = x_1^3 x_2 \quad (79)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (80)$$

e considere o problema de obter $u(x_1, x_2)$ de modo que se obtenha estabilidade assintótica da origem. Note que, se

$$x_2 = -x_1^2 \quad (81)$$

recair-se-ia no caso anterior representado pelas equações 73 e 75.

Portanto, tentar-se-á obter u de modo que $x_2 \rightarrow q(x_1)$, ou seja, no caso específico que está sendo tratado $x_2 \rightarrow -x_1^2$ (notar que x_1 em 79 está no lugar de x em 73), de modo que é conveniente definir

$$e = x_2 - q(x_1) \quad (82)$$

ou

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \dot{q} \quad (83)$$

$$= u - \dot{q} \quad (84)$$

Por outro lado, de 79

$$\dot{x}_1 = x_1^3 x_2 \quad (85)$$

$$= x_1^3 (e + q) \quad (86)$$

de modo que se obtém o sistema de equações

$$\dot{x}_1 = x_1^3 (e + q) \quad (87)$$

$$\dot{e} = u - \dot{q} \quad (88)$$

Para se estudar a estabilidade da origem de 87+88, tome-se a função candidata de Lyapunov

$$V_a = V(x_1) + \frac{e^2}{2} \quad (89)$$

em que V é o mesmo definido anteriormente, ou seja,

$$V_a = \frac{x_1^2}{2} + \frac{e^2}{2} \quad (90)$$

Derivando-se 90 em t , resulta que

$$\dot{V}_a = x_1 \dot{x}_1 + e \dot{e} \quad (91)$$

$$= x_1 \left[x_1^3 (e + q) \right] + e \left(u - \dot{q} \right) \quad (92)$$

$$= x_1^4 e + x_1^4 q + e u - e \dot{q} \quad (93)$$

$$= x_1^4 q + \left(x_1^4 + u - \dot{q} \right) e \quad (94)$$

$$= x_1^4 \left(-x_1^2 \right) + \left(x_1^4 + u - \dot{q} \right) e \quad (95)$$

$$= -x_1^6 + \left(x_1^4 + u - \dot{q} \right) e \quad (96)$$

O termo $-x_1^6$ é da mesma forma da $-x^6 \leq 0$ da etapa anterior. Para tornar $\left(x_1^4 + u - \dot{q} \right) e \leq 0$, tome-se

$$u = -e - x_1^4 + \dot{q} \quad (97)$$

que leva a

$$\left(x_1^4 + u - \dot{q} \right) e = \left(x_1^4 - e - x_1^4 + \dot{q} - \dot{q} \right) e \quad (98)$$

$$= -e^2 \leq 0 \quad (99)$$

Portanto,

$$\dot{V}_a = -x_1^6 + \left(x_1^4 + u - \dot{q} \right) e \quad (100)$$

$$= -x_1^6 - e^2 \leq 0 \quad (101)$$

e a lei de controle buscada é da forma

$$u(x_1, x_2) = -e - x_1^4 + \dot{q} \quad (102)$$

$$= -(x_2 - q) - x_1^4 + \dot{q} \quad (103)$$

$$= -x_2 + q - x_1^4 + \dot{q} \quad (104)$$

$$= -x_2 - x_1^2 - x_1^4 - 2x_1 \dot{x}_1 \quad (105)$$

$$= -x_2 - x_1^2 - x_1^4 - 2x_1 \left(x_1^3 x_2 \right) \quad (106)$$

$$= -x_2 - x_1^2 - x_1^4 - 2x_1^4 x_2 \quad (107)$$

Caso Geral

Versões mais avançadas da técnica *backstepping* podem ser encontradas em livros como o [9], [8] e [3]. Aqui será considerado um caso mais simples, envolvendo sistemas da forma

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1) x_2 \quad (108)$$

$$\dot{x}_2 = u$$

em que para t fixo, $x_1(t) \in R^n$. Assuma que existe $q(x_1)$ tal que $q(0) = 0$ e, para alguma função $V(x_1)$ positivo definida,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)q(x_1)] \quad (109)$$

é negativo definida. Ou seja, 0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

A idéia é tentar obter u tal que $x_2 \rightarrow q(x_1)$, de modo que é conveniente definir

$$e = x_2 - q(x_1) \quad (110)$$

ou,

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \dot{q} \quad (111)$$

$$= u - \dot{q} \quad (112)$$

Juntamente com a equação de estados, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)x_2 \\ &= f(x_1) + g(x_1)(e + q(x_1)) \end{aligned}$$

e

$$\dot{e} = u - \dot{q}(x_1) \quad (113)$$

Usando a função candidata de Lyapunov

$$V_a = V(x_1) + \frac{e^2}{2} \quad (114)$$

tem-se que

$$\dot{V}_a = \frac{dV}{dx_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2] + e\dot{e} \quad (115)$$

$$= \frac{dV}{dx_1} f(x_1) + \frac{dV}{dx_1} g(x_1)x_2 + eu - e\dot{q}(x_1) \quad (116)$$

$$= \frac{dV}{dx_1} f(x_1) + \frac{dV}{dx_1} g(x_1)(q(x_1) + e) + eu - e\dot{q}(x_1) \quad (117)$$

$$= \left[\frac{dV}{dx_1} f(x_1) + \frac{dV}{dx_1} g(x_1)q(x_1) \right] + \left[\frac{dV}{dx_1} g(x_1) + u - \dot{q}(x_1) \right] e \quad (118)$$

O primeiro termo à direita da equação 88 é negativa, em vista de 108. Escolhendo-se

$$u = -e - \frac{dV}{dx_1} g(x_1) + \dot{q}(x_1) \quad (119)$$

resulta que

$$\left[\frac{dV}{dx_1} g(x_1) + u - \dot{q}(x_1) \right] e = \left[\frac{dV}{dx_1} g(x_1) + -e - \frac{dV}{dx_1} g(x_1) + \dot{q}(x_1) - \dot{q}(x_1) \right] e \quad (120)$$

$$= -e^2 \leq 0 \quad (121)$$

e, logo, \dot{V}_a é negativo definida e o ponto 0 de equilíbrio é assintoticamente estável.

Portanto, a lei de controle buscada é

$$u = -e - \frac{dV}{dx_1} g(x_1) + q(\dot{x}_1) \quad (122)$$

$$= -x_2 + q(x_1) - \frac{dV}{dx_1} g(x_1) + \frac{dq}{dx_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2] \quad (123)$$

$$= -x_2 + q(x_1) - \frac{dV}{dx_1} g(x_1) + \frac{dq}{dx_1} f(x_1) + \frac{dq}{dx_1} g(x_1)x_2 \quad (124)$$

Exemplo: Considere o mesmo problema apresentado no início deste módulo, em que o sistema é o apresentado em 79,

$$\dot{x}_1 = x_1^3 x_2 \quad (125)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (126)$$

para o qual $q_1(x_1) = -x_1^2$ e $V(x_1) = \frac{x_1^2}{2}$. O sistema 125+126 pode ser colocado na forma

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 \quad (127)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (128)$$

fazendo a associação

$$f(x_1) = 0 \quad (129)$$

$$g(x_1) = x_1^3 \quad (130)$$

A lei de controle, nesse caso, é dada pela fórmula 124

$$u(x_1, x_2) = -x_2 + q(x_1) - \frac{dV}{dx_1} g(x_1) + \frac{dq}{dx_1} f(x_1) + \frac{dq}{dx_1} g(x_1)x_2 \quad (131)$$

em que

$$\frac{dV}{dx_1} = x_1 \quad (132)$$

$$\frac{dq}{dx_1} = -2x_1 \quad (133)$$

ou seja,

$$u(x_1, x_2) = -x_2 + -x_1^2 - x_1(x_1^3) - 2x_1 0 - 2x_1(x_1^3)x_2 \quad (134)$$

$$= -x_2 + -x_1^2 - x_1^4 - 2x_1^4 x_2 \quad (135)$$

que é idêntico ao obtido anteriormente 107.

Caso com Encadeamento

O método "backstepping" pode ser estendido a sistemas da forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (136)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \quad (137)$$

$$\vdots \quad (138)$$

$$\dot{x}_{k-1} = f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) + g_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})x_k \quad (139)$$

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_k) + g_k(x_1, \dots, x_k)u \quad (140)$$

Para simplificar a apresentação, considere o caso

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (141)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \quad (142)$$

De maneira análoga aos casos anteriores, assuma que existe $q(x_1)$ tal que $q(0) = 0$ e, para alguma função $V(x_1)$ positivo definida,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} [f_1(x_1) + g_1(x_1)q(x_1)] \quad (143)$$

é negativo definida. Ou seja, 0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

A idéia é tentar obter u tal que $x_2 \rightarrow q(x_1)$, de modo que é conveniente definir

$$e = x_2 - q(x_1) \quad (144)$$

ou,

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \dot{q} \quad (145)$$

Juntamente com a equação de estados, obtém-se

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (146)$$

$$= f_1(x_1) + g_1(x_1)(e + q(x_1)) \quad (147)$$

e

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \dot{q} \quad (148)$$

$$= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{q} \quad (149)$$

Usando a função candidata de Lyapunov

$$V_a = V(x_1) + \frac{e^2}{2} \quad (150)$$

tem-se que

$$\dot{V}_a = \frac{dV}{dx_1} [f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2] + e\dot{e} \quad (151)$$

$$= \frac{dV}{dx_1} f_1(x_1) + \frac{dV}{dx_1} g_1(x_1)x_2 + e \left(f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{q} \right) \quad (152)$$

$$= \frac{dV}{dx_1} f_1(x_1) + \frac{dV}{dx_1} g_1(x_1)(q(x_1) + e) + e \left(f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{q} \right) \quad (153)$$

$$= \left[\frac{dV}{dx_1} f_1(x_1) + \frac{dV}{dx_1} g_1(x_1)q(x_1) \right] + \left[\frac{dV}{dx_1} g_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{q} \right] e \quad (154)$$

O primeiro termo à direita da equação 88 é negativa. Escolhendo-se

$$u = \frac{1}{g_2} \left(-e - \frac{dV}{dx_1} g_2 - f_2 + \dot{q} \right) \quad (155)$$

resulta que

$$\left[\frac{dV}{dx_1} g_1 + f_2 + g_2 u - \dot{q} \right] e = \left[\frac{dV}{dx_1} g_1 + f_2 + g_2 \frac{1}{g_2} \left(-e - \frac{dV}{dx_1} g_2 - f_2 + \dot{q} \right) - \dot{q} \right] e \quad (156)$$

$$= -e^2 \leq 0 \quad (157)$$

e, assim, \dot{V}_a é negativo definida e o ponto 0 de equilíbrio é assintoticamente estável.

Portanto, a lei de controle buscada é

$$u = \frac{1}{g_2} \left[-e - \frac{dV}{dx_1} g_2 - f_2 + \dot{q} \right] \quad (158)$$

$$= \frac{1}{g_2} \left[-(x_2 - q) - \frac{dV}{dx_1} g_1 - f_2 + \frac{dq}{dx_1} (f_1 + g_1 x_2) \right] \quad (159)$$

$$= \frac{1}{g_2} \left[-x_2 + q - \frac{dV}{dx_1} g_1 - f_2 + \frac{dq}{dx_1} f_1 + \frac{dq}{dx_1} g_1 x_2 \right] \quad (160)$$

Estabilidade Absoluta

Considere um sistema em malha fechada conforme ilustrado à direita na figura 6, em que

- $G(s)$ é SISO-LTI
- $f : R \rightarrow R$ é tal que $\xi f(\xi) \geq 0$

Em termos de representação no espaço de estados,

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d \quad (161)$$

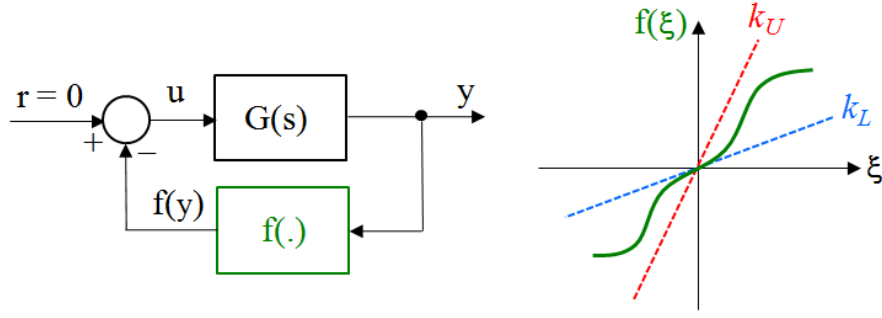


Figura 6: Estrutura do problema de Lur'e-Postnikov com a ilustração de uma não linearidade do tipo setor k_L e k_U

com

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (162)$$

$$y = c^T x + du \quad (163)$$

$$u = -f(y) \quad (164)$$

em que $A_{n \times n}$, $b_{n \times 1}$, $c_{n \times 1}$ e $d_{1 \times 1}$.

Caso de f linear

Se $f = ky$, então, muitas vezes, é possível encontrar valores k_L e k_U , de modo que para $\forall k \in (k_L, k_U)$, o sistema em malha fechada da figura 6 é estável.

Na tentativa de se estender essa condição para o caso de f não linear como o ilustrado à esquerda na figura 6, surgiram as conjecturas de Aizerman e de Kalman.

A conjectura de Aizerman se referia à estabilidade do sistema em questão se

$$k_L \leq \frac{f(y)}{y} \leq k_U \quad (165)$$

e a de Kalman

$$k_L \leq \frac{f(y)}{y} \leq k_U \text{ e } k_L \leq \frac{df}{dy} \leq k_U \quad (166)$$

Infelizmente, ambas as conjecturas são falsas uma vez que existem contraexemplos.

Entretanto, a condição de estabilidade para não-linearidades contidas em um setor (k_L, k_U) pode ser estabelecida mediante algumas hipóteses adicionais.

Lema de Kalman-Yakubovich

Considere que são fornecidas uma constante $\gamma \geq 0$, uma matriz $A_{n \times n}$ cujos auto-valores possuem a parte real estritamente negativa, uma matriz $L_{n \times n} > 0$ e vetores $b_{n \times 1}$ e $c_{n \times 1}$, (A, b) controlável

e seja

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + \frac{\gamma}{2} \quad (167)$$

Se

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R \quad (168)$$

então $\exists \varepsilon > 0$, $q_{n \times 1}$ e $P_{n \times n} > 0$, de modo que

$$A^T P + P A = -q q^T - \varepsilon L \quad (169)$$

$$P b - c = \sqrt{\gamma} q \quad (170)$$

A prova pode ser vista no artigo Kalman, R.E. - *Lyapunov Function for the Problem of Lur'e in Automatic Control*. Proc. National Academy of Sciences, v.49, n.2, 1963, pp.201-205.

Problema de estabilidade absoluta de Lur'e e Postnikov

O problema consiste em obter condições que garantam a estabilidade do sistema da figura 6 para f contidos no setor $(0, k_U)$.

São hipóteses iniciais:

- $\operatorname{Re}\{\lambda(A)\} < 0$
- $1 + k_U d > 0$

A condição $1 + k_U d > 0$ é requerida pois, se $1 + k_U d \leq 0$ e $\hat{k} \in (0, k_U)$ tal que $1 + \hat{k}d = 0$ obter-se-ia para $f(y) = \hat{k}y$ que

$$y = c^T x + du \quad (171)$$

$$= c^T x - df(y) \quad (172)$$

$$= c^T x - d\hat{k}y \quad (173)$$

ou

$$y + \hat{k}dy = c^T x \quad (174)$$

$$\overbrace{(1 + \hat{k}d)}^0 y = c^T x \quad (175)$$

resultando em um problema degenerado.

Para se aplicar o critério de Lyapunov, considere a representação no espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (176)$$

$$y = c^T x + du \quad (177)$$

e a função candidata

$$V(x) = x^T P x \quad (178)$$

Sob estas condições

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (179)$$

$$= \left(x^T A^T + u^T b^T \right) P x + x^T P (A x + b u) \quad (180)$$

$$= x^T (A^T P + P A) x + 2 x^T P b u \quad (181)$$

enquanto, por outro lado,

$$y = c^T x + d u \quad (182)$$

$$c^T x + d u - y = 0 \quad (183)$$

$$c^T x u + d u^2 - y u = 0 \quad (184)$$

$$c^T x k_U u + d k_U u^2 - k_U y u = 0 \quad (185)$$

$$c^T x k_U u + d k_U u^2 - k_U y u + u^2 - u^2 = 0 \quad (186)$$

$$x^T c k_U u + (1 + k_U d) u^2 - (u + k_U y) u = 0 \quad (187)$$

Portanto, subtraindo-se de 181 o termo à esquerda de 187, obtém-se

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x + 2 x^T P b u + x^T c k_U u + (1 + k_U d) u^2 - (u + k_U y) u \quad (188)$$

$$= x^T (A^T P + P A) x + 2 x^T \left(P b - \frac{1}{2} k_U c \right) u - (1 + k_U d) u^2 + (u + k_U y) u \quad (189)$$

O último termo à direita em 189 é negativo, pois para $u = -f(y)$

$$(u + k_U y) u = -(-f(y) + k_U y) f(y) \leq 0 \quad (190)$$

pois, pelo gráfico da esquerda de 6

$$(k_U y - f(y)) \begin{cases} > 0 & \text{quando } f(y) > 0 \\ < 0 & \text{quando } f(y) < 0 \end{cases} \quad (191)$$

Necessita-se, agora, do auxílio do Lema de Kalman-Yakubovich: Fornecidas uma constante $\gamma \geq 0$, uma matriz $A_{n \times n}$ cujos auto-valores possuem a parte real estritamente negativa, uma matriz $L_{n \times n} > 0$ e vetores $b_{n \times 1}$ e $v_{n \times 1}$, se

$$Re\{T(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R \quad (192)$$

em que

$$T(s) = v^T (sI - A)^{-1} b + \frac{\gamma}{2} \quad (193)$$

então $\exists \varepsilon > 0$, $q_{n \times 1}$ e $P_{n \times n} > 0$, tal que

$$A^T P + P A = -q q^T - \varepsilon L \quad (194)$$

$$P b - v = \sqrt{\gamma} q \quad (195)$$

No presente caso, observando-se os dois primeiros termos à esquerda de 189 e as expressões advindas do Lema de Kalman-Yakubovich

$$A^T P + P A \longleftrightarrow A^T P + P A \quad (196)$$

$$P b - \frac{1}{2} k_U c \longleftrightarrow P b - v \quad (197)$$

conclui-se que é interessante fazer a associação

$$\frac{1}{2}k_U c = v \quad (198)$$

e, escolher

$$\gamma = 1 + k_U d \quad (199)$$

Nessas condições, 193 é reescrito conforme

$$T(s) = v^T (sI - A)^{-1} b + \frac{\gamma}{2} \quad (200)$$

$$= \frac{1}{2} k_U c^T (sI - A)^{-1} b + \frac{\gamma}{2} \quad (201)$$

$$= \frac{1}{2} \left[k_U c^T (sI - A)^{-1} b + \gamma \right] \quad (202)$$

$$= \frac{1}{2} \left[k_U c^T (sI - A)^{-1} b + 1 + k_U d \right] \quad (203)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + k_U \left(c^T (sI - A)^{-1} b + d \right) \right] \quad (204)$$

$$= \frac{1}{2} [1 + k_U G(s)] \quad (205)$$

Portanto, se

$$\operatorname{Re}\{1 + k_U G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R$$

então $\exists \varepsilon > 0$, $q_{n \times 1}$ e $P_{n \times n} > 0$, tal que

$$A^T P + P A = -q q^T - \varepsilon L \quad (206)$$

$$P b - \frac{1}{2} k_U c = \sqrt{1 + k_U d} q \quad (207)$$

e 189 se torna

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x + 2x^T \left(P b - \frac{1}{2} k_U c \right) u - (1 + k_U d) u^2 + (u + k_U y) u \quad (208)$$

$$= x^T (-q q^T - \varepsilon L) x + 2x^T \sqrt{1 + k_U d} q u - (1 + k_U d) u^2 - (u + k_U y) u \quad (209)$$

$$= -\varepsilon x^T L x - \left(x^T q \right)^2 + 2x^T q \sqrt{1 + k_U d} u - (1 + k_U d) u^2 - (u + k_U y) u \quad (210)$$

$$= -\varepsilon x^T L x - \left(x^T q - \sqrt{1 + k_U d} u \right)^2 - (u + k_U y) u \quad (211)$$

$$\leq -\varepsilon x^T L x \leq 0 \quad (212)$$

Resumindo o desenvolvimento, tem-se que as condições para a estabilidade absoluta são

- A estável
- (A, b) controlável
- $1 + k_U d > 0$
- $\operatorname{Re}\{1 + k_U G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R$, em que $G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d$

Observação: Um sistema representado por $H : C \rightarrow C$ é dito ser estritamente positivo real se

- $H(s) \in R$ se $s \in R$
- $Re\{polos[G(s)]\} < 0$
- $Re\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R$

Critério do Círculo de Zames

Considere o problema envolvendo a estrutura de malha fechada da figura 6, agora sem a condição de que $k_L = 0$ como admitido anteriormente, ou seja, f pode pertencer ao setor arbitrário (k_L, k_U) como ilustrado na figura 6. Valendo-se de propriedades do diagrama de blocos, é possível modificar o sistema da figura 6 para o equivalente ilustrado em 7. Nessas condições, a mesma

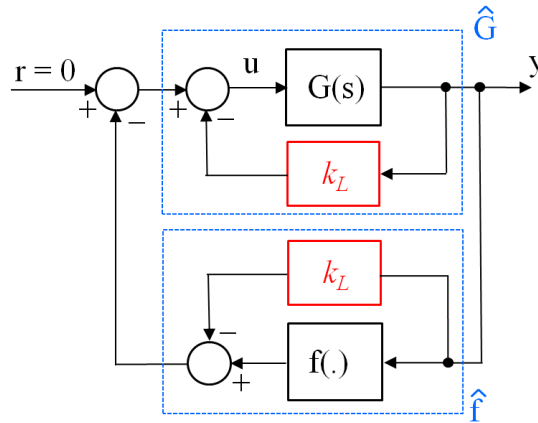


Figura 7: Estrutura do problema de Lur’e-Postnikov com a ilustração de uma não linearidade do tipo setor k_L e k^U

estrutura da figura 6 é mantida com

$$\hat{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + k_L G(s)} \quad (213)$$

e f é modificado de forma tal que $k_L = 0$

$$\hat{f} \in \left(0, \overbrace{k_U - k_L}^{\hat{k}_U} \right) \quad (214)$$

A observação de 213 sugere a utilização do critério de Nyquist para que se possa utilizar o resultado anterior que requer $Re\{polos[\widehat{G}(s)]\} < 0$. Seja P o número de polos de $G(s)$ no semiplano direito. Então $\widehat{G}(s)$ será estável se o ponto $-\frac{1}{k_L}$ é circundado P vezes no sentido contrário ao percorrido no contorno de Nyquist. No caso de se percorrer o contorno de Nyquist no sentido

$\omega = 0$ para $\omega = \infty$, o ponto $-\frac{1}{k_L}$ deve ser circundado no sentido horário P vezes. Ou seja, $\hat{N} = Z - P$ em que Z é o número de zeros (raízes) de $1 + k_L G(s) = 0$.

Portanto, a condição para a estabilidade absoluta

$$Re\{1 + \hat{k}_U \hat{G}(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R \quad (215)$$

é reescrita como

$$Re\{1 + (k_U - k_L) \frac{G(j\omega)}{1 + k_L G(j\omega)}\} > 0, \forall \omega \in R \quad (216)$$

A verificação da condição 216 pode ser realizada de modo gráfico. De fato, 216 pode ser escrito como

$$Re\{1 + (k_U - k_L) \frac{G(j\omega)}{1 + k_L G(j\omega)}\} = Re\{\frac{1 + k_U G(j\omega)}{1 + k_L G(j\omega)}\} \quad (217)$$

Introduza a notação

$$U(\omega) = Re\{G(j\omega)\} \quad (218)$$

$$V(\omega) = Im\{G(j\omega)\} \quad (219)$$

ou

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (220)$$

Com essa notação,

$$Re\{\frac{1 + k_U G(j\omega)}{1 + k_L G(j\omega)}\} = Re\{\frac{1 + k_U [U(\omega) + jV(\omega)]}{1 + k_L [U(\omega) + jV(\omega)]}\} \quad (221)$$

$$= Re\{\frac{[1 + k_U U(\omega)] + jk_U V(\omega)}{[1 + k_L U(\omega)] + jk_L V(\omega)}\} \quad (222)$$

$$= \frac{[1 + k_U U(\omega)] [1 + k_L U(\omega)] + k_L k_U V^2(\omega)}{[1 + k_L U(\omega)]^2 + k_L^2 V^2(\omega)} \quad (223)$$

e a condição

$$Re\{1 + (k_U - k_L) \frac{G(j\omega)}{1 + k_L G(j\omega)}\} > 0, \forall \omega \in R \quad (224)$$

se torna, se $k_L k_U > 0$ e, para $\forall \omega \in R$

$$[1 + k_U U][1 + k_L U] + k_L k_U V^2 > 0 \quad (225)$$

$$\left[\frac{1}{k_L} + U \right] \left[\frac{1}{k_U} + U \right] + V^2 > 0 \quad (226)$$

$$U^2 + \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right) U + \frac{1}{k_U k_L} + V^2 > 0 \quad (227)$$

$$U^2 + \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right) U + \frac{1}{k_U k_L} + V^2 > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right)^2 \quad (228)$$

$$U^2 + \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right) U + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right)^2 + V^2 > -\frac{1}{k_U k_L} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right)^2 \quad (229)$$

$$\left[U + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right) \right]^2 + V^2 > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right)^2 - \frac{1}{k_U k_L} \quad (230)$$

$$\left[U + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right) \right]^2 + V^2 > \overbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_U} - \frac{1}{k_L} \right)^2}^{r^2} \quad (231)$$

A expressão 231 com o sinal ">" substituído por "=" é a equação da circunferência de raio

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_U} - \frac{1}{k_L} \right)$$

com centro em

$$(c_x, c_y) = \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right], 0 \right) \quad (232)$$

Portanto, conforme a expressão 231, a curva $G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ não pode estar no interior do círculo para $\forall \omega \in R$.

Observando-se a equação 226, verifica-se que este é obtido a partir de 225 dividindo-se ambos os lados da desigualdade por $k_L k_U$. Portanto, caso $k_L k_U < 0$, a desigualdade 231 se torna

$$\left[U + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_U} \right) \right]^2 + V^2 < r^2, \forall \omega \in R \quad (233)$$

e a condição de estabilidade é alterada para a curva $G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ contido no interior do círculo para $\forall \omega \in R$.

Exemplo: Seja o problema de determinar a maior secção (k_L, k_U) em que $k_L = 1$, de modo que se tenha estabilidade absoluta com

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)} \quad (234)$$

Nos casos em que $k_L k_U < 0$, deve-se ter a curva de Nyquist de $G(j\omega)$ contido em círculo, cujos pontos de intersecção com o eixo real são $\left(-\frac{1}{k_L}, 0 \right)$ e $\left(-\frac{1}{k_U}, 0 \right)$.

Ao invés de estabelecer um valor numérico *a priori* para k_U , pode-se fazer uso de algoritmos para a determinação do maior k_U , obtendo-se o círculo de maior raio possível contido no semi-plano

esquerdo e com o centro localizado no eixo real, de modo que a curva de Nyquist de $G(j\omega)$ não seja intersectada.

Com o auxílio do script "circle" do MATLAB, obtém-se que

$$-\frac{1}{k_U} \simeq -0.08 \quad (235)$$

ou seja,

$$k_U \simeq 12.5 \quad (236)$$

A figura 8 ilustra graficamente a solução.

Exemplo: Seja o problema de determinar a maior secção (k_L, k_U) em que k_L pode ser negativo, de modo que se tenha estabilidade absoluta com

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)} \quad (237)$$

Nos casos em que $k_L k_U < 0$, deve-se ter a curva de Nyquist de $G(j\omega)$ contido em círculo, cujos pontos de intersecção com o eixo real são $\left(-\frac{1}{k_L}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{k_U}, 0\right)$.

Ao invés de estabelecer valores numéricos *a priori* para k_L e k_U , pode-se fazer uso de algoritmos para a determinação de menor k_L e maior k_U , circunscrevendo a Nyquist de $G(j\omega)$ com o círculo de menor raio possível e centro localizado no eixo real.

Com o auxílio do script "circle" do MATLAB, obtém-se que

$$-\frac{1}{k_L} \simeq 0.2 \quad (238)$$

$$-\frac{1}{k_U} \simeq -0.033 \quad (239)$$

ou seja,

$$k_L \simeq -5 \quad (240)$$

$$k_U \simeq 30 \quad (241)$$

A figura 9 ilustra graficamente a solução.

Critério de Popov

Considere o sistema cujo diagrama de blocos encontra-se na figura 6, em que

- $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ com $\text{grau}\{n(s)\} < \text{grau}\{d(s)\}$
- $f : R \rightarrow R$ pertencente ao setor $(0, k_U)$
- $\text{Re}\{\text{polos}[G(s)]\} < 0$

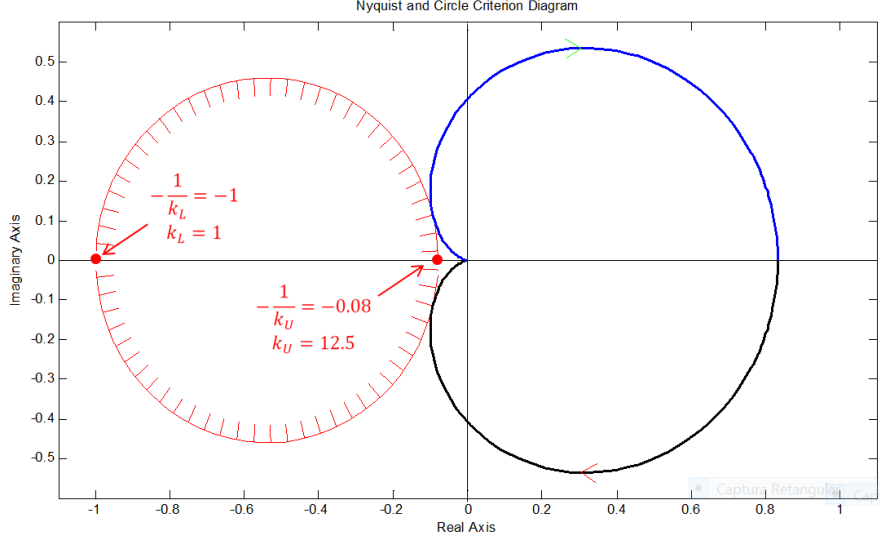


Figura 8: Exemplo de aplicação do critério do círculo para o caso $k_L = 1$.

O sistema ilustrado na figura 6 é absolutamente estável se $\exists \rho \geq 0$ tal que

$$\operatorname{Re}\{(1 + j\omega\rho)G(j\omega)\} + \frac{1}{k_U} > 0, \forall \omega \in R \quad (242)$$

e esse resultado pode ser demonstrado utilizando-se os conceitos de passividade e de funções de Lyapunov (POPOV, V.M., “On absolute stability of non-linear automatic control systems”, *Avtomat i Telemekh*, v.22, n.8, 1961, pp. 961–979)

O problema é obter um método gráfico para se testar a estabilidade a partir da condição 242. Para tal, introduza a notação

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (243)$$

e note que

$$(1 + j\omega\rho)G(j\omega) = (1 + j\omega\rho)(U(\omega) + jV(\omega)) \quad (244)$$

$$= \overbrace{U(\omega) - \omega\rho V(\omega)}^{\operatorname{Re}} + j(V(\omega) + \omega\rho U(\omega)) \quad (245)$$

Portanto, a condição 242 pode ser reescrita segundo

$$\operatorname{Re}\{(1 + j\omega\rho)G(j\omega)\} + \frac{1}{k_U} > 0, \forall \omega \in R \quad (246)$$

$$U(\omega) - \omega\rho V(\omega) + \frac{1}{k_U} > 0, \forall \omega \in R \quad (247)$$

$$\frac{1}{\rho}U(\omega) - \omega V(\omega) + \frac{1}{\rho k_U} > 0, \forall \omega \in R \quad (248)$$

$$\omega \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} < \frac{1}{\rho} \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + \frac{1}{\rho k_U}, \forall \omega \in R \quad (249)$$

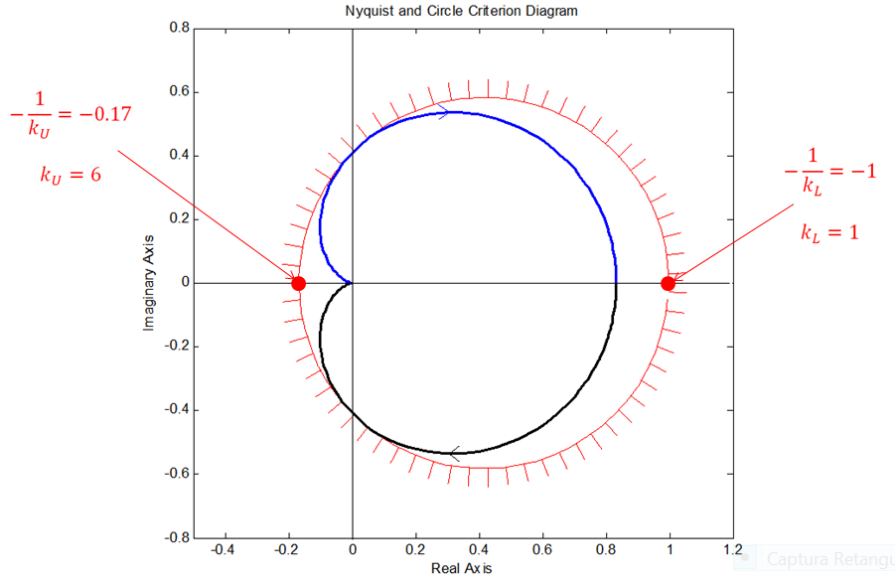


Figura 9: Exemplo de aplicação do critério do círculo para o caso $k_L k_U < 0$.

Exemplo: Seja o problema de determinar a maior secção (k_L, k_U) em que $k_L = 0$, de modo que se tenha estabilidade absoluta com

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 25s^2 + 3s + 1} \quad (250)$$

A condição de estabilidade absoluta é que a curva de Popov, ou seja, $Im\{\omega G(j\omega)\} \times Re\{G(j\omega)\}$, fique abaixo da reta

$$y = \frac{1}{\rho}x + \frac{1}{\rho k_U} \quad (251)$$

em que x e y , denota a abscissa e a ordenada, respectivamente, no plano $(Re\{G(j\omega)\}, Im\{\omega G(j\omega)\})$.

No caso específico, observa-se na figura 10 que

$$-\frac{1}{k_U} \simeq -0.12 \quad (252)$$

ou seja,

$$k_U \simeq 8.5 \quad (253)$$

Controle Adaptativo

O tipo de controle adaptativo a ser estudado nessa seção é o MRAC (Model Reference Adaptive Control) em que o desempenho é caracterizado por um modelo de referência. O material

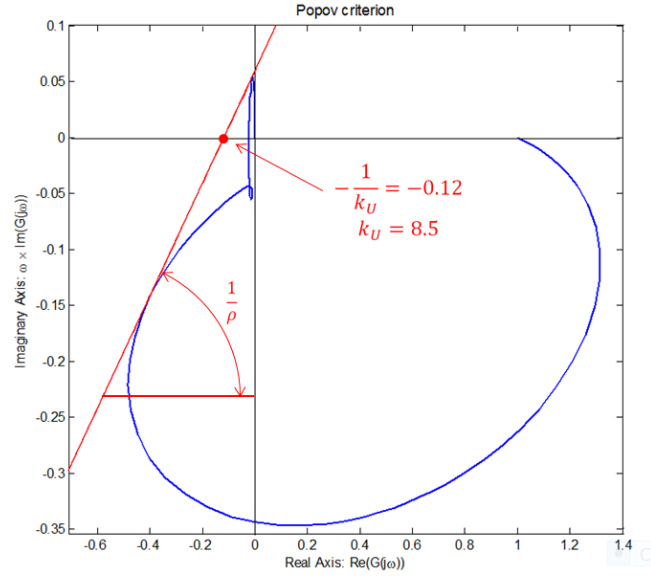


Figura 10: Exemplo de aplicação do critério de Popov para o caso $k_L = 0$.

apresentado nesta seção está baseado no texto clássico [6]. A idéia básica é obter uma lei de controle $u(t)$ de modo que $e(t) \rightarrow 0$ à medida que $t \rightarrow \infty$ para uma entrada arbitrária $r(t)$, mas suficientemente "rica" para excitar o sistema.

Antes de apresentar a estratégia de controle propriamente dita, convém que sejam estudados os problemas de Identificação e de Casamento de Modelos (Model Matching).

Identificação

Para que a apresentação seja didática, serão considerados em separado os casos estático e dinâmico.

Sistema Estático

Considere o sistema

$$y(t) = \theta u(t) \quad (254)$$

em que θ é uma constante e $t \in [t_0, t_f]$. O problema é obter uma estimativa $\hat{\theta}$ de θ , minimizando

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [y(t) - \theta u(t)]^2 dt \quad (255)$$

Uma condição necessária para a otimalidade é

$$\left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (256)$$

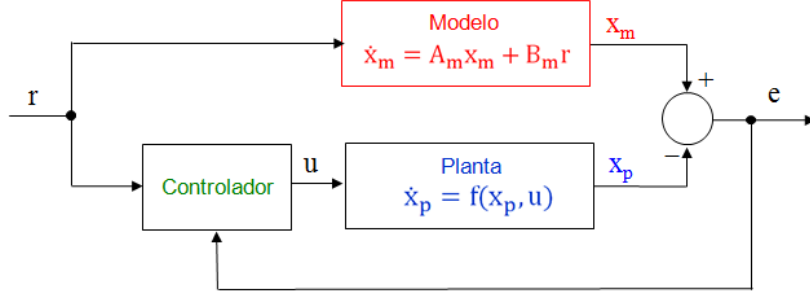


Figura 11: Estrutura básica utilizada na estratégia de controle MRAC.

ou seja, deve-se fazer

$$\frac{dJ}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [y(t) - \theta u(t)]^2 dt \quad (257)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{t_0}^{t_f} [y^2(t) - 2\theta y(t)u(t) + \theta^2 u^2(t)] dt \quad (258)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{d\theta} [y^2(t) - 2\theta y(t)u(t) + \theta^2 u^2(t)] dt \quad (259)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [-2y(t)u(t) + 2\theta u^2(t)] dt \quad (260)$$

$$= 0 \quad (261)$$

Logo, tem-se que

$$\hat{\theta} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} y(\tau)u(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t_f} u^2(\tau)d\tau} \quad (262)$$

Técnicas de estimação em que todos os dados entre t_0 e t_f são empregados de uma vez só como em 262 são conhecidas como de "batelada". Em contraste, as técnicas que utilizam os dados $u(t)$ e de $y(t)$ à medida em que esses se tornam disponíveis são denominadas "recursivas".

Considerando-se como uma variável o instante t_f na equação 262, agora denotado t , obtém-se

$$\hat{\theta}(t) \int_{t_0}^t u^2(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t y(\tau)u(\tau)d\tau \quad (263)$$

e, derivando-se em t , resulta que

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{\theta}(t) \int_{t_0}^t u^2(\tau)d\tau \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t y(\tau)u(\tau)d\tau \right) \quad (264)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}(t) \int_{t_0}^t u^2(\tau)d\tau + \hat{\theta}(t) u^2(t) = y(t)u(t) \quad (265)$$

Constata-se pela equação 265 que se o sinal $u(t)$ for identicamente nulo, não é possível realizar a identificação. Ou seja, a entrada $u(t)$ deve excitar suficientemente o sistema.

Por exemplo, no caso especial de $u(t) = \delta(t_0)$,

$$\int_{t_0}^t u^2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \delta^2(\tau) d\tau = 1 \quad (266)$$

e a equação 265 pode ser simplificada para

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}(t) = -\hat{\theta}(t) u^2(t) + y(t) u(t) \quad (267)$$

$$= \left(y(t) - \hat{\theta}(t) u(t) \right) u(t) \quad (268)$$

Note-se que

$$\nabla_{\hat{\theta}} \left(\frac{1}{2} \left[y(t) - \hat{\theta}(t) u(t) \right]^2 \right) = \nabla_{\hat{\theta}} \left(\frac{1}{2} \left[y^2(t) - 2\hat{\theta} y(t) u(t) + \hat{\theta}^2 u^2(t) \right] \right) \quad (269)$$

$$= -y(t) u(t) + \hat{\theta} u^2(t) \quad (270)$$

de modo que a equação 268 pode ser reescrito como

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\nabla_{\hat{\theta}} \left(\frac{1}{2} \left[y(t) - \hat{\theta}(t) u(t) \right]^2 \right) \quad (271)$$

Note-se, também, que o ponto de equilíbrio de 265 é obtido de

$$-u^2(t) \hat{\theta}(t) + y(t) u(t) = 0 \quad (272)$$

$$-u^2(t) \hat{\theta}(t) + \theta u(t) u(t) = 0 \quad (273)$$

$$\hat{\theta}(t) = \theta \quad (274)$$

Em vista de θ ser constante, se

$$\phi(t) = \hat{\theta}(t) - \theta \quad (275)$$

tem-se que

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{dt} \quad (276)$$

e, portanto

$$\dot{\phi} = -u^2(t) \hat{\theta} + y(t) u(t) \quad (277)$$

$$= -u^2(t) \hat{\theta} + \theta u^2(t) \quad (278)$$

$$= -u^2(t) \phi(t) \quad (279)$$

adotando-se a notação tradicional $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Considere a função candidata de Lyapunov

$$V = \phi^2 \quad (280)$$

Constata-se que o ponto de equilíbrio $\phi = 0$ de 279 é estável se $u \neq 0$, pois

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \phi^2 \quad (281)$$

$$= 2\phi \dot{\phi} \quad (282)$$

$$= -2\phi^2 u^2 \quad (283)$$

Sistema Dinâmico - Caso Escalar

Considere o sistema linear

$$\dot{x}_p = a_p x_p + b_p u \quad (284)$$

em que a_p e b_p são constantes desconhecidas, mas os sinais x_p e u são medidos.

Seja a dinâmica para a estimativa

$$\dot{\hat{x}}_p = \hat{a}_p(t) \hat{x}_p + \hat{b}_p(t) u \quad (285)$$

e a meta é obter $\hat{a}_p(t) \rightarrow a_p$ e $\hat{b}_p(t) \rightarrow b_p$, para $t \rightarrow \infty$.

Nessas condições, o erro

$$e(t) = x_p(t) - \hat{x}_p(t) \quad (286)$$

é tal que

$$\dot{e} = (a_p x_p + b_p u) - (\hat{a}_p(t) \hat{x}_p + \hat{b}_p(t) u) \quad (287)$$

$$= a_p (x_p - \hat{x}_p) + (a_p - \hat{a}_p(t)) \hat{x}_p + (b_p - \hat{b}_p(t)) u \quad (288)$$

bastando somar e subtrair o termo $a_p \hat{x}_p$

Por conveniência, sejam as variáveis auxiliares

$$\phi(t) = \hat{a}_p - a_p \quad (289)$$

$$\psi(t) = \hat{b}_p - b_p \quad (290)$$

que permite reescrever 288 na forma

$$\dot{e} = a_p e + \phi(t) \hat{x}_p + \psi(t) u \quad (291)$$

A partir dos sinais conhecidos $e(t)$, $\hat{x}_p(t)$ e $u(t)$, deseja-se obter leis

$$\dot{\hat{a}}_p = F_a(e, \hat{x}_p, u, \hat{a}_p) \quad (292)$$

$$\dot{\hat{b}}_p = F_b(e, \hat{x}_p, u, \hat{b}_p) \quad (293)$$

de modo que $\hat{a}_p(t) \rightarrow a_p$ e $\hat{b}_p(t) \rightarrow b_p$, para $t \rightarrow \infty$.

Lembrando que a_p e b_p são constantes, e propondo como $F_a(\cdot)$ e $F_b(\cdot)$ de forma que

$$\dot{\hat{a}}_p = -e(t) \hat{x}_p(t) \quad (294)$$

$$\dot{\hat{b}}_p = -e(t) u(t) \quad (295)$$

tem-se que

$$\dot{\phi} = \frac{d}{dt} (\hat{a}_p - a_p) \quad (296)$$

$$= \dot{\hat{a}}_p \quad (297)$$

$$= -e(t) \hat{x}_p(t) \quad (298)$$

e

$$\dot{\psi} = \frac{d}{dt} (b_p - \hat{b}_p(t)) \quad (299)$$

$$= b_p \quad (300)$$

$$= -e(t)u(t) \quad (301)$$

Portanto, o sistema de equações descrevendo (e, ϕ, ψ) fica da forma

$$\dot{e} = a_p e + \phi \hat{x}_p + \psi u \quad (302)$$

$$\dot{\phi} = -e \hat{x}_p \quad (303)$$

$$\dot{\psi} = -eu \quad (304)$$

em que $u(t)$ e $\hat{x}_p(t)$ são conhecidos.

Verifica-se imediatamente que $(0, 0, 0)$ é ponto de equilíbrio do sistema 302 - 304.

Para se estudar a estabilidade de $(0, 0, 0)$, seja a função candidata de Lyapunov

$$V(e, \phi, \psi) = \frac{1}{2} (e^2 + \phi^2 + \psi^2) \quad (305)$$

Nesse caso,

$$\dot{V} = e \dot{e} + \phi \dot{\phi} + \psi \dot{\psi} \quad (306)$$

$$= e (a_p e + \phi \hat{x}_p + \psi u) + \phi (-e \hat{x}_p) + \psi (-eu) \quad (307)$$

$$= a_p e^2 \leq 0 \quad (308)$$

Com a utilização do lema de Barbalat é possível estabelecer que

$$e \xrightarrow{t \uparrow \infty} 0 \quad (309)$$

Sistema Dinâmico - Caso Vetorial

Considere o sistema linear

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (310)$$

em que A_p e B_p são matrizes constantes desconhecidas, mas os sinais x_p e u são medidos.

Como no caso escalar, seja a dinâmica para a estimativa

$$\dot{\hat{x}}_p = \hat{A}_p(t) \hat{x}_p + B b_p(t) u \quad (311)$$

e a meta é obter $\hat{A}_p(t) \rightarrow A_p$ e $\hat{B}_p(t) \rightarrow B_p$, para $t \rightarrow \infty$.

Nessas condições, o erro

$$e(t) = x_p(t) - \hat{x}_p(t) \quad (312)$$

é tal que

$$\dot{e} = (A_p x_p + B_p u) - (\hat{A}_p(t) \hat{x}_p + \hat{B}_p(t) u) \quad (313)$$

$$= A_p (x_p - \hat{x}_p) + (A_p - \hat{A}_p(t)) \hat{x}_p + (B_p - \hat{B}_p(t)) u \quad (314)$$

Por conveniência, sejam as variáveis auxiliares

$$\Phi(t) = \hat{A}_p - A_p \quad (315)$$

$$\Psi(t) = \hat{B}_p - B_p \quad (316)$$

que permite reescrever 314 na forma

$$\dot{e} = A_p e + \Phi(t) \hat{x}_p + \Psi(t) u \quad (317)$$

De modo similar ao caso escalar e escolhendo uma matriz $P > 0$,

$$\dot{\phi} = -P e(t) \hat{x}_p^T(t) \quad (318)$$

e

$$\dot{\psi} = -P e(t) u^T(t) \quad (319)$$

Para se estudar a estabilidade de $(0, 0, 0)$, seja a função candidata de Lyapunov

$$V(e, \Phi, \Psi) = e^T P e + tr \left(\Phi^T \Phi + \Psi^T \Psi \right) \quad (320)$$

Nesse caso, lembrando que $tr(ab^T) = b^T a$ se a e b são colunas, obtem-se

$$\dot{V} = e^T P \dot{e} + e^T P e + tr \left(2 \dot{\Phi}^T \Phi + 2 \dot{\Psi}^T \Psi \right) \quad (321)$$

$$\dots \quad (322)$$

$$= e^T \left(A_p^T P + P A_p \right) e \leq 0 \quad (323)$$

Model Matching

Controle Direto

Considere um processo controlável

$$\dot{x}_p = a_p x_p(t) + b_p u(t) \quad (324)$$

ou seja, que possui $b_p \neq 0$, bem como o modelo a ser casado

$$\dot{x}_m = a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad (325)$$

em que $|r(t)| \leq R, \forall t$.

Deseja-se obter u de modo que $x_p(t) \rightarrow x_m(t)$ ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - x_m(t)| = 0 \quad (326)$$

No caso de controle direto, a tarefa será obter uma lei de ajuste dos parâmetros θ e k em

$$u(t) = \theta(t)x_p(t) + k(t)r(t) \quad (327)$$

Se a_p e b_p fossem conhecidos, os valores de θ e k adequados seriam

$$\theta^* = \frac{a_m - a_p}{b_p} \quad (328)$$

$$k^* = \frac{b_m}{b_p} \quad (329)$$

pois, nesse caso,

$$\dot{x}_p = a_p(t)x_p(t) + b_p(t)u(t) \quad (330)$$

$$= a_px_p(t) + b_p(\theta x_p(t) + kr(t)) \quad (331)$$

$$= a_px_p(t) + b_p \left(\frac{a_m - a_p}{b_p} x_p(t) + \frac{b_m}{b_p} r(t) \right) \quad (332)$$

$$= a_mx_m(t) + b_mr(t) \quad (333)$$

ou seja, 333 é da mesma forma que 325.

Apesar de os coeficientes a_p e b_p serem desconhecidos, a idéia é buscar $\theta(t) \rightarrow \theta^*$ e $k(t) \rightarrow k^*$.

Definindo-se o erro

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t) \quad (334)$$

tem-se de 332 e de 325 que

$$\dot{e}(t) = a_px_p(t) + b_p\theta x_p(t) + b_pkr(t) - a_mx_m(t) - b_mr(t) \quad (335)$$

$$= a_px_p(t) + b_p\theta x_p(t) + b_pkr(t) - a_mx_m(t) - b_pk^*r(t) \quad (336)$$

notando que $b_m = b_pk$. Denotando-se $\psi = k - k^*$, tem-se

$$\dot{e}(t) = a_px_p(t) + b_p\theta x_p(t) + b_p\psi r(t) - a_mx_m(t) \quad (337)$$

Somando e subtraindo $a_mx_p(t)$, obtém-se

$$\dot{e}(t) = a_px_p(t) + b_p\theta x_p(t) + b_p\psi r(t) - a_mx_m(t) + a_mx_p(t) - a_mx_p(t) \quad (338)$$

$$= a_px_p(t) + b_p\theta x_p(t) + b_p\psi r(t) + a_me - a_mx_p(t) \quad (339)$$

Somando e subtraindo $b_p\theta^*x_p(t)$, e denotando $\phi = \theta - \theta^*$, obtém-se

$$\dot{e}(t) = a_px_p(t) - a_mx_p(t) + b_p\theta x_p(t) + b_p\psi r(t) + a_me + b_p\theta^*x_p(t) - b_p\theta^*x_p(t) \quad (340)$$

$$= a_px_p(t) - a_mx_p(t) + b_p\phi x_p(t) + b_p\psi r(t) + a_me + b_p\theta^*x_p(t) \quad (341)$$

Notando que

$$b_p \theta^* x_p(t) = b_p \frac{a_m - a_p}{b_p} x_p(t) \quad (342)$$

$$= (a_m - a_p) x_p(t) \quad (343)$$

a equação 341 se torna

$$\dot{e}(t) = a_p x_p(t) - a_m x_p(t) + b_p \phi x_p(t) + b_p \psi r(t) + a_m e + (a_m - a_p) x_p(t) \quad (344)$$

$$= b_p \phi x_p(t) + b_p \psi r(t) + a_m e \quad (345)$$

Supondo conhecido o sinal de b_p , uma proposta de lei de controle é

$$\dot{\phi} = -\text{sign}(b_p) e(t) x_p(t) \quad (346)$$

e

$$\dot{\psi} = -\text{sign}(b_p) e(t) r(t) \quad (347)$$

pois, utilizando-se a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \left[e^2 + |b_p| (\phi^2 + \psi^2) \right] \quad (348)$$

tem-se

$$\dot{V} = e \dot{e} + |b_p| (\phi \dot{\phi} + \psi \dot{\psi}) \quad (349)$$

$$= e (b_p \phi x_p + b_p \psi r + a_m e) + |b_p| (-\text{sign}(b_p) e x_p \phi + -\text{sign}(b_p) e r \psi) \quad (350)$$

$$= a_m e^2 \leq 0 \quad (351)$$

tendo-se em vista que

$$b_p - |b_p| \text{sign}(b_p) = \begin{cases} (+) - (+) * (+1) = 0 & \text{se } b_p > 0 \\ (-) - (+) * (-1) = 0 & \text{se } b_p < 0 \end{cases} \quad (352)$$

Devido ao fato de que k e θ que aparecem na lei de controle 327 serem ajustados "diretamente", a estratégia é chamada de "controle direto". Na próxima seção será apresentado o "controle indireto", em que a lei de controle é dependente dos parâmetros do modelo que são então as grandezas a serem estimadas.

Controle Indireto

Considere um processo controlável

$$\dot{x}_p = a_p x_p(t) + b_p u(t) \quad (353)$$

ou seja, que possui $b_p \neq 0$, bem como o modelo a ser casado

$$\dot{x}_m = a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad (354)$$

em que $|r(t)| \leq R, \forall t$.

Como no caso anterior, deseja-se obter u de modo que $x_p(t) \rightarrow x_m(t)$ ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_p(t) - x_m(t)| = 0 \quad (355)$$

Se a_p e b_p fossem conhecidos, a lei de controle

$$u(t) = \frac{a_m - a_p}{b_p} x_p(t) + \frac{b_m}{b_p} r(t) \quad (356)$$

seria interessante, pois nesse caso,

$$\dot{x}_p = a_p(t)x_p(t) + b_p(t)u(t) \quad (357)$$

$$= a_p x_p(t) + b_p (\theta x_p(t) + k r(t)) \quad (358)$$

$$= a_p x_p(t) + b_p \left(\frac{a_m - a_p}{b_p} x_p(t) + \frac{b_m}{b_p} r(t) \right) \quad (359)$$

$$= a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad (360)$$

ou seja, 360 possui forma similar ao 354.

Como a_p e b_p não são conhecidos, esses serão estimados e utilizados na expressão 356

$$u(t) = \frac{a_m - \hat{a}_p}{\hat{b}_p} x_p(t) + \frac{b_m}{\hat{b}_p} r(t) \quad (361)$$

Para que se obtenha as estimativas \hat{a}_p e \hat{b}_p , considere a equação para a estimativa \hat{x}_p da forma

$$\dot{\hat{x}}_p = a_m \hat{x}_p + (\hat{a}_p - a_m) x_p + \hat{b}_p u \quad (362)$$

De fato, utilizando-se o controle em 361 tem-se

$$\dot{\hat{x}}_p = a_m \hat{x}_p + (\hat{a}_p - a_m) x_p + \hat{b}_p \left[\frac{a_m - \hat{a}_p}{\hat{b}_p} x_p + \frac{b_m}{\hat{b}_p} r \right] \quad (363)$$

$$= a_m \hat{x}_p + (\hat{a}_p - a_m) x_p + (a_m - \hat{a}_p) x_p + b_m r \quad (364)$$

$$= a_m \hat{x}_p(t) + b_m r(t) \quad (365)$$

que é idêntico ao modelo de referência.

Definindo-se, agora, o erro de estimação

$$e(t) = x_p(t) - \hat{x}_p(t) \quad (366)$$

tem-se

$$\dot{e} = a_p x_p + b_p u - \left[a_m \hat{x}_p + (\hat{a}_p - a_m) x_p + \hat{b}_p u \right] \quad (367)$$

$$= a_p x_p + b_p u - a_m \hat{x}_p - \hat{a}_p x_p + a_m x_p - \hat{b}_p u \quad (368)$$

$$= (a_p - \hat{a}_p) x_p + a_m (x_p - \hat{x}_p) + (b_p - \hat{b}_p) u \quad (369)$$

$$= \overbrace{(a_p - \hat{a}_p) x_p}^{-\phi} + a_m \overbrace{(x_p - \hat{x}_p)}^e + \overbrace{(b_p - \hat{b}_p) u}^{-\psi} \quad (370)$$

em que, por conveniência e de modo similar aos casos anteriores,

$$\phi = \hat{a}_p - a_p \quad (371)$$

e

$$\psi = \hat{b}_p - b_p \quad (372)$$

Um possível ajuste para \hat{a}_p e \hat{b}_p é, assumindo $b_p > b_p^{\min} > 0$ poderia ser

$$\dot{\hat{a}}_p = e(t)x_p(t) \quad (373)$$

e

$$\dot{\hat{b}}_p = \begin{cases} e(t)u(t) & \text{se } \hat{b}_p > b_p^{\min} \\ e(t)u(t) & \text{se } \hat{b}_p = b_p^{\min} \text{ e } e(t)u(t) > 0 \\ 0 & \text{se } \hat{b}_p = b_p^{\min} \text{ e } e(t)u(t) \leq 0 \end{cases} \quad (374)$$

sendo que

$$\dot{\phi} = \dot{\hat{a}}_p \quad (375)$$

$$\dot{\psi} = \dot{\hat{b}}_p \quad (376)$$

A idéia de se definir a dinâmica de \hat{b}_p como em 374 é não deixar que essa grandeza não diminua para menos de b_p^{\min} .

Utilizando-se a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e^2 + \phi^2 + \psi^2) \quad (377)$$

que permite escrever

$$\dot{V} = e \dot{e} + \phi \dot{\phi} + \psi \dot{\psi} \quad (378)$$

$$= e (\phi x_p + a_m e + \psi u) - \phi e x_p - \psi \begin{Bmatrix} eu \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (379)$$

$$= a_m e^2 + \psi e u - \psi \begin{Bmatrix} eu \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (380)$$

Se $(\hat{b}_p > b_p^{\min})$ ou $(\hat{b}_p = b_p^{\min} \text{ com } e(t)u(t) > 0)$,

$$\dot{V} = a_m e^2 + \psi e u - \psi e u = a_m e^2 \leq 0 \quad (381)$$

pois $a_m < 0$ para um modelo estável.

Se $(\hat{b}_p = b_p^{\min})$ e $(u(t) \leq 0)$, então

$$\psi = b_p - \hat{b}_p = b_p - b_p^{\min} \geq 0 \quad (382)$$

$$eu \leq 0 \quad (383)$$

$$\dot{V} = a_m e^2 + \psi e u \leq 0 \quad (384)$$

Controle Adaptativo

Uma lei de controle estabilizante

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax(t) + b\phi^T(t)r(t) \quad (385)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (386)$$

$$z(t) = ky(t) \quad (387)$$

em que $(A_{n \times n}, b_{n \times 1})$ é estabilizável, $(A_{n \times n}, c_{n \times 1})$ é detetável, k é um ganho com o sinal $(+, -)$ conhecido, $r: R \rightarrow R^m$ e $\phi: R \rightarrow R^m$. Os sinais w e z são assumidos conhecidos e ϕ representa a lei de adaptação a ser buscada.

Nessas condições, se

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b \quad (388)$$

é uma função de transferência estritamente positivo real, ou seja

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in R \quad (389)$$

então sob a lei de adaptação

$$\dot{\phi} = -\text{sign}(k)z(t)r(t) \quad (390)$$

o ponto de equilíbrio $(x = 0, \phi = 0)$ é globalmente uniformemente estável.

Verificação: Como $G(s)$ é estritamente positivo real, pelo Lema de Kalman-Yakubovich, 167 - 170, com $\gamma = 0$, tem-se que dado $L > 0$, existe $P > 0$, tal que

$$A^T P + P A = -qq^T - \varepsilon L \quad (391)$$

$$P b - c = 0 \quad (392)$$

Seja a função candidata de Lyapunov

$$V = x^T P x + \frac{1}{|k|} \phi^T \phi \quad (393)$$

de modo que

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + \frac{2}{|k|} \dot{\phi}^T \phi \quad (394)$$

$$= (Ax + b\phi^T r)^T P x + x^T P (Ax + b\phi^T r) + \frac{2}{|k|} (-\text{sign}(k)zr)^T \phi \quad (395)$$

$$= x^T (A^T P + P A) x + r^T \phi b^T P x + x^T P b \phi^T r - \frac{2}{|k|} \text{sign}(k)zr^T \phi \quad (396)$$

$$= x^T (A^T P + P A) x + 2x^T P b \phi^T r - \frac{2}{|k|} \text{sign}(k)z\phi^T r \quad (397)$$

Notando que $Pb = c$ pela equação 392 e $z = ky = kc^T x$, tem-se

$$\dot{V} = x^T \left(A^T P + PA \right) x + 2x^T Pb\phi^T r - \frac{2}{|k|} \text{sign}(k) z\phi^T r \quad (398)$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x + 2x^T Pb\phi^T r - \frac{2}{|k|} \text{sign}(k) kx^T c\phi^T r \quad (399)$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x + 2x^T Pb\phi^T r - 2x^T c\phi^T r \quad (400)$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x + 2x^T Pb\phi^T r - 2x^T Pb\phi^T r \quad (401)$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x \quad (402)$$

$$= -x^T \left(qq^T + \varepsilon L \right) x \leq 0 \quad (403)$$

Exemplo de Controle Adaptativo

Considere um sistema em que o ganho k_p é desconhecido, a menos do seu sinal $(+, -)$

$$\dot{x}_p = Ax_p(t) + bk_p u(t) \quad (404)$$

$$y_p(t) = c^T x_p(t) \quad (405)$$

e o modelo de referência

$$\dot{x}_m = Ax_m(t) + bk_m r(t) \quad (406)$$

$$y_m(t) = c^T x_m(t) \quad (407)$$

No domínio transformado as funções de transferência correspondentes ao processo e ao modelo são

$$G_p(s) = c^T (sI - A)^{-1} bk_p \quad (408)$$

$$G_m(s) = c^T (sI - A)^{-1} bk_m \quad (409)$$

de formas que a única diferença é o ganho.

A lei de controle adaptativo será do tipo

$$u(t) = K(t)r(t) \quad (410)$$

Como antes, seja o erro definido por

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t) \quad (411)$$

e, portanto

$$\dot{e} = Ax_p(t) + bk_p u(t) - Ax_m(t) - bk_m r(t) \quad (412)$$

$$= A[x_p(t) - x_m(t)] + bk_p K(t)r(t) - k_m r(t) \quad (413)$$

$$= Ae(t) + bk_p \left[K(t) - \frac{k_m}{k_p} \right] r(t) \quad (414)$$

Por conveniência, adote-se a notação

$$\phi = K(t) - \frac{k_m}{k_p} \quad (415)$$

Para se adotar uma expressão para o controle estabilizante do tipo obtido na seção anterior, mais especificamente a expressão 390, seja

$$z = c^T e \quad (416)$$

de modo que

$$\dot{\phi} = -\text{sign}(k_p)z(t)r(t) \quad (417)$$

Como $\dot{\phi} = \dot{K}$ a lei de controle adaptativo é da forma

$$\dot{K} = -\text{sign}(k_p)z(t)r(t) \quad (418)$$

Controle Adaptativo Robusto a Perturbações

Considere um sistema em que a_p é desconhecida,

$$\dot{x}_p = a_p x_p(t) + u(t) + v(t) \quad (419)$$

e a perturbação é limitada por um valor específico

$$|v(t)| \leq v^{\max}, \forall t \quad (420)$$

O modelo de referência adotado é da forma

$$\dot{x}_m = a_m x_m(t) + r(t) \quad (421)$$

em que $a_m < 0$ e a referência r é suposta limitada.

Como a constante a_p é desconhecida, propõe-se um controle do tipo

$$u(t) = \theta(t)x_p(t) + r(t) \quad (422)$$

de modo que

$$\dot{x}_p = a_p x_p(t) + u(t) + v(t) \quad (423)$$

$$= a_p x_p(t) + \theta(t)x_p(t) + r(t) + v(t) \quad (424)$$

$$= [a_p + \theta(t)] x_p(t) + r(t) + v(t) \quad (425)$$

O objetivo da adaptação é portanto $[a_p + \theta] \rightarrow a_m$. Nesse contexto, é conveniente definir $\theta^* = a_m - a_p$.

Mais uma vez, seja o erro definido por

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t) \quad (426)$$

de modo que

$$\dot{e} = a_p x_p(t) + u(t) + v(t) - a_m x_m(t) - r(t) \quad (427)$$

$$= a_p x_p(t) + \theta(t) x_p(t) + r(t) + v(t) - a_m x_m(t) - r(t) \quad (428)$$

$$= a_p x_p(t) + \theta(t) x_p(t) + v(t) - a_m x_m(t) \quad (429)$$

Somando e subtraindo $a_m x_p$, resulta que

$$\dot{e} = a_p x_p + \theta x_p + v - a_m x_p + a_m x_p - a_m x_m \quad (430)$$

$$= (a_p - a_m) x_p + \theta x_p + v + a_m (x_p - x_m) \quad (431)$$

De modo análogo aos desenvolvimentos anteriores, seja

$$\phi = \theta - \theta^* \quad (432)$$

ou

$$\theta = \phi + \theta^* \quad (433)$$

$$= \phi + a_m - a_p \quad (434)$$

e

$$\dot{e} = (a_p - a_m) x_p + \theta x_p + v + a_m (x_p - x_m) \quad (435)$$

$$= (a_p - a_m) x_p + (\phi + a_m - a_p) x_p + v + a_m (x_p - x_m) \quad (436)$$

$$= a_m e + \phi x_p + v \quad (437)$$

Testa-se, agora, se uma boa opção seria

$$\dot{\phi} = -e(t) x_p(t) \quad (438)$$

utilizando-se a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e^2 + \phi^2) \quad (439)$$

Nessas condições,

$$\dot{V} = e \dot{e} + \phi \dot{\phi} \quad (440)$$

$$= e (a_m e + \phi x_p + v) + \phi (-e x_p) \quad (441)$$

$$= a_m e^2 + e \phi x_p - e \phi x_p + e v \quad (442)$$

$$= a_m e^2 + e v \quad (443)$$

e, portanto, $\dot{V} \leq 0$ se $v \equiv 0$.

Se v não é identicamente nulo, há necessidade de introduzir modificações na lei de adaptação.

Introdução de Zona-Morta Lembrando que v^{\max} é fornecido e $a_m < 0$, constata-se que

$$a_m e^2 + e v < 0 \quad (444)$$

se

$$|e| > \frac{v^{\max}}{|a_m|} \quad (445)$$

Assim, propõe-se

$$\dot{\phi} = \begin{cases} -e(t)x_p(t) & \text{se } |e| > \frac{v^{\max}}{|a_m|} \\ 0 & \text{se } |e| \leq \frac{v^{\max}}{|a_m|} \end{cases} \quad (446)$$

Sigma-Modificação A idéia é acrescentar o termo $-\sigma\theta$ à lei de adaptação, ou seja

$$\dot{\phi} = -e(t)x_p(t) - \sigma\theta(t) \quad (447)$$

Com esta modificação, para a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e^2 + \phi^2) \quad (448)$$

tem-se

$$\dot{V} = e \dot{e} + \phi \dot{\phi} \quad (449)$$

$$= e(a_me + \phi x_p + v) + \phi(-ex_p - \sigma\theta) \quad (450)$$

$$= a_me^2 + ev - \phi\sigma\theta \quad (451)$$

Lembrando que $\phi = \theta - \theta^*$ ou $\theta = \phi + \theta^*$,

$$\dot{V} = a_me^2 + ev - \phi\sigma\theta \quad (452)$$

$$= a_me^2 + ev - \phi\sigma(\phi + \theta^*) \quad (453)$$

$$= a_me^2 + ev - \sigma\phi^2 - \sigma\phi\theta^* \quad (454)$$

Para ϕ suficientemente grandes, ter-se-á $ev^{\max} - \sigma\phi^2 - \sigma\phi\theta^* < 0$. Logo, $\dot{V} < 0$ fora de uma região $D = \{ (e, \phi) \mid |e| < L_e \text{ e } |\phi| < L_\phi \}$ para constantes L_e e L_ϕ .

e-Modificação A idéia é acrescentar o termo $-\gamma|e|\theta$ à lei de adaptação, ou seja

$$\dot{\phi} = -e(t)x_p(t) - \gamma|e(t)|\theta(t) \quad (455)$$

Com esta modificação, para a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e^2 + \phi^2) \quad (456)$$

tem-se

$$\dot{V} = e \dot{e} + \phi \dot{\phi} \quad (457)$$

$$= e(a_me + \phi x_p + v) + \phi(-ex_p - \gamma|e|\theta) \quad (458)$$

$$= a_me^2 + ev - \gamma|e|\phi\theta \quad (459)$$

Lembrando que $\phi = \theta - \theta^*$ ou $\theta = \phi + \theta^*$,

$$\dot{V} = a_m e^2 + ev - \gamma |e| \phi \theta \quad (460)$$

$$= a_m e^2 + ev - \gamma |e| \phi (\phi + \theta^*) \quad (461)$$

$$= a_m e^2 + ev - \gamma |e| \phi^2 - \gamma |e| \phi \theta^* \quad (462)$$

$$\leq -|e| \left(-a_m |e| - v^{\max} + \gamma \phi^2 + \gamma \phi \theta^* \right) \quad (463)$$

e para ϕ suficientemente grande, $-a_m |e| - v^{\max} + \gamma \phi^2 + \gamma \phi \theta^* \geq 0$. Logo, $\dot{V} < 0$ fora de uma região $D = \{ (e, \phi) \mid |e| < L_e \text{ e } |\phi| < L_\phi \}$ para constantes L_e e L_ϕ .

Fenômeno do Salto

Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos da figura 12. A função descritiva para a

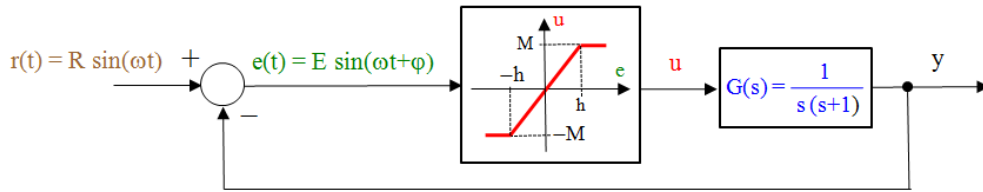


Figura 12: Exemplo de sistema que pode apresentar o fenômeno do salto.

não linearidade ilustrada é

$$N(E) = \frac{2M}{\pi h} \left[\sin^{-1} \left(\frac{h}{E} \right) + \frac{h}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{E} \right)^2} \right], \quad E \geq h \quad (464)$$

Por inspeção da figura 12

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + N(E) G(s)} \quad (465)$$

ou

$$E(s) [1 + N(E) G(s)] = R(s) \quad (466)$$

Em termos de módulo, tem-se que

$$E(j\omega) [1 + N(E) G(j\omega)] = R(j\omega) \quad (467)$$

$$|E(j\omega)| \left| [1 + N(E) G(j\omega)] \right| = |R(j\omega)| \quad (468)$$

$$E \left| 1 + \frac{N(E)}{j\omega(j\omega + 1)} \right| = R \quad (469)$$

$$E \frac{|j\omega(j\omega + 1) + N(E)|}{|j\omega(j\omega + 1)|} = R \quad (470)$$

$$E |N(E) - \omega^2 + j\omega| = R |j\omega - \omega^2| \quad (471)$$

$$E \sqrt{[N(E) - \omega^2]^2 + \omega^2} = R \sqrt{\omega^4 + \omega^2} \quad (472)$$

$$E^2 [N(E)^2 - 2N(E)\omega^2 + \omega^4 + \omega^2] = R^2 (\omega^4 + \omega^2) \quad (473)$$

$$E^2 N(E)^2 - 2N(E) E^2 \omega^2 + (E^2 - R^2) (\omega^2 + \omega^4) = 0 \quad (474)$$

Introduzindo a notação $X = N(E) E$ pode-se reescrever 474 na forma de uma equação do segundo grau

$$X^2 - 2E\omega^2 X + (E^2 - R^2) (\omega^2 + \omega^4) = 0 \quad (475)$$

e, portanto,

$$X = \frac{2E\omega^2 \pm \sqrt{4E^2\omega^4 - 4(E^2 - R^2)(\omega^2 + \omega^4)}}{2} \quad (476)$$

$$= \frac{2E\omega^2 \pm 2\sqrt{-E^2\omega^2 + R^2\omega^2 + R^2\omega^4}}{2} \quad (477)$$

$$= E\omega^2 \pm \sqrt{-E^2\omega^2 + R^2(1 + \omega^2)\omega^2} \quad (478)$$

$$= E\omega^2 \pm \omega \sqrt{R^2(1 + \omega^2) - E^2} \quad (479)$$

Continuando o desenvolvimento, tem-se

$$N(E) E = X \quad (480)$$

$$= E\omega^2 \pm \omega \sqrt{R^2(1 + \omega^2) - E^2} \quad (481)$$

e

$$N(E) = \frac{1}{E} (E\omega^2 \pm \omega \sqrt{R^2(1 + \omega^2) - E^2}) \quad (482)$$

$$= \omega^2 \pm \omega \sqrt{\left(\frac{R}{E}\right)^2 (1 + \omega^2) - 1} \quad (483)$$

Portanto, para se determinar a amplitude de oscilação E , basta resolver a equação para cada valor de ω

$$\frac{2M}{\pi h} \left[\sin^{-1} \left(\frac{h}{E} \right) + \frac{h}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{E} \right)^2} \right] = \omega^2 \pm \omega \sqrt{\left(\frac{R}{E}\right)^2 (1 + \omega^2) - 1} \quad (484)$$

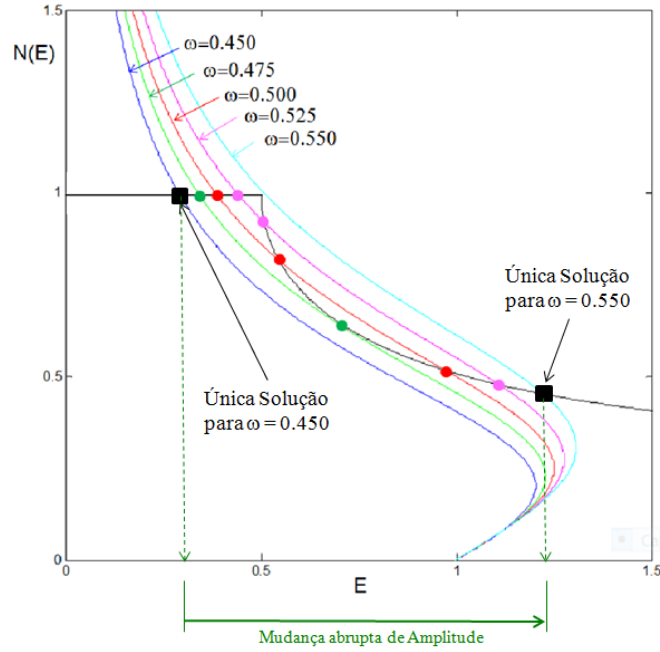


Figura 13: Método gráfico para obtenção de E para cada ω .

Uma forma de se resolver 484 é utilizar o método gráfico. Na figura 13, tem-se o caso de $M = 0.5$, $h = 0.5$, $R = 1$ e $\omega \in \{0.450, 0.475, 0.500, 0.525, 0.550\}$. Verifica-se na figura 13, que á medida que ω é variada, a solução da equação 484 também é modificada e, eventualmente, pode *saltar* para uma com o valor da amplitude E diferente.

Mais detalhes sobre o fenômeno do salto pode ser visto em [10].

Linearização Exata por Realimentação de Estado

Preâmbulo

Suponha que a representação de um sistema esteja na forma especial

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} + B\beta^{-1}(\bar{z}) [u - \bar{\alpha}(\bar{z})] \quad (485)$$

Nesse caso, a lei de controle

$$u = \bar{\alpha}(\bar{z}) + \beta(\bar{z})\bar{v} \quad (486)$$

torna linear o sistema

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} + B\beta^{-1}(\bar{z}) [u - \bar{\alpha}(\bar{z})] \quad (487)$$

$$= A\bar{z} + B\beta^{-1}(\bar{z}) [\bar{\alpha}(\bar{z}) + \beta(\bar{z})\bar{v} - \bar{\alpha}(\bar{z})] \quad (488)$$

$$= A\bar{z} + B\bar{v} \quad (489)$$

Ainda mais, se (A, B) for controlável, então $\exists P$ não singular, tal que a mudança de base

$$z = P\bar{z} \quad (490)$$

permite obter a representação na forma canônica controlável

$$\dot{\bar{z}} = PAP^{-1}\bar{z} + PB\bar{v} \quad (491)$$

$$= A_c\bar{z} + B_c\bar{v} \quad (492)$$

$$\dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{v} \quad (493)$$

e utilizar uma lei de controle do tipo realimentação de estados

$$\bar{v} = -K\bar{z} + v \quad (494)$$

que aloca todos os polos em 0

$$\dot{\bar{z}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{A_B} \bar{z} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B_B} v \quad (495)$$

Esta representação recebe o nome de forma canônica de Brunovsly e corresponde a se ter uma cadeia de integradores

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{z}_2 \quad (496)$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = \bar{z}_3 \quad (497)$$

$$\vdots \quad (498)$$

$$\dot{\bar{z}}_n = v \quad (499)$$

Combinado-se 486 e 494, bem como levando em consideração 490, obtém-se

$$u = \bar{\alpha}(\bar{z}) + \beta(\bar{z})\bar{v} \quad (500)$$

$$= \bar{\alpha}(\bar{z}) + \beta(\bar{z})(-K\bar{z} + v) \quad (501)$$

$$= \bar{\alpha}(\bar{z}) + \beta(\bar{z})(-KP\bar{z} + v) \quad (502)$$

$$= \overbrace{(\bar{\alpha}(\bar{z}) + -\beta(\bar{z})KP\bar{z})}^{\alpha(\bar{z})} + \beta(\bar{z})v \quad (503)$$

$$= \alpha(\bar{z}) + \beta(\bar{z})v \quad (504)$$

Portanto, caso a representação do sistema esteja na forma

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} + B\beta^{-1}(\bar{z})[u - \bar{\alpha}(\bar{z})] \quad (505)$$

poder-se-ia obter $u = \alpha(\bar{z}) + \beta(\bar{z})v$, sob condições de contrabilidade, de forma que a representação do sistema se torne uma cadeia de integradores 496.

Linearização por Realimentação do Estado

A apresentação desta seção foi extraída de [9]. A idéia central da linearização exata por realimentação de estado é obter uma transformação homeomórfica $T : R^n \rightarrow R^n$ que permita reescrever um sistema na representação original

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (506)$$

para a forma 485.

Fazendo-se

$$\bar{z} = T(x) \quad (507)$$

a equação 506 permite escrever

$$\dot{\bar{z}} = T_x(x) \frac{dx}{dt} \quad (508)$$

$$= T_x(x) [f(x) + g(x)u] \quad (509)$$

$$= T_x(x) f(x) + T_x(x) g(x)u \quad (510)$$

Por outro lado, busca-se $\tilde{\alpha}(\cdot)$ e $\tilde{\beta}(\cdot)$ de modo que

$$\dot{\bar{z}} = A_B \bar{z} + B_B \beta^{-1}(\bar{z}) [u - \alpha(\bar{z})] \quad (511)$$

$$= A_B \bar{z} + B_B \beta^{-1}(T(x)) [u - \alpha(T(x))] \quad (512)$$

$$= A_B T(x) + B_B \tilde{\beta}^{-1}(x) [u - \tilde{\alpha}(x)] \quad (513)$$

ou seja, 510 se torna idêntico à forma conveniente 513. Portanto, a transformação $T(\cdot)$ deve ser tal que

$$T_x(x) f(x) = A_B T(x) - B_B \tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) \quad (514)$$

$$T_x(x) g(x) = B_B \tilde{\beta}^{-1}(x) \quad (515)$$

Denotando por $T_i(x)$ componentes de $T(x)$,

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} \quad (516)$$

os termos à direita de 514 e 515 são, respectivamente,

$$A_B T(x) - B_B \tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) \end{bmatrix} \quad (517)$$

$$B_B \tilde{\beta}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ \tilde{\beta}^{-1}(x) \end{bmatrix} \quad (518)$$

já que

$$A_B T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} \quad (519)$$

$$= \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (520)$$

e

$$-B_B \tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) \end{bmatrix} \quad (521)$$

Assim, a transformação buscada $T(\cdot)$ deve satisfazer

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) = T_2(x) \quad (522)$$

...

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) = T_n(x) \quad (523)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) = -\tilde{\beta}^{-1}(x) \tilde{\alpha}(x) \quad (524)$$

e

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0 \quad (525)$$

...

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) = 0 \quad (526)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) = \beta^{-1}(x) \neq 0 \quad (527)$$

Tendo-se obtido $T(\cdot)$, o controle $u = \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\beta}(x) v$ corresponde a

$$\tilde{\alpha}(x) = -\frac{\frac{\partial T_n}{\partial x} f(x)}{\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x)} \quad (528)$$

$$\tilde{\beta}(x) = \frac{1}{\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x)} \quad (529)$$

Exemplo: Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = a \sin(x_2) \quad (530)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u \quad (531)$$

em que se pode fazer a associação, denotando $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$,

$$f(x) = \begin{bmatrix} a \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} \quad (532)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (533)$$

As condições requeridas para $T(x)$ são

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0 \quad (534)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) = T_2(x) \Rightarrow T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \sin(x_2) \quad (535)$$

e, também,

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \cos(x_2) \neq 0 \quad (536)$$

Arbitrando-se $T_1(x) = x_1$ resulta $T_2(x) = a \sin(x_2)$, donde

$$\tilde{\alpha}(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial T_2}{\partial x} f}{\frac{\partial T_2}{\partial x} g} = x_1^2 \quad (537)$$

$$\tilde{\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{\frac{\partial T_2}{\partial x} g} = \frac{1}{a \cos(x_2)} \quad (538)$$

e o controle linearizante é

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos(x_2)} v \quad (539)$$

válido para $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

De fato, utilizando-se o controle $u(x_1, x_2, v)$ que foi calculado, tem-se que o sistema, nas novas coordenadas $\{z_1, z_2\}$ possui a sua dinâmica descrita por

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \dot{T}_1(x) \quad (540)$$

$$= \dot{x}_1 \quad (541)$$

$$= a \sin(x_2) \quad (542)$$

$$= T_2(x) \quad (543)$$

$$= z_2 \quad (544)$$

e

$$\dot{\tilde{z}}_2 = \dot{T}_2(x) \quad (545)$$

$$= a \frac{d \sin(x_2)}{dt} \quad (546)$$

$$= a \cos(x_2) \dot{x}_2 \quad (547)$$

$$= a \cos(x_2) (-x_1^2 + u) \quad (548)$$

$$= a \cos(x_2) \left(-x_1^2 + x_1^2 + \frac{1}{a \cos(x_2)} v \right) \quad (549)$$

$$= v \quad (550)$$

ou seja,

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{z}_2 \quad (551)$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = v \quad (552)$$

como esperado.

Linearização Entrada-Saída

Considere agora o problema de linearização entrada-saída de um sistema do tipo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (553)$$

$$y = h(x) \quad (554)$$

e note que se $h(x)$ pudesse ser utilizado para construir a transformação $T(\cdot)$ através de $T_1(\cdot) \equiv h(\cdot)$ e $\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) = T_n(x)$, então

$$\dot{z} = A_B z + B_B v \quad (555)$$

$$y = C z \quad (556)$$

com

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (557)$$

Caso as condições 523 e 526 não sejam satisfeitas por tal $T(\cdot)$, há necessidade de um procedimento alternativo. Faça-se $\psi_1(\cdot) \equiv h(\cdot)$ e construa $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$ através de sucessivas diferenciações da expressão de $y(\cdot)$, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} [f + gu]; \text{ se } \frac{\partial \psi_1}{\partial x} g = 0 \text{ então } \psi_2 \triangleq \frac{\partial \psi_1}{\partial x} f \quad (558)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} [f + gu]; \text{ se } \frac{\partial \psi_2}{\partial x} g = 0 \text{ então } \psi_3 \triangleq \frac{\partial \psi_2}{\partial x} f \quad (559)$$

$$\dots$$

$$\frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} = \frac{\partial \psi_{r-1}}{\partial x} [f + gu]; \text{ se } \frac{\partial \psi_{r-1}}{\partial x} g = 0 \text{ então } \psi_r \triangleq \frac{\partial \psi_{r-1}}{\partial x} f \quad (560)$$

Caso se obtenha

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x} g \neq 0 \quad (561)$$

tem-se que

$$\frac{d^r y}{dt^r} = \frac{\partial \psi_r}{\partial x} f + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} g u \quad (562)$$

e portanto, a forma desejada de representação

$$\frac{d^r y}{dt^r} = v \quad (563)$$

pode ser conseguida substituindo-se em 562 a lei de controle

$$u = \frac{1}{\frac{\partial \psi_r}{\partial x} g} \left[-\frac{\partial \psi_r}{\partial x} f + v \right] \quad (564)$$

O número r é chamado de grau relativo do sistema 553.

Exemplo: Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (565)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \quad (566)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (567)$$

em que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$.

Derivando-se y , obtém-se que

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \quad (568)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \quad (569)$$

e, logo, nota-se que \dot{y} não depende explicitamente de u , mas \ddot{y} sim. Portanto, $r = 2$ e o controle

$$u = x_1 - (1 - x_1^2)x_2 + v \quad (570)$$

faz a relação entrada-saída ser do tipo linear

$$\ddot{y} = v \quad (571)$$

que é, simplesmente, uma cadeia de integradores.

Observação a respeito da dinâmica zero Assumindo $r > 1$, seja $\phi(x) = [\phi_1(x) \cdots \phi_{n-r}(x)]^T$ um homeomorfismo arbitrário tal que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n - r - 1 \quad (572)$$

e $\psi(x) = [\psi_1(x) \cdots \psi_r(x)]^T$ tal que

$$\psi_{i+1} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f \quad \text{para } i = 1, \dots, r - 1 \quad (573)$$

$$\psi_1 = h \quad (574)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, r - 1 \quad (575)$$

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x} g \neq 0 \quad (576)$$

A transformação

$$\bar{z} = T(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (577)$$

permite reescrever o sistema 553 na forma

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(\bar{z})} \quad (578)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \beta^{-1}(x) [u - \alpha(x)] \quad (579)$$

$$y = C_c \xi \quad (580)$$

em que se constata que os componentes η não afetam a saída y do sistema.

A dinâmica de η para o caso $\xi \equiv 0$ é descrita por

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (581)$$

e recebe o nome de “dinâmica zero”.

No caso particular de sistemas lineares, a estabilidade da dinâmica zero se relaciona com o fato dos zeros do sistema estarem no semiplano esquerdo.

Assim, por analogia, diz-se que o sistema não-linear 553 é de fase mínima se a dinâmica zero 581 é assintoticamente estável do domínio considerado.

Exemplo: Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} u \quad (582)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (583)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 + u \quad (584)$$

$$y = x_2 \quad (585)$$

Em vista de

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3 \quad (586)$$

não depender explicitamente de u , mas

$$\ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u \quad (587)$$

apresentar u no lado direito, $r = 2$. A associação $\psi_1(x) = x_2$ e $\psi_2(x) = x_3$, leva às expressões $\beta = 1$ e $\alpha = -x_1 x_3$.

Ainda, fazendo-se $x_2 \equiv 0$ e $x_3 \equiv 0$, verifica-se que a dinâmica zero é dada por

$$\dot{x}_1 = -x_1 \quad (588)$$

e, portanto, o sistema é de fase mínima.

Detalhe de Notação Em diversos textos sobre controle não linear é utilizada notação

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (589)$$

referido como Derivadas de Lie. Na apresentação simplificada do presente texto não se fez necessária a utilização dessa ferramenta de geometria diferencial.

Controle por Modo Deslizante

As trajetórias de um sistema podem ser confinadas a uma superfície através de sinais de controle chaveados.

Seja um sistema descrito por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (590)$$

em que $x \in R^n$ e considere uma referência $x^D(t)$, fornecida *a priori*.

Deseja-se obter uma lei controle $u(t)$ que faça $x(t) \rightsquigarrow x^D(t)$.

Seja

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - x^D(t) \quad (591)$$

cujas dinâmica é descrita por

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u, t) \quad (592)$$

ou

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{d}{dt} (x - x^D) \quad (593)$$

$$= \dot{x} - \dot{x}^D \quad (594)$$

$$= f(x, u) - \dot{x}^D \quad (595)$$

$$= \underbrace{\tilde{f}(\tilde{x}, u, t)}_{f(\tilde{x} + x^D, u) - \dot{x}^D} \quad (596)$$

Considere uma superfície S definida por $s : R^n \rightarrow R$, ou seja,

$$s(\tilde{x}) = 0 \quad (597)$$

e assumamos que existam valores de $u(t)$, denotados u^+ e u^- de modo que, em cada ponto \tilde{x} ,

$$\langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u^+, t) \rangle > 0 \quad (598)$$

$$\langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u^-, t) \rangle < 0 \quad (599)$$

Chaveando-se $u(t)$ entre u^+ e u^- de modo que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s(\tilde{x}(t))^2 \leq -\eta \left| s(\tilde{x}(t)) \right| \quad (600)$$

em que $\eta > 0$, pode-se fazer a trajetória evoluir junto à superfície S como na figura 14, caracterizada por $s(\tilde{x}) \equiv 0$. De fato,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s(\tilde{x}(t))^2 = \langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u, t) \rangle s(\tilde{x}(t)) \quad (601)$$

ou seja, se $s(\tilde{x}(t)) > 0$ e $u(t) = u^-$, resulta

$$\langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u^-, t) \rangle s(\tilde{x}(t)) \leq -\eta s(\tilde{x}(t)) \quad (602)$$

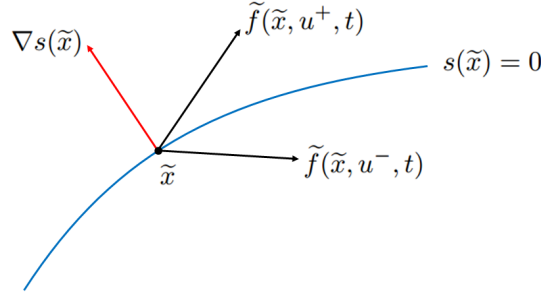


Figura 14: Ilustração do uso de $\nabla s(\tilde{x}(t))$ para caracterizar o escorregamento.

que satisfaz 600. Quando $s(\tilde{x}(t)) < 0$ e $u(t) = u^+$, tem-se

$$\langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u^+, t) \rangle s(\tilde{x}(t)) \leq +\eta s(\tilde{x}(t)) \quad (603)$$

de modo que, localmente, \tilde{x} tende a se aproximar de $s(\tilde{x}) = 0$.

Uma escolha simples e conveniente para a expressão de $s(\cdot)$ é

$$s(\tilde{x}) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha \right)^{n-1} \tilde{x}_1 \quad (604)$$

com $\alpha > 0$ pois se $s \downarrow 0 \implies \tilde{x} \downarrow 0$.

Um problema fundamental é o vigoroso chaveamento de $u(t)$ entre u^+ e u^- em instantes infinitesimais, levando 592 a ter infinitas descontinuidades no termo do lado direito. O tratamento rigoroso deste problema requer resultados como o de Filippov em que se verifica que o termo descontínuo pode ser substituído por um outro equivalente, dado por

$$\tilde{f}_{eq}(\tilde{x}, t) = \alpha \tilde{f}(\tilde{x}, u^+, t) + (1 - \alpha) \tilde{f}(\tilde{x}, u^-, t) \quad (605)$$

e α pode ser calculado por

$$\alpha = \frac{\langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u^-, t) \rangle}{\langle \nabla s(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u^+, t) - \tilde{f}(\tilde{x}, u^-, t) \rangle} \quad (606)$$

Exemplo O controle chaveado pode ser utilizado para conferir robustez à incertezas, porém com a desvantagem de geração de perturbações de alta frequência (no caso ideal, infinita, mas que na prática é limitada pela velocidade de comutação) que, eventualmente, pode estar, por exemplo, causar vibrações indesejáveis.

Considere um sistema descrito por

$$\ddot{y} = a_R(y) + u$$

Deseja-se que a saída $y(t)$ rastreie uma função conhecida $y_D(t)$, apesar da incerteza em a_R (real) que difere do a_N (nominal), mas de forma limitada

$$|a_R(\xi) - a_N(\xi)| < A(\xi), \forall \xi \in R \quad (607)$$

Fazendo-se a associação usual para obter uma representação no espaço de estados

$$x_1 \triangleq y \quad (608)$$

$$x_2 \triangleq \dot{y} \quad (609)$$

obtém-se

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (610)$$

$$\dot{x}_2 = a_R(x_1) + u \quad (611)$$

que corresponde a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} \quad (612)$$

Defina-se, agora

$$x_1^D \triangleq y^D \quad (613)$$

obtendo-se

$$\dot{x}_1^D \triangleq \dot{y}^D \equiv x_2^D \quad (614)$$

Constata-se de 614 que

$$x^D = \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^D \\ \dot{y}^D \end{bmatrix}$$

e, portanto, deve-se atentar para a diferenciabilidade de $y(t)$.

O erro de rastreamento é dado, portanto, por

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^D \\ x_2 - x_2^D \end{bmatrix}$$

e a equação da sua dinâmica é

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - \dot{x}_1^D \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_2^D \end{bmatrix} \quad (615)$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 - x_2^D \\ a_R(x_1) + u - \dot{y}^D \end{bmatrix} \quad (616)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 + x_2^D - x_2^D \\ a_R(\tilde{x}_1 + x_1^D) + u - \dot{y}^D \end{bmatrix} \quad (617)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) \\ \tilde{f}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) \end{bmatrix} \quad (618)$$

Escolhendo a superfície de deslizamento como sendo a "clássica"

$$s(\tilde{x}) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha \right) \tilde{x}_1 \quad (619)$$

$$= \dot{\tilde{x}}_1 + \alpha \tilde{x}_1 \quad (620)$$

e, portanto,

$$\nabla s = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (621)$$

As condições de comutação são

$$\text{Se } \{s(\tilde{x}) > 0\} \text{ então } \{u(t) = u^-\} \quad (622)$$

em que u^- deve ser tal que $\langle \nabla s(\tilde{x}) | \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u^-) \rangle s(\tilde{x}) < 0$ e, analogamente,

$$\text{Se } \{s(\tilde{x}) < 0\} \text{ então } \{u(t) = u^+\} \quad (623)$$

em que u^+ deve ser tal que $\langle \nabla s(\tilde{x}) | \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u^+) \rangle s(\tilde{x}) > 0$.

Para simplificar, seja $\alpha = 1$. Nesse caso

$$\langle \nabla s(\tilde{x}) | \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) \\ \tilde{f}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) \end{bmatrix} \quad (624)$$

em que, reescrevendo-se \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 em termos da variável y e da referência y^D fornecida, obtém-se

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) = \tilde{x}_2 \quad (625)$$

$$= x_2 - x_2^D \quad (626)$$

$$= \dot{y} - \dot{y}^D \quad (627)$$

e

$$\tilde{f}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) = a_R(\tilde{x}_1 + x_1^D) + u - y^D \quad (628)$$

$$= a_R(x_1 - x_1^D + x_1^D) + u - y^D \quad (629)$$

$$= a_R(y) + u - y^D \quad (630)$$

de forma que, no caso específico,

$$\langle \nabla s(\tilde{x}) | \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u) \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} - \dot{y}^D \\ a_R(y) + u - \ddot{y} \end{bmatrix} \quad (631)$$

$$= \dot{y} - \dot{y}^D + a_R(y) + u - \ddot{y} \quad (632)$$

e se adotasse

$$u = \dot{y}^D - \dot{y} - a_R(y) + \ddot{y} \quad (633)$$

ter-se ia $\langle \nabla s(e) | \tilde{f}(e_1, e_2, u) \rangle = 0$.

Como a_R difere do a_N (no pior caso de $A(y)$), se usasse o valor nominal $a_N(\cdot)$ para gerar u , $\tilde{x}(t)$ poderia evoluir fora da superfície $s(\tilde{x}) = 0$. Para forçar um "escorregamento", toma-se então um valor $M > A(y)$ para se definir u^+ e u^- para os casos de $s(\tilde{x}) < 0$ e $s(\tilde{x}) > 0$, respectivamente, resultando na lei de controle

$$u = \dot{y}^D - \dot{y} - a_N(y) + \ddot{y} - M \operatorname{sign} \{s(\tilde{x})\} \quad (634)$$

Flatness

Considere um motor DC, acionado pela armadura, cujo comportamento é descrito pelas equações

$$L \frac{di}{dt} = -Ri - K_1\omega + u \quad (635)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_2i - B\omega \quad (636)$$

Adotando-se a notação $y = \omega$, tem-se que

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_2i - B\omega \quad (637)$$

$$K_2i = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (638)$$

$$i = \frac{1}{K_2} \left(J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \right) \quad (639)$$

$$i = \frac{1}{K_2} (J\dot{y} + By) \quad (640)$$

e, também,

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + K_1\omega \quad (641)$$

$$= \frac{L}{K_2} \frac{d}{dt} (J\dot{y} + By) + \frac{R}{K_2} (J\dot{y} + By) + K_1\omega \quad (642)$$

$$= \frac{L}{K_2} (J\ddot{y} + B\dot{y}) + \frac{R}{K_2} (J\dot{y} + By) + K_1y \quad (643)$$

$$= \frac{LJ}{K_2} \ddot{y} + \frac{BL + RJ}{K_2} \dot{y} + \frac{RB + K_1K_2}{K_2} y \quad (644)$$

Portanto, fornecendo-se $y(t)$ desejado, obtém-se o sinal de controle $u(\cdot)$ requerido para que se rastreie $y(t)$:

$$u = a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y \quad (645)$$

em que

$$a_1 = \frac{LJ}{K_2}; a_2 = \frac{BL + RJ}{K_2}; a_3 = \frac{RB + K_1K_2}{K_2} \quad (646)$$

Assim, um sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (647)$$

com $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ e $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T$, $m \leq n$, é dito ser diferencialmente flat se existe uma função $y(t) = [y_1(t) \dots y_m(t)]^T$, chamado de saída flat, de modo que $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(p+1)}(t)$ formam um conjunto independente para algum p e tal que

$$y(t) = h(x(t), u(t), \dots, u^{(r)}(t)) \quad (648)$$

e reciprocamente

$$x(t) = \varphi(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(p)}(t)) \quad (649)$$

$$u(t) = \psi(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(p+1)}(t)) \quad (650)$$

A transformação (φ, ψ) é chamada de isomorfismo de Lie-Bäcklund. Se um sistema é flat, pode-se mostrar que existe uma realimentação dinâmica endógena

$$u = \sigma(x, z, v) \quad (651)$$

$$\dot{z} = \rho(x, z, u) \quad (652)$$

de modo que a malha fechada pode ser representada na forma canônica

$$y^{(p+1)} = v \quad (653)$$

Portanto, se for dada uma referência $y_{ref}(t)$, pode-se determinar $v_{ref}(t) = y_{ref}^{(p+1)}(t)$ e definir

$$e = y - y_{ref} \quad (654)$$

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_{ref} \quad (655)$$

$$\vdots$$

$$e^{(p+1)} = y^{(p+1)} - y_{ref}^{(p+1)} \quad (656)$$

$$= v - v_{ref} \quad (657)$$

Há diversas formas para se aproveitar a estrutura especial da descrição do sistema dinâmico 648, 649 e 650. Uma forma seria adotar

$$e^{(p+1)} = - \sum_{k=0}^p \alpha_k e^{(k)} \quad (658)$$

que corresponde a se ter

$$e^{(p+1)} + \alpha_k e^{(k)} + \dots + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 = 0 \quad (659)$$

e a estabilidade assintótica seria obtida se todas as raízes de

$$s^{(p+1)} + \alpha_k s^{(k)} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \quad (660)$$

estiverem estritamente localizados no semi-plano esquerdo.

No exemplo do motor DC, assuma que $\omega = 0$ no instante 0 e deseja-se atingir $\omega = \omega_f$ no instante t_f .

a) Design empregando flatness:

Para a trajetória de $y(t)$, seja

$$y^{nom} = \omega^{nom}(t) \quad (661)$$

$$= \omega_f \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{t}{t_f} \right) \quad (662)$$

$$= \omega_f \frac{3t_f t^2 - 2t^3}{t_f^3} \quad (663)$$

que é uma função sigmóide para $t \in [0, t_f]$. Necessita-se, ainda, das expressões

$$\dot{y}^{nom} = \frac{d}{dt} \left(\omega_f \frac{3t_f t^2 - 2t^3}{t_f^3} \right) \quad (664)$$

$$= 6\omega_f \frac{t_f t - t^2}{t_f^3} \quad (665)$$

e

$$\ddot{y}^{nom} = \frac{d}{dt} \left(6\omega_f \frac{t_f t - t^2}{t_f^3} \right) \quad (666)$$

$$= 6\omega_f \frac{t_f - 2t}{t_f^3} \quad (667)$$

Da expressão 644, o sinal de controle que faz a saída acompanhar a trajetória sigmoidal proposta é dada por

$$u^{nom} = \frac{LJ}{K_2} \ddot{y}^{nom} + \frac{BL + RJ}{K_2} \dot{y}^{nom} + \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} y^{nom} \quad (668)$$

$$= \frac{LJ}{K_2} 6\omega_f \frac{t_f - 2t}{t_f^3} + \frac{BL + RJ}{K_2} 6\omega_f \frac{t_f t - t^2}{t_f^3} + \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} \omega_f \frac{3t_f t^2 - 2t^3}{t_f^3} \quad (669)$$

$$= A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4 \quad (670)$$

em que

$$A_1 = -2 \frac{RB + K_1 K_2}{K_2 t_f^3} \omega_f \quad (671)$$

$$A_2 = \left(3 \frac{RB + K_1 K_2}{K_2 t_f^2} - 6 \frac{BL + RJ}{K_2 t_f^3} \right) \omega_f \quad (672)$$

$$A_3 = \left(6 \frac{BL + RJ}{K_2 t_f^2} - 12 \frac{LJ}{K_2 t_f^3} \right) \omega_f \quad (673)$$

$$A_4 = 6 \frac{LJ}{K_2 t_f^2} \omega_f \quad (674)$$

A lei de controle em 670 é de malha aberta e, portanto, suscetível a erros de modelamento. Para que se faça correções em torno de y^{nom} , pode-se utilizar pequenas correções em torno da trajetória nominal gerada por u^{nom} , por exemplo com o auxílio de um controlador PID:

$$u = u^{nom} - K_P (y^{nom} - \omega) - K_D \dot{y}^{nom} - K_I \int_0^t (y^{nom} - \omega) d\tau \quad (675)$$

b) Design empregando controle PID clássico: Seja a referência uma função do tipo degrau com $\omega_r(t) = \omega_f 1(t)$, em que

$$1(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (676)$$

e defina

$$e = y - y_r \quad (677)$$

$$= \omega_r - \omega \quad (678)$$

Da expressão 644,

$$u_r = \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} \omega_f \quad (679)$$

e uma lei de controle tipo PID seria da forma

$$u = u_r - K_P(\omega_r - \omega) - K_D \dot{\omega} - K_I \int_0^t (\omega_r - \omega) d\tau \quad (680)$$

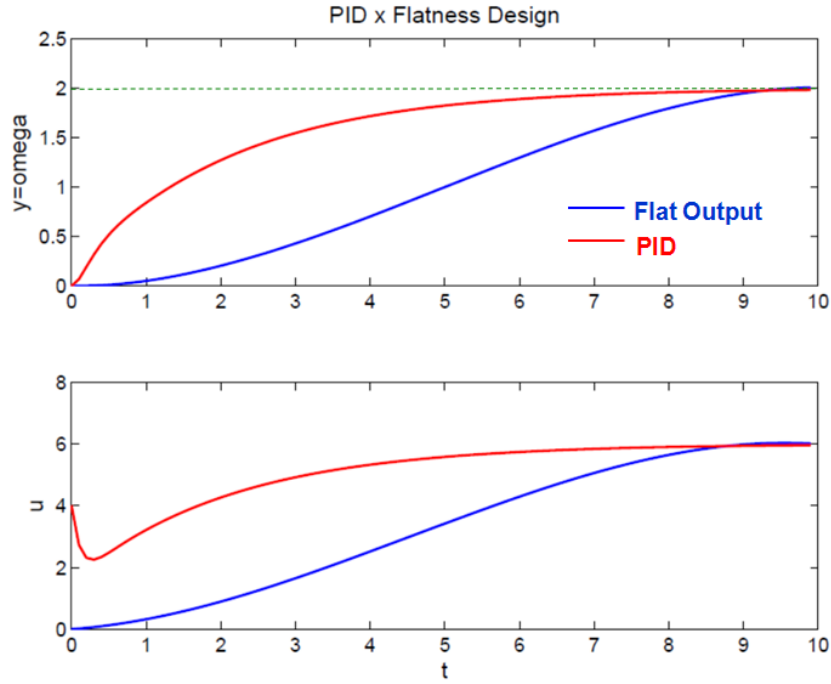


Figura 15: Comparação entre um projeto utilizando Flatness e um PID simples.

Bilinearização de Carleman

A bilinearização de Carleman pode ser útil para reduzir um sistema genérico

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (681)$$

para a forma

$$\dot{X} = AX + BXu \quad (682)$$

Considere, por exemplo, o sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3 + xu \quad (683)$$

Notando que

$$\dot{(x^2)} = 2x\dot{x} \quad (684)$$

$$\dot{(x^3)} = 3x^2\dot{x} \quad (685)$$

tem-se que

$$\dot{x} = -x^3 + xu \quad (686)$$

$$\dot{(x^2)} = 2x\dot{x} = 2x(-x^3 + xu) = -2x^4 + 2x^2u \quad (687)$$

$$\dot{(x^3)} = 3x^2\dot{x} = 3x^2(-x^3 + xu) = -3x^5 + 3x^3u \quad (688)$$

Utilizando-se a notação

$$X_1 = x \quad (689)$$

$$X_2 = x^2 \quad (690)$$

$$X_3 = x^3 \quad (691)$$

as expressões são reescritas na forma

$$\dot{X}_1 = -X_3 + X_1u \quad (692)$$

$$\dot{X}_2 = 2X_2u + 2x^4 \quad (693)$$

$$\dot{X}_3 = 3X_3u + 3x^5 \quad (694)$$

Negligenciando-se os termos de maior potência, x^4 e x^5 , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} u$$

que é bilinear.

A idéia central é a utilização da fórmula de Maclaurin, no caso ilustrado para um sistema de ordem 2, ou seja $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, para uma função $f : R^2 \rightarrow R$

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} x_2 \quad (695)$$

$$+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{(0,0)} x_1^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{(0,0)} x_1 x_2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{(0,0)} x_2^2 + \dots \quad (696)$$

ou

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \dots \quad (697)$$

Para facilitar a notação, é interessante introduzir o conceito de Produto de Kronecker. Para as matrizes $P_{n \times m}$ e $Q_{p \times q}$, o Produto de Kronecker é definido por

$$P \otimes Q = \begin{bmatrix} p_{11}Q & \cdots & p_{1m}Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}Q & \cdots & p_{nm}Q \end{bmatrix} \in R^{np \times mq}$$

Utilizando o Produto de Kronecker, a expressão 697 é rescrita como

$$f(x_1, x_2) = A_0 + A_1x + A_2x \otimes x + A_3x \otimes x \otimes x + \dots$$

em que

$$A_0 = f(0, 0) \quad (698)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (699)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad (700)$$

$$A_3 = \dots \quad (701)$$

Muitas vezes, pode-se obter o modelo de Carleman de modo direto. Considere o modelo não linear de um helicóptero didático de bancada 2D

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{A} \left[K_{pp}V_p + K_{py}V_y - B_p\dot{\theta} - mLg \cos \theta - mL^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right] \quad (702)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{B(\theta)} \left[K_{yp}V_p + K_{yy}V_y - B_y\dot{\psi} + 2mL^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right] \quad (703)$$

$$A = J_p + mL \quad (704)$$

$$B(\theta) = J_y + mL^2 \cos^2 \theta \quad (705)$$

Simplificando notação para as constantes

$$\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{K_{pp}}{A}}_a V_p + \underbrace{\frac{K_{py}}{A}}_b V_y - \underbrace{\frac{B_p}{A}}_c \dot{\theta} - \underbrace{\frac{mLg}{A}}_d \cos \theta - \underbrace{\frac{mL^2}{A}}_h \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (706)$$

$$\ddot{\psi} = \underbrace{\frac{K_{yp}}{B(\theta)}}_{\alpha(\theta)} V_p + \underbrace{\frac{K_{yy}}{B(\theta)}}_{\beta(\theta)} V_y - \underbrace{\frac{B_y}{B(\theta)}}_{\gamma(\theta)} \dot{\psi} + \underbrace{\frac{2mL^2}{B(\theta)}}_{\delta(\theta)} \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (707)$$

O modelo do helicóptero 2D na forma de equação de estados é uma EDO não-linear dado por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (708)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ aV_p + bV_y + c\dot{\theta} + d \cos \theta + h\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ x_4 \\ \alpha(\theta) V_p + \beta(\theta) V_y + \gamma(\theta) \dot{\psi} + \delta(\theta) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (709)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ c\dot{\theta} + d \cos \theta + h\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ x_4 \\ \gamma(\theta) \dot{\psi} + \delta(\theta) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ 0 & 0 \\ \alpha(\theta) & \beta(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_y \end{bmatrix} \quad (710)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ cx_2 + d \cos x_1 + hx_4^2 \sin x_1 \cos x_1 \\ x_4 \\ \gamma(x_1) x_4 + \delta(x_1) x_4 x_2 \sin x_1 \cos x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ 0 & 0 \\ \alpha(x_1) & \beta(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_y \end{bmatrix} \quad (711)$$

Para se obter o modelo bilinear que leva em consideração termos até de segunda ordem, note que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_1 x_4 & x_2^2 & x_2 x_3 & x_2 x_4 & x_3^2 & x_3 x_4 & x_4^2 \end{bmatrix}^T \quad (712)$$

$$= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \end{bmatrix}^T \quad (713)$$

Para cada termo da Representação de Carleman, tem-se que

$$\dot{(x_1)} = x_2 \quad (714)$$

$$\dot{(x_2)} = cx_2 + d \cos x_1 + hx_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + aV_p + bV_y \quad (715)$$

$$\dot{(x_3)} = x_4 \quad (716)$$

$$\dot{(x_4)} = \gamma(x_1)x_4 + \delta(x_1)x_4x_2 \sin x_1 \cos x_1 + \alpha(x_1)V_p + \beta(x_1)V_y \quad (717)$$

$$\dot{(x_1^2)} = 2x_1x_2 \quad (718)$$

$$\dot{(x_1x_2)} = x_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 \cos x_1 + hx_1x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + ax_1V_p + bx_1V_y \quad (719)$$

$$\dot{(x_1x_3)} = x_2x_3 + x_1x_4 \quad (720)$$

$$\dot{(x_1x_4)} = x_2x_4 + \gamma(x_1)x_1x_4 + \delta(x_1)x_4x_2x_1 \sin x_1 \cos x_1 + \alpha(x_1)x_1V_p + \beta(x_1)x_1V_y \quad (721)$$

$$\dot{(x_2^2)} = 2cx_2^2 + 2dx_2 \cos x_1 + 2hx_2x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + 2ax_2V_p + 2bx_2V_y \quad (722)$$

$$\dot{(x_2x_3)} = cx_2x_3 + dx_3 \cos x_1 + hx_4^2x_3 \sin x_1 \cos x_1 + ax_3V_p + bx_3V_y + x_2x_4 \quad (723)$$

$$\dot{(x_2x_4)} = cx_2x_4 + dx_4 \cos x_1 + hx_4^3 \sin x_1 \cos x_1 + ax_4V_p + bx_4V_y \quad (724)$$

$$+ \gamma(x_1)x_4x_2 + \delta(x_1)x_4x_2^2 \sin x_1 \cos x_1 + \alpha(x_1)x_2V_p + \beta(x_1)x_2V_y \quad (725)$$

$$\dot{(x_3^2)} = 2x_3x_4 \quad (726)$$

$$\dot{(x_3x_4)} = x_4^2 + \gamma(x_1)x_4x_3 + \delta(x_1)x_4x_3x_2 \sin x_1 \cos x_1 + \alpha(x_1)x_3V_p + \beta(x_1)x_3V_y \quad (727)$$

$$\dot{(x_4^2)} = 2\gamma(x_1)x_4^2 + 2\delta(x_1)x_4^2x_2 \sin x_1 \cos x_1 + 2\alpha(x_1)x_4V_p + 2\beta(x_1)x_4V_y \quad (728)$$

Introduzindo-se as aproximações

$$\cos x_1 = 1 - \frac{x_1^2}{2} + o \quad (729)$$

$$\simeq 1 - \frac{x_1^2}{2} \quad (730)$$

$$\sin x_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{6} + o \quad (731)$$

$$\simeq x_1 \quad (732)$$

$$\sin x_1 \cos x_1 \simeq \left(x_1 - \frac{x_1^3}{6}\right) \left(1 - \frac{x_1^2}{2}\right) \quad (733)$$

$$= x_1 - \frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1^3}{2} + \frac{x_1^5}{12} \quad (734)$$

$$(735)$$

$$\simeq x_1 = \frac{1}{B(\theta)} = \frac{1}{J_y + mL^2 \cos^2 x_1} \quad (736)$$

$$\simeq \underbrace{\frac{1}{J_y + mL^2}}_M + \underbrace{\frac{mL^2}{(J_y + mL^2)^2} x_1^2}_N \quad (737)$$

$$= M + Nx_1^2 \quad (738)$$

obtém-se a seguinte representação (não matricial) de Carleman

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (739)$$

$$\dot{X}_2 = cX_2 + d - \frac{d}{2}X_5 + aV_p + bV_y \quad (740)$$

$$\dot{X}_3 = X_4 \quad (741)$$

$$\dot{X}_4 = -B_y M X_4 + K_{yp} (M + N X_5) V_p + K_{yy} (M + N X_5) V_y \quad (742)$$

$$\dot{X}_5 = 2X_6 \quad (743)$$

$$\dot{X}_6 = X_9 + cX_6 + dX_1 + aX_1 V_p + bX_1 V_y \quad (744)$$

$$\dot{X}_7 = X_{10} + X_8 \quad (745)$$

$$\dot{X}_8 = X_{11} - B_y M X_8 + K_{yp} M X_1 V_p + K_{yy} M X_1 V_y \quad (746)$$

$$\dot{X}_9 = 2cX_9 + 2dX_2 + 2aX_2 V_p + 2bX_2 V_y \quad (747)$$

$$\dot{X}_{10} = cX_{10} + dX_3 + aX_3 V_p + bX_3 V_y + X_{11} \quad (748)$$

$$\dot{X}_{11} = cX_{11} + dX_4 - B_y M X_{11} \quad (749)$$

$$+ [aX_4 + K_{yp} M X_2] V_p + [bX_4 + K_{yy} M X_2] V_y \quad (750)$$

$$\dot{X}_{12} = 2X_{13} \quad (751)$$

$$\dot{X}_{13} = X_{14} - B_y M X_{13} + K_{yp} M X_3 V_p + K_{yy} M X_3 V_y \quad (752)$$

$$\dot{X}_{14} = -2B_y M X_{14} + 2K_{yp} M X_4 V_p + 2K_{yy} M X_4 V_y \quad (753)$$

Averaging

Considere um sistema descrito por

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t) \quad (754)$$

em que ε é um escalar pequeno e f é periódico em t , ou seja,

$$f(x, t + T) = f(x, t) \quad (755)$$

para algum número T , a ser chamado de período. A idéia no método da média é obter uma aproximação para a solução de 754 utilizando o fato que a variação de x é muito mais lenta do

que de f para $\varepsilon \downarrow 0$, eliminando a dependência de f em relação a t . Portanto, o estado evolui na direção média das velocidades, ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \langle f(x) \rangle \quad (756)$$

em que

$$\langle f(x) \rangle \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T f(x, \tau) d\tau \quad (757)$$

Como exemplo, seja um sistema descrito por

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left(-0.5x^2 + x \sin^2(t) \right) \quad (758)$$

Neste caso, como $f(x, t)$ é de período π ,

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(-0.5x^2 + x \sin^2(\tau) \right) d\tau \quad (759)$$

$$= 0.5 \left(x - x^2 \right) \quad (760)$$

Constata-se que o sistema é descrito, em média, por

$$\frac{dx}{dt} = 0.5 \left(x - x^2 \right) \quad (761)$$

que possui 2 pontos de equilíbrio, $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = 1$. Linearizando-se em torno de $\bar{x} = 0$ verifica-se que o sistema apresenta autovalor $\lambda = 0.5$ e é instável. Em torno de $\bar{x} = 1$ o sistema apresenta autovalor $\lambda = -0.5$, sendo, portanto, estável.

Pêndulo de Kapitza

Um exemplo interessante é o caso de um pêndulo cujo ponto de fixação da haste é submetido a uma vibração na direção vertical de pequena amplitude, mas com frequência muito elevada.

Denota-se por L o comprimento da haste e A a amplitude da vibração $a(t) = A \sin(\omega t)$ de modo que $A \ll L$.

Sendo g a aceleração da gravidade local, a frequência natural de oscilação do pêndulo é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (762)$$

A frequência de vibração ω do ponto de fixação é suposto ser tal que $\omega \gg \omega_0$. Sendo m a massa, k a constante de atrito viscoso e θ o ângulo entre a haste e a vertical,

$$m \left[L\ddot{\theta} - A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \theta \right] = -mg \sin(\theta) - k \left[L\dot{\theta} - A\omega \cos(\omega t) \sin \theta \right] \quad (763)$$

Fazendo-se $\alpha = \frac{\omega_0 L}{\omega A}$, $\beta = \frac{k}{m\omega_0}$, $\varepsilon = \frac{A}{L}$, $\tau = \omega t$, $x_1 = \theta$ e $x_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\theta}{d\tau} + \cos(\tau) \sin(\theta)$, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} x_2 - \cos(\tau) \sin(x_1) \\ -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin(x_1) + \cos(x_1) \cos(\tau) [x_2 - \cos(\tau) \sin(x_1)] \end{bmatrix} \quad (764)$$

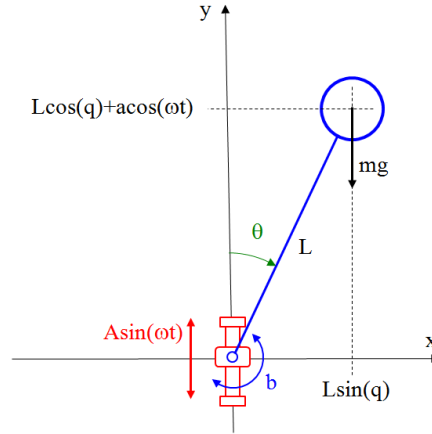


Figura 16: Pêndulo estabilizável na posição invertida mediante vibração vertical da base.

e, portanto,

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_1(\tau, x) \\ f_2(\tau, x) \end{bmatrix} d\tau \quad (765)$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin(x_1) - \frac{1}{4} \sin(2x_1) \end{bmatrix} \quad (766)$$

É interessante observar que o pêndulo pode ser mantido em equilíbrio estável na posição invertida ($\theta = \pi$), através da vibração vertical do ponto de fixação da haste.

De fato, constata-se de 766 que

$$\left. \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x} \right|_{(\pi, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - \frac{1}{2} & -\alpha\beta \end{bmatrix} \quad (767)$$

de modo que o sistema é estável para $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\beta > 0$.

Método de Krylov-Bogolyubov

Uma aplicação interessante do método da média é na solução de equações de 2ª ordem excitadas por pequenas perturbações

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (768)$$

a partir do conhecimento de que a solução não-perturbada

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 \quad (769)$$

é do tipo

$$y(t) = a \sin(t + \Phi) \quad (770)$$

Neste caso, um método que pode ser utilizado para se obter uma solução aproximada é o de Krylov-Bogolyubov [4].

Supondo que a solução de 768 é

$$y(t) = a(t) \sin(t + \Phi(t)) \quad (771)$$

onde $a(t)$ e $\Phi(t)$ são lentamente variantes no tempo (hipóteses cuja validade devem ser verificadas mais adiante),

$$\frac{dy}{dt} = \frac{da}{dt} \sin(t + \Phi) + a \cos(t + \Phi) \left[1 + \frac{d\Phi}{dt} \right] \quad (772)$$

Se

$$\frac{da}{dt} \sin(t + \Phi) + a \frac{d\Phi}{dt} \cos(t + \Phi) = 0 \quad (773)$$

então

$$\frac{dy}{dt} = a \cos(t + \Phi) \quad (774)$$

e, derivando-se mais uma vez, obter-se-ia

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{da}{dt} \cos(t + \Phi) - a \sin(t + \Phi) \left[1 + \frac{d\Phi}{dt} \right] \quad (775)$$

Substituindo-se 771 e 775 em 768, resulta

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \frac{da}{dt} \cos(t + \Phi) - a \frac{d\Phi}{dt} \sin(t + \Phi) \quad (776)$$

$$= \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (777)$$

$$= \varepsilon f(a \sin(t + \Phi), a \cos(t + \Phi)) \quad (778)$$

O sistema de equações a ser satisfeito por a e Φ é, portanto, a partir de 773 e 777:

$$\frac{da}{dt} \cos(t + \Phi) - a \frac{d\Phi}{dt} \sin(t + \Phi) = \varepsilon \bar{f}(a, t, \Phi) \quad (779)$$

$$\frac{da}{dt} \sin(t + \Phi) + a \frac{d\Phi}{dt} \cos(t + \Phi) = 0 \quad (780)$$

onde $\bar{f}(a, t, \Phi) = f(a \sin(t + \Phi), a \cos(t + \Phi))$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \cos(t + \Phi) & -a \sin(t + \Phi) \\ \sin(t + \Phi) & a \cos(t + \Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{d\Phi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \bar{f}(a, t, \Phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (781)$$

que pode ser rearranjado na forma

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \cos(t + \Phi(t)) \bar{f}(a, t, \Phi) \quad (782)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a} \sin(t + \Phi(t)) \bar{f}(a, t, \Phi) \quad (783)$$

Logo, se $\varepsilon \downarrow 0$, de fato $a(t)$ e $\Phi(t)$ são lentamente variantes no tempo, e aproximadamente constantes para $\tau \in [0, 2\pi]$. Aplicando o método da média,

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\tau) f(a \sin(\tau), a \cos(\tau)) d\tau \quad (784)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \sin(\tau) f(a \sin(\tau), a \cos(\tau)) d\tau \quad (785)$$

(Equação de Van der Pol) Considere o sistema descrito por

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon \overbrace{\frac{dy}{dt} (1 - y^2)}^{f(y, \frac{dy}{dt})} \quad (786)$$

e note que

$$f(a \sin(\tau), a \cos(\tau)) = a \cos(\tau) (1 - a^2 \sin^2(\tau)) \quad (787)$$

donde,

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\tau) f(a \sin(\tau), a \cos(\tau)) d\tau = \frac{\varepsilon}{2} \left(a - \frac{a^3}{4} \right) \quad (788)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \sin(\tau) f(a \sin(\tau), a \cos(\tau)) d\tau = 0 \quad (789)$$

Ou seja,

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \left(a - \frac{a^3}{4} \right) \quad (790)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (791)$$

cuja solução é $\Phi(t) \equiv \Phi(0)$ e $a(t) = 2(1 + ce^{-\varepsilon t})^{-\frac{1}{2}}$, onde o valor da constante c depende da condição inicial $a(0)$.

Verifica-se que para $t \uparrow \infty$, $a \rightarrow 2$ e $\frac{da}{dt} = 0$. Logo, em regime permanente, a solução é do tipo senoidal com amplitude 2.

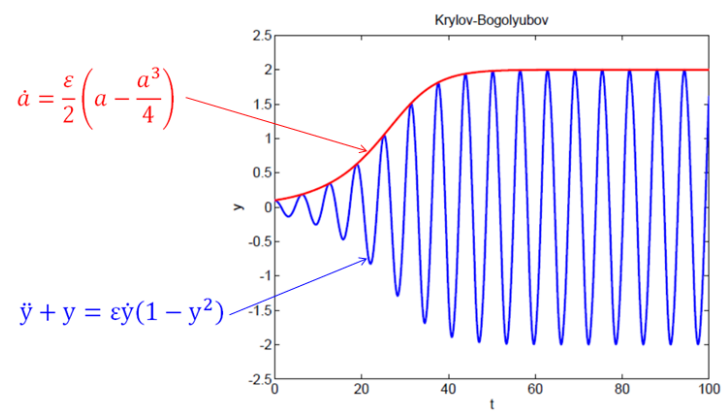


Figura 17: Estimativa da amplitude de oscilação pelo método de Krylov-Bogolyubov.

Bibliografia

- [1] ATHERTON, D. *Nonlinear Engineering: Describing Function Analysis and Design*. Van Nostrand, 1975.
- [2] GIBSON, J. *Nonlinear Automatic Control*. McGraw Hill, 1963.
- [3] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. McMillan, 1992.
- [4] KRYLOV, U., AND BOGOLIUBOV, N. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1943.
- [5] MIRA, C. *Cours de Systèmes Asservis Non-Linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [6] NARENDRA, K., AND ANNASWAMY, A. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, 1989.
- [7] NETUSHIL, A. *Theory of Automatic Control*. MIR Publishers, Moscow, 1976.
- [8] SASTRY, S., AND BODSON, M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, 1991.
- [9] SLOTINE, J., AND LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [10] TOMOVIC, R. *Introduction to Nonlinear Automatic Control Systems*. John Wiley, 2011.