Том XXII «АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА» № 8

1961

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. М. ПОПОВ

(*Бухарест*)

Исследуется вопрос об абсолютной устойчивости системы «непрямого регулирования» с одной нелинейностью при помощи специального метода, отличающегося от второго метода Ляпунова. В полученном критерии абсолютной устойчивости основное условие выражается при помощи передаточной функции линейной части системы. Доказывается, что построением функции Ляпунова общего вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» нельзя получить для исследуемой задачи более широкую область устойчивости (в пространстве параметров), чем область, полученную при помощи предлагаемого критерия. Даны графические критерии абсолютной устойчивости, выраженные при помощи амплитудно-фазовой характеристики или так называемой «видоизмененной амплитудно-фазовой характеристики» линейной части системы.

В настоящей работе исследуется вопрос об абсолютной устойчивости нелинейных систем «непрямого регулирования». Существующая литература в этой области (см., например, [1]) посвящена почти исключительно применению прямого метода Ляпунова. В настоящей работе этот вопрос решается иным методом, который позволяет получить новые результаты.

Предполагается, что прежние работы автора в этой области (см. [2—5]) незнакомы читателю. В связи с этим в статье не излагаются самые общие результаты, которые можно получить этим путем, а рассматривается один из самых простых случаев.

Автором был исследован новым методом вопрос об абсолютной устойчивости как для систем дифференциальных уравнений других типов (например, для систем «прямого регулирования»), так и для других классов нелинейных функций (например, для функций, график которых заключен в секторе). Во всех этих случаях исследована также абсолютная устойчивость для систем с несколькими нелинейностями (случай систем со многими регулирующими органами).

В своих последних работах, которые находятся в печати, автор изучал вопрос об устойчивости в некоторых критических случаях и для систем дифференциальных уравнений с «последействием».

1. Постановка задачи

Рассматриваются системы «непрямого регулирования», описываемые следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_k + b_l\varphi(\sigma) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\sigma), \tag{1.2}$$

$$\sigma = \sum_{l=1}^{n} c_l x_l - \gamma\xi, \tag{1.3}$$

где a_{lk}, b_l, c_l и γ — постоянные коэффициенты, а $\varphi(\sigma)$ — функция класса А *, т. е. $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция от σ, удовлетворяющая условию

$$\varphi(0) = 0 \tag{1.4}$$

и неравенству

$$\varphi(\sigma)\sigma > 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0 \tag{1.5}$$

Система (1.1)—(1.3) допускает тривиальное решение

$$x_l = \xi = \sigma = 0, \tag{1.6}$$

устойчивость которого и исследуется.

Предполагается, что тривиальное решение линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} y_k \qquad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.7}$$

где a_{lk} — те же самые числа, что и в (1.1), асимптотически устойчиво, или (что эквивалентно) что все собственные значения матрицы (a_{lk}) имеют отрицательные вещественные части. Ищутся условия для чисел a_{lk}, b_l, c_l и γ, при соблюдении которых тривиальное решение системы (1.1) — (1.3) асимптотически устойчиво в целом для всякой функции $\varphi(\sigma)$ класса А (иными словами, условия того, что тривиальное решение системы асимптотически абсолютно устойчиво). Для этого, как известно, необходимо, чтобы **

$$\gamma > 0. \tag{1.8}$$

Поэтому будем считать в дальнейшем, что неравенство (1.8) выполнено.

2. Предварительные определения. Формулировка критерия абсолютной устойчивости

Рассматриваются функции $\psi_{lm}(t)$ $(l = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots, n)$, определенные для $t \geqslant 0$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\psi_{lm}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\psi_{km}(t) \qquad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, n \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

и начальным условиям

$$\psi_{lm}(0) = \delta_{lm} \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.2}$$

где $\delta_{lm} = 0$ при $l \neq m$ и $\delta_{lm} = 1$ при $l = m$.

Совокупность функций $\psi_{lm}(t)$ является фундаментальной системой решений для системы (1.7).

Пусть $x_l(t)$, $\xi(t)$ — решение системы уравнений (1.1)—(1.3) ***, удовлетворяющее начальным условиям $x_l(0) = x_{l0}$, $\xi(0) = \xi_0$ и пусть $\varphi(\sigma(t))$ — функция от t, полученная подстановкой в $\varphi(\sigma)$ функции $\sigma(t) = \sum_{l=1}^{n} c_l x_l(t) - \gamma\xi(t)$ [см. (1.3)].

---

* Предполагается, что число σ_*, введенное в [6], равно нулю. Заметим, что если $\sigma_* \neq 0$, то тривиальное решение системы (1.1)—(1.3) не может быть асимптотически устойчиво.

** Если $\gamma < 0$, то тривиальное решение неустойчиво для $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h > 0$. Если $\gamma = 0$, то условие $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$ не выполняется для всех решений системы.

*** Существование решений является следствием предположений раздела 1. В дальнейшем единственность решений предполагаться не будет. Продолжаемость решений будет следствием условий устойчивости, которые будут изложены ниже.

Решая систему уравнений (1.1), получим

$$x_l(t) = \sum_{m=1}^{n} \psi_{lm}(t)\, x_{m0} + \sum_{m=1}^{n} \int_0^t \psi_{lm}(t-\zeta)\, b_m \varphi(\sigma(\zeta))\, d\zeta. \qquad (2.3)$$

Из (1.3) следует, что

$$\sigma(t) = \sum_{m=1}^{n} \mu_m(t)\, x_{m0} - \int_0^t \nu(t-\zeta)\, \varphi(\sigma(\zeta))\, d\zeta - \gamma\xi(t), \qquad (2.4)$$

где

$$\mu_m(t) = \sum_{l=1}^{n} c_l \psi_{lm}(t), \qquad (2.5)$$

$$\nu(t) = -\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} c_l \psi_{lm}(t)\, b_m. \qquad (2.6)$$

Поскольку по предположениям тривиальное решение системы (1.7) асимптотически устойчиво, то можно найти такие две положительные постоянные K_0 и K_1, что [см. (2.1) и (2.2)] при любом $t \geqslant 0$ будет выполняться неравенство

$$|\psi_{lm}(t)| < K_1 e^{-K_0 t}, \qquad t \geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, n, \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Поэтому $\nu(t)$ [см. (2.6)] удовлетворяет неравенству

$$|\nu(t)| < K_2 e^{-K_0 t} \quad (t \geqslant 0), \qquad (2.8)$$

где

$$K_2 = \sum_{l=1}^{n} |c_l| \sum_{l=1}^{n} |b_l|\, K_1.$$

Учитывая неравенство (2.7), заметим, что существует преобразование Фурье функции $\nu(t)$, определяемое выражением

$$N(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t} \nu(t)\, dt \qquad (j = \sqrt{-1}). \qquad (2.9)$$

Определим функцию

$$G(j\omega) = N(j\omega) + \frac{\gamma}{j\omega}, \qquad (2.10)$$

которую назовем передаточной функцией линейной части системы (см. Приложение I).

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Если существует такое неотрицательное число q, что для всякого вещественного ω выполняется неравенство *

$$\operatorname{Re}(1 + j\omega q)\, G(j\omega) \geqslant 0, \qquad (2.11)$$

то тривиальное решение системы (1.1)—(1.3) при сделанных в разделе 1 допущениях будет асимптотически абсолютно устойчиво.

---

* Здесь и в дальнейшем через $\operatorname{Re} X$ (или $\operatorname{Im} X$) обозначена вещественная (или соответственно, мнимая) часть комплексной величины X.

3. Доказательство теоремы раздела 2

Рассмотрим, как и выше, решение $x_l(t)$, $\xi(t)$, $\sigma(t)$ системы (1.1)—(1.3) и соответствующую функцию $\varphi(\sigma(t))$. Для всякого положительного числа T определим вспомогательные функции

$$\varphi_T(t)=\begin{cases}\varphi(\sigma(t)) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0 & \text{при } t>T,\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\lambda_T(t)=-\int_0^t \nu(t-\zeta)\,\varphi_T(\zeta)\,d\zeta-q\int_0^t\frac{d\nu(t-\zeta)}{dt}\varphi_T(\zeta)d\zeta-q[\nu(0)+\gamma]\,\varphi_T(t), \tag{3.2}$$

где q — то же самое число, что и в теореме, а $\nu(t)$ выражается формулой (2.6), откуда следует, что [см. (2.2)]

$$\nu(0)=-\sum_{l=1}^n c_l b_l. \tag{3.3}$$

Легко видеть, что при $0\leqslant t\leqslant T$ функция $\lambda_T(t)$ ограничена. При $t>T$ функция $\lambda_T(t)$ удовлетворяет неравенству (см. Приложение II)

$$|\lambda_T(t)|<K_3e^{-K_0t}\qquad (K_3>0,\quad t>T), \tag{3.4}$$

где K_3 не зависит от t. Поэтому существует преобразование Фурье

$$L_T(j\omega)=\int_0^\infty e^{-j\omega t}\lambda_T(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Существует также и преобразование

$$F_T(j\omega)=\int_0^\infty e^{-j\omega t}\varphi_T(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Исходя из того, что преобразование Фурье функции $\frac{d\nu(t)}{dt}$, которое существует, поскольку имеют место (2.6), (2.1) и (2.7), имеет вид [см. (2.9)]

$$\int_0^\infty e^{-j\omega t}\frac{d\nu(t)}{dt}dt=j\omega N(j\omega)-\nu(0), \tag{3.7}$$

получим, применяя преобразование Фурье в (3.2) [см. (3.5), (3.6) и (3.7)]

$$L_T(j\omega)=-[(1+j\omega q)\,N(j\omega)+q\gamma]\,F_T(j\omega). \tag{3.8}$$

Определим теперь функцию от T:

$$\rho(T)=\int_0^\infty \lambda_T(t)\,\varphi_T(t)\,dt. \tag{3.9}$$

Поскольку функция $\varphi_T(t)$ непрерывна при $0\leqslant t\leqslant T$ и равна нулю при $t>T$ и поскольку $\lambda_T(t)$ также непрерывна при $0\leqslant t\leqslant T$ и удовлетворяет неравенству (3.4) при $t>T$, то в (3.9) можно применить формулу Парсеваля. При этом получим

$$\rho(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L_T(j\omega)\,\overline{F_T(j\omega)}\,d\omega, \tag{3.10}$$

где $\overline{F_T(j\omega)}$ является величиной, комплексно сопряженной с $F_T(j\omega)$.

Заменяя в (3.10) $L_T(j\omega)$ выражением (3.8) и замечая, что

$$F_T(j\omega)\overline{F_T(j\omega)} = |F_T(j\omega)|^2, \tag{3.11}$$

получим

$$\rho(T) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2[(1+j\omega q)N(j\omega) + q\gamma]\,d\omega. \tag{3.12}$$

Приравнивая вещественные части, получим

$$\rho(T) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2 \operatorname{Re}[(1+j\omega q)N(j\omega) + q\gamma]\,d\omega. \tag{3.13}$$

Замечая, что [см. (2.10) и (2.11)]

$$\operatorname{Re}[(1+j\omega q)N(j\omega) + q\gamma] = \operatorname{Re}(1+j\omega q)\left(N(j\omega) + \frac{\gamma}{j\omega}\right) = \\ = \operatorname{Re}(1+j\omega q)\,g(j\omega) \geqslant 0, \tag{3.14}$$

получим неравенство

$$\rho(T) \leqslant 0. \tag{3.15}$$

Подставляя (3.1) в (3.9), получим

$$\rho(T) = \int\limits_0^T \lambda_T(t)\,\varphi(\sigma(t))\,dt \leqslant 0. \tag{3.16}$$

Подставляя в (3.2) выражение для $\varphi_T(t)$ и пользуясь равенством 2.4), а также равенством, следующим из (2.4):

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{n}\frac{d\mu_m(t)}{dt}x_{m0} - \int\limits_0^t \frac{d\nu(t-\zeta)}{dt}\varphi(\sigma(\zeta))\,d\zeta - [\nu(0)+\gamma]\,\varphi(\sigma(t)), \tag{3.17}$$

получим, что в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\lambda_T(t) = \sigma(t) + q\frac{d\sigma(t)}{dt} + \gamma\,\xi(t) - \sum_{m=1}^{n}\left(\mu_m(t) + q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right)x_{m0}. \tag{3.18}$$

Подставляя это выражение в (3.16), получим

$$\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt + q\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\frac{d\sigma(t)}{dt}\,dt + \gamma\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\,\xi(t)\,dt - \\ - \sum_{m=1}^{n}[x_{m0}\int\limits_0^T\left(\mu_m(t) + q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right)\varphi(\sigma(t))\,dt \leqslant 0. \tag{3.19}$$

Будем рассматривать отдельно каждый член в выражении (3.19) Для первого члена имеет место неравенство [см. (1.4) и (1.5)]

$$-\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt \leqslant 0. \tag{3.20}$$

Второй член можно переписать, пользуясь равенством

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t)) \frac{d\sigma(t)}{dt} dt = F(\sigma(T)) - F(\sigma(0)), \tag{3.21}$$

где

$$F(\sigma) = \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma.$$

При $\varphi(\sigma)$, принадлежащей к классу А [(см. (1.4) и (1.5)], удовлетворяется условие

$$F(\sigma) \geqslant 0, \tag{3.22}$$

где равенство имеет место только при $\sigma = 0$. Очевидно, что поскольку q неотрицательно, имеет место неравенство

$$-qF(\sigma(T)) \leqslant 0. \tag{3.23}$$

Третий член можно переписать, пользуясь равенством [см. (1.2)]

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t)) \xi(t) dt = \int_0^T \frac{d\xi(t)}{dt} \xi(t) dt = \frac{1}{2}\xi^2(T) - \frac{1}{2}\xi_0^2. \tag{3.24}$$

Поскольку $\gamma > 0$ [см. (1.8)], имеет место неравенство

$$-\frac{1}{2}\gamma\xi^2(T) \leqslant 0. \tag{3.25}$$

Для остальных членов заметим (см. Приложение III), что существует такое положительное число K_4, при котором выполняется неравенство

$$\left|\int_0^T \left(\mu_m(t) + q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right)\varphi(\sigma(t)) dt\right| \leqslant \frac{1}{n} K_4 \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T} |\xi(\zeta)| \quad (m = 1, 2, \ldots n). \tag{3.26}$$

Пользуясь равенствами (3.21) и (3.24) и неравенствами (3.26), можно переписать неравенство (3.19) в виде

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t)) \sigma(t) dt + qF(\sigma(T)) + \frac{1}{2}\gamma\xi^2(T) - $$
$$-K_4 \max_{m=1,2,\ldots,n} (|x_{m0}|) \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T} |\xi(\zeta)| \leqslant qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2. \tag{3.27}$$

Докажем, что тривиальное решение системы (1.1)—(1.3) устойчиво. Для этого сложим неравенства (3.27), (3.20) и (3.23)

$$\frac{1}{2}\gamma\xi^2(T) - K_4 \max_{m=1,2,\ldots,n} (|x_{m0}|) \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T} |\xi(\zeta)| \leqslant qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2. \tag{3.28}$$

Пусть t — произвольное положительное число. Неравенство (3.28) удовлетворяется при всяком $T > 0$. В частности (3.28) удовлетворяется при таком $T(t)$, что выполняются неравенства

$$0 \leqslant T(t) \leqslant t \tag{3.29}$$

и равенство

$$|\xi(T(t))| = \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant t} |\xi(\zeta)|. \tag{3.30}$$

Существование такого числа $T(t)$ очевидно. Легко видеть, что поскольку имеют место (3.29), то выполняются неравенства

$$|\xi(T(t))| \leqslant \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T(t)} |\xi(\zeta)| \leqslant \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant t} |\xi(\zeta)|. \tag{3.31}$$

Сравнивая (3.31) с (3.30), получим

$$|\xi(T(t))| = \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T(t)} |\xi(\zeta)|. \tag{3.32}$$

Рассматривая (3.28) при $T = T(t)$ и пользуясь (3.32), получим

$$\frac{1}{2}\gamma\xi^2(T(t)) - K_4 \max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|)|\xi(T(t))| - qF(\sigma(0)) - \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2 \leqslant 0. \tag{3.33}$$

Стоящий в левой стороне неравенства (3.33) полином от $|\xi(T(t))|$ имеет действительные и противоположные по знаку решения. Неравенство (3.33) эквивалентно неравенству

$$|\xi(T(t))| \leqslant \frac{1}{\gamma} K_4 \max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|) +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\sqrt{K_4^2\,(\max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|))^2 + 2\gamma(qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2)}, \tag{3.34}$$

которое выполняется при всяком $t > 0$.

Можно найти (см. Приложение IV) такие два положительных числа K_5 и K_6, что при всяком $t > 0$ будет выполняться неравенство

$$|x_l(t)| \leqslant K_5 \max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|) + K_6 \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant t} |\xi(\zeta)|. \tag{3.35}$$

Пользуясь (3.30), (3.34) и (3.35), получим окончательно

$$|\xi(t)| \leqslant \frac{1}{\gamma} K_4 \max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|) +$$

$$\frac{1}{\gamma} + \sqrt{K_4^2\,(\max_{m=1,2,\ldots,n}(x_{m0}|))^2 + 2\gamma\,(qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2)}, \tag{3.36}$$

$$|x_l(t)| \leqslant \left(K_5 + \frac{1}{\gamma}K_4K_6\right) \max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|) +$$

$$+\frac{1}{\gamma}K_6\sqrt{K_4^2\,(\max_{m=1,2,\ldots,n}(|x_{m0}|))^2 + 2\gamma\left(qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2\right)}. \tag{3.37}$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Существует такое $\delta > 0$, что при $|x_{l0}| < \delta$ и $|\xi_0| < \delta$ правые части неравенств (3.36) и (3.37) будут меньше ε * и поэтому будут выполняться неравенства $|x_l(t)| < \varepsilon$ и $|\xi(t)| < \varepsilon$. Следовательно, тривиальное решение системы (1.1)—(1.3) устойчиво по Ляпунову. Более того, из (3.36) и (3.37) следует, что все решения этой системы ограничены. Из этого факта следует также, что решения системы (1.1)—(1.3) являются продолжаемыми при всех $t > 0$.

Докажем теперь, что тривиальное решение асимптотически устойчиво ри всяком $\varphi(\sigma)$ класса А. Для этого сложим неравенства (3.27), (3.23)

---

* При этом воспользуемся тем фактом, что $F(\sigma(0))$ — непрерывная функция от $\sigma(0)$, равная нулю при $\sigma(0) = 0$, а также равенством $\sigma(0) = \sum_{l=1}^{n} c_l x_{l0} - \gamma\xi_0$ [см. (1.3)].

и (3.25):

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt \leqslant K_4 \max_{m=1,2,\ldots,n} (|x_{m0}|) \sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T} |\xi(\zeta)| + qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\gamma\xi_0^2. \tag{3.38}$$

Пользуясь (3.36), получим

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt \leqslant f_1(x_{m0}, \xi_0), \tag{3.39}$$

где $f_1(x_{m0}, \xi_0)$ — определенная функция переменных x_{m0} и ξ_0.

Учитывая соотношение [см. (1.1) (1.3)]

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n} c_l \frac{dx_l}{dt} - \gamma\frac{d\xi}{dt} = \sum_{l=1}^{n} c_l \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_k + b_l\varphi(\sigma)\Big) - \gamma\varphi(\sigma), \tag{3.40}$$

(в котором x_k и ξ удовлетворяют неравенствам (3.37) и (3.36), σ определено уравнением (1.3), а $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция от σ), получим неравенство

$$\left|\frac{d\sigma(t)}{dt}\right| < f_2(x_{m0}, \xi_0), \tag{3.41}$$

где $f_2(x_{m0}, \xi_0)$ не зависит от t.

Используя (3.39) и (3.41), получим (см. Приложение V):

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0 \tag{3.42}$$

и, поскольку $\varphi(\sigma)$ является непрерывной функцией

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t)) = 0. \tag{3.43}$$

Пользуясь (3.43) и уравнениями (2.3), получим (см. Приложение VI

$$\lim_{t\to\infty} x_l(t) = 0. \tag{3.44}$$

Из (1.3) вытекает [см. (3.42) и (3.44)], что

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\gamma}\Big(\sum_{l=1}^{n} x_l(t) - \sigma t\Big) = 0. \tag{3.45}$$

Этим самым теорема доказана.

4. Сравнение с результатами, получаемыми при помощи функций Ляпунова известного типа

Представляет интерес сравнить критерий абсолютной устойчивости (2.11) с критериями абсолютной устойчивости, которые можно получить построением функций Ляпунова типа «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» [6—8]. Докажем, что последние критерии включены в критерий теоремы раздела 2, т. е., если существует для исследуемой системы функция Ляпунова упомянутого типа, то существует такое неотрицательное число q, что неравенство (2.11) будет выполняться.

Дифференцируя уравнение (1.3), получим систему, эквивалентную системе (1.1)—(1.3):

$$\frac{dx_l}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k+b_l\varphi(\sigma)\qquad(l=1,2,\ldots,n),\tag{4.1}$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sum_{l=1}^{n}c_l\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k+b_l\varphi(\sigma)\Big)-\gamma\varphi(\sigma).$$

В Приложении VII доказывается, что самая общая функция Ляпунова определенно отрицательная вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности», которую можно построить для системы (4.1), должна иметь вид

$$V=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}x_lr_{lm}x_m-\alpha\Big(\sigma-\sum_{l=1}^{n}c_lx_l\Big)^2-2\beta\int_0^\sigma\varphi(\sigma)\,d\sigma,\tag{4.2}$$

где параметры r_{lm}, α, β удовлетворяют условиям:

$$r_{lm}=r_{ml},\ \alpha\geqslant0,\ \beta\geqslant0,\ \alpha+\beta>0.\tag{4.3}$$

Производная этой функции, в силу системы (4.1) *

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}=W(x_l,\sigma)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}x_lr_{lm}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{mk}x_k+b_m\varphi(\sigma)\Big)+$$

$$+\alpha\gamma\varphi(\sigma)\Big(\sigma-\sum_{l=1}^{n}c_lx_l\Big)-\beta\varphi(\sigma)\Big(\sum_{l=1}^{n}c_l\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k+b_l\varphi(\sigma)\Big)-\gamma\varphi(\sigma)\Big)\tag{4.4}$$

должна быть определенно положительна при всякой функции $\varphi(\sigma)$ класса А и, в частности, при функции

$$\varphi(\sigma)=h\sigma,\ h>0.\tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получим квадратичную форму вещественных переменных x_l и σ, которая должна быть определенно положительной. Отсюда следует, что и при всех комплексных значениях x_l, σ, не равных одновременно нулю, выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\Big\{\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\overline{x}_lr_{lm}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{mk}x_k+b_mh\sigma\Big)+\alpha\gamma h\overline{\sigma}\Big(\sigma-\sum_{l=1}^{n}c_lx_l\Big)-$$

$$-\beta h\overline{\sigma}\Big(\sum_{l=1}^{n}c_l\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k+b_lh\sigma\Big)-\gamma h\sigma\Big)\Big\}>0,\tag{4.6}$$

где $\overline{x}_l$ и $\overline{\sigma}$ являются комплексно сопряженными с x_l и σ величинами. В самом деле, если подставить в (4.6) $x_l=u_l+jv_l$, $\sigma=\mu+j\nu$, где u_l, v_l, μ, ν являются вещественными величинами, то левый член (4.6) принимает вид $\frac{1}{2}(W_0(u_l,\mu)+W_0(v_l,\nu))$, где W_0 — квадратичная форма (4.4) при $\varphi(\sigma)=h\,\sigma$. Поэтому, если u_l, v_l, μ и ν не являются одновременно равными нулю, то имеет место неравенство (4.6).

В частности, неравенство (4.6) должно быть удовлетворено при

$$\sigma=\frac{1}{h},\qquad x=M_l(j\omega)\qquad(l=1,2,\ldots,n),\tag{4.7}$$

---

* Заметим, что $\frac{d}{dt}\big(\sigma-\sum_{l=1}^{n}c_l\,x_l\big)=-\gamma\varphi(\sigma)$.

где $M_l(j\omega)$ удовлетворяют системе уравнений

$$j\omega M_l(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} M_k(j\omega) + b_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.8}$$

При всяком вещественном ω система (4.8) имеет единственное решение, так как по предположениям (см. раздел 1) матрица (a_{lk}) не имеет чисто мнимых собственных значений.

Применяя преобразование Фурье к системе (2.1), (2.2), получим

$$j\omega F\{\psi_{lm}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} F\{\psi_{km}(t)\} + \delta_{lm} \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, n \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где

$$F\{\psi_{lm}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \psi_{lm}(t)\, dt. \tag{4.10}$$

Сравнивая (4.9) с (4.8), получим

$$M_l(j\omega) = \sum_{m=1}^{n} F\{\psi_{lm}(t)\}\, b_m = \sum_{m=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \psi_{lm}(t)\, b_m dt. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.7) в (4.6) и пользуясь равенствами (4.8), получим

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \overline{M_l(j\omega)}\, r_{lm} j\omega M_m(j\omega) + \alpha\gamma\left(\frac{1}{h} - \sum_{l=1}^{n} c_l M_l(j\omega)\right) - \right.$$
$$\left. - \beta\left(\sum_{l=1}^{n} c_l j\omega M_l(j\omega) - \gamma\right)\right\} > 0. \tag{4.12}$$

Но [см. (4.11), (2.6), (2.9)]

$$\sum_{l=1}^{n} c_l M_l(j\omega) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} c_l \Psi_{lm}(t)\, b_m dt = -\int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \nu(t)\, dt = -N(j\omega). \tag{4.13}$$

Поскольку $r_{lm} = r_{ml}$, имеем *:

$$\operatorname{Re}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \overline{M_l(j\omega)}\, r_{lm}\, j\omega M_m(j\omega) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2} j\omega \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\overline{M_l(j\omega)}\, M_m(j\omega) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + M_l(j\omega)\, \overline{M_m(j\omega)}\right) r_{lm}\right\} = 0. \tag{4.14}$$

Поэтому неравенство (4.12) можно переписать в виде

$$\frac{\alpha\gamma}{h} + \operatorname{Re}(\alpha\gamma + j\omega\beta)\, N(j\omega) + \beta\gamma > 0 \tag{4.15}$$

или [см. (2.10)]

$$\frac{\alpha\gamma}{h} + \operatorname{Re}(\alpha\gamma + j\omega\beta)\, G(j\omega) > 0. \tag{4.16}$$

---

* Заметим, что $\operatorname{Im}\left(\overline{M_l(j\omega)}\, M_m(j\omega) + M_l(j\omega)\, \overline{M_m(j\omega)}\right) \equiv 0$.

Рассуждения, приведенные выше, пригодны для всякого вещественного ω. Таким образом, доказано, что для существования функции Ляпунова рассматриваемого типа необходимо, чтобы неравенство (4.16) было выполнено при всяком $h > 0$ и при всяком ω.

Если $\alpha \neq 0$, то $\alpha > 0$ [см. (4.3)] и, поскольку $\alpha\gamma > 0$ [см. (1.8)], то из (4.16) следует неравенство

$$\operatorname{Re}\left(1 + j\omega \frac{\beta}{\alpha\gamma}\right) G(j\omega) \geqslant 0. \tag{4.17}$$

В самом деле, если неравенство (4.17) не выполнено для $\omega = \omega_0$, то существует такое положительное число h, что и неравенство (4.16) не будет иметь места при $\omega = \omega_0$. Необходимое неравенство (4.17) совпадает с неравенством (2.11), где $q = \frac{\beta}{\alpha\gamma} > 0$.

Если $\alpha = 0$, то из (4.3) и (4.16) получим неравенства

$$\beta > 0, \tag{4.18}$$

$$\operatorname{Re} j\omega G(j\omega) > 0. \tag{4.19}$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства функции $N(j\omega)$ [см. (2.9)]. Поскольку имеет место неравенство (2.8), то $N(j\omega)$ является непрерывной функцией от ω. В силу леммы Римана—Лебега

$$\lim_{|\omega| \to \infty} N(j\omega) = 0. \tag{4.20}$$

Поэтому существует такое положительное число P_1, что при всяком ω

$$\operatorname{Re} N(j\omega) > -P_1. \tag{4.21}$$

Также в силу леммы Римана—Лебега из (3.7) получим* [см. (3.3)]

$$\lim_{|\omega| \to \infty} j\omega N(j\omega) = \nu(0) = -\sum_{l=1}^{n} c_l b_l. \tag{4.22}$$

Из (4.21), (4.22) и (2.10) следует, что

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \operatorname{Re} N(j\omega) > -P_1, \tag{4.23}$$

$$\lim_{|\omega| \to \infty} j\omega G(j\omega) = \lim_{|\omega| \to \infty} j\omega N(j\omega) + \gamma = -\sum_{l=1}^{n} c_l b_l + \gamma > 0. \tag{4.24}$$

Последнее неравенство является необходимым и получается из (4.6) и (4.18) при $x_l = 0$, $\sigma = \frac{1}{h}$, $\alpha = 0$. Из (4.19), (4.24) и из непрерывности функции $G(j\omega)$ следует, что можно найти такое положительное число P_2, что при всяком вещественном ω будет иметь место неравенство

$$\operatorname{Re} j\omega G(j\omega) > P_2. \tag{4.25}$$

Складывая неравенство (4.23) с неравенством (4.25), предварительно умноженным на $2P_1/P_2$, получим

$$\operatorname{Re}\left(1 + 2\frac{P_1}{P_2} j\omega\right) G(j\omega) > -P_1 + 2P_1 > 0. \tag{4.26}$$

Из (4.26) следует, что неравенство (2.11) (как строгое неравенство) при $q = 2P_1/P_2 > 0$ выполняется.

* Пользуясь соотношениями (2.6), (2.1) и (2.7), легко найти, что интеграл $\int\limits_0^\infty \left| \frac{d\nu(t)}{dt} \right| dt$ сходится.

Этим самым доказано, что неравенство (2.11), являющееся достаточным для того, чтобы тривиальное решение описанной в разделе 1 системы было абсолютно асимптотически устойчиво, является в то же время необходимым для существования функции Ляпунова рассматриваемого типа.

Замечания. 1°. Для построения функции Ляпунова вида «квадратичная форма» [т. е. вида (4.2), где $\beta = 0$] необходимо, чтобы выполнялось неравенство (4.17) при $\beta=0$, т. е.

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \geqslant 0 \tag{4.27}$$

при всяком вещественном ω.

Условие (4.27) достаточно для абсолютной асимптотической устойчивости тривиального решения исследуемой системы, поскольку в этом случае выполняется неравенство (2.11) при $q = 0$.

2°. Большинство функций Ляпунова, построенных до сих пор для исследуемой системы, например, функции Ляпунова, построенные в [8], имеют вид (4.2), в котором $\alpha = 0$. Для этого необходимо, чтобы имело место неравенство (4.19), которое также достаточно для абсолютной устойчивости тривиального решения системы.

Условие (4.19) можно написать также в виде

$$\operatorname{Im} G(j\omega) < 0 \tag{4.28}$$

при всяком вещественном положительном ω. Это следует из соотношения [см. (2.9) и (2.10)]

$$\operatorname{Im} G(j\omega) = -\operatorname{Im} G(-j\omega) \tag{4.29}$$

и из неравенства [см. (2.10), (3.7) и (1.8)]

$$[\operatorname{Re} j\omega G(j\omega)]_{\omega=0} = \gamma > 0. \tag{4.30}$$

3°. Представляет интерес нахождение общего решения следующей обратной задачи: если условие (2.11) выполнено, можно ли построить функцию Ляпунова вида (4.2)? Для простейших случаев этот вопрос решается положительно.

5. О разных аналитических и графических видах критерия (2.11)

Функция $(1 + j\omega q)G(j\omega)$ имеет вид (см. Приложение I)

$$(1 + j\omega q)\, G(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}, \tag{5.1}$$

где $P(j\omega)$ и $Q(j\omega)$ являются многочленами от $j\omega$. Условие (2.11) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} P(j\omega)\, Q(-j\omega) \geqslant 0 \tag{5.2}$$

или

$$R(x) \geqslant 0, \; x = \omega^2, \tag{5.3}$$

где $R(x)$ является многочленом от x. Условие (2.11) сводится поэтому к условию, чтобы некоторый многочлен от x был неотрицательным для $x \geqslant 0$. Эта задача решается классическими методами алгебры.

В критерии входит единственный произвольный неотрицательный параметр q, который можно выбрать подходящим для каждой частной задачи *. Алгебраические методы для получения оптимальных значений q являются простыми.

Для практических применений представляют особый интерес следующие графические критерии абсолютной асимптотической устойчивости.

Назовем геометрическое место точек

$$u(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega), \; v(\omega) = \omega \operatorname{Im} G(j\omega) \tag{5.4}$$

в плоскости (u, v) «видоизмененной амплитудно-фазовой характеристикой» (В. А. Ф. Х.). Непосредственно из (2.11) получим неравенство

$$u(\omega) + qv(\omega) \geqslant 0, \; q \geqslant 0, \tag{5.5}$$

которое означает что В. А. Ф. Х. содержится в некоторой полуплоскости.

* Заметим, что в критерии (4.27), (4.28), которые исчерпывают результаты, получаемые общими типами функции Ляпунова (см. замечания 1° и 2°), никакой произвольный параметр не входит.

Графический критерий (рис. 1). Если существует прямая, проходящая через первый и третий квадранты плоскости (u, v) или совпадающая с осью ординат*, причем такая, что В. А. Ф. Х. лежит «с правой стороны» от этой прямой, то тривиальное решение исследуемой системы асимптотически абсолютно устойчиво. При этом можно сказать, что В. А. Ф. Х. находится «с правой стороны» рассматриваемой прямой, если всякая точка В. А. Ф. Х. или принадлежит прямой, или находится в той полуплоскости, которая ограничена прямой и содержит точку $(+\infty, 0)$**.

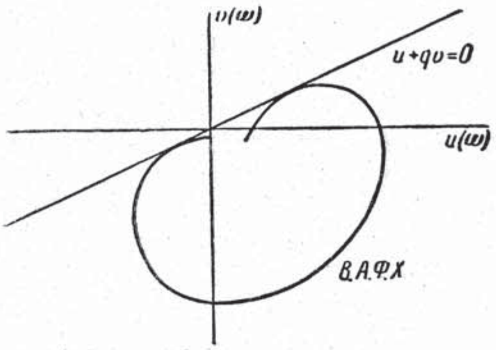

Рис. 1

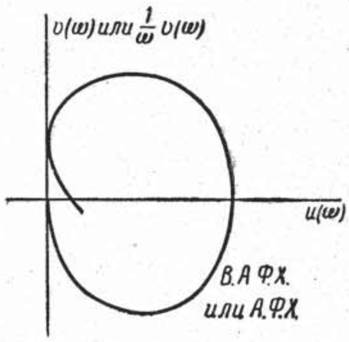

Рис. 2

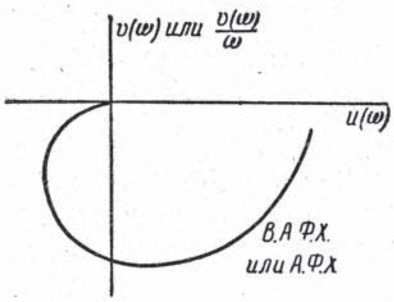

Рис. 3

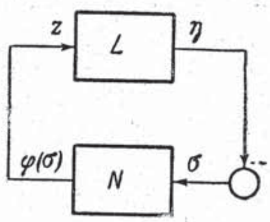

Рис. 4

Для получения упрощенных графических критериев абсолютной устойчивости можно пользоваться также обычной амплитудно-фазовой характеристикой.

Пользуясь условием (4.27), получим следующий графический критерий.

Упрощенный графический критерий I. Если всякая точка обычной (или видоизмененной) амплитудно-фазовой характеристики находится «с правой стороны» от оси ординат, то тривиальное решение исследуемой системы асимптотически абсолютно устойчиво (рис. 2).

Выполнение этого графического критерия необходимо для существования функции Ляпунова вида «квадратичная форма» (см. замечание 1°).

Из достаточного условия устойчивости (4.28) следует другой, упрощенный графический критерий.

Упрощенный графический критерий II. Если всякая точка обычной (или видоизмененной) А. Ф. Х. при $\omega > 0$ находится в третьем или четвертом квадрантах плоскости (u, v) или на отрицательной полуоси ординат, то тривиальное решение исследуемой системы асимптотически абсолютно устойчиво (рис. 3).

Выполнение этого критерия необходимо для существования функции Ляпунова 5.3, в которой $\alpha = 0$ (см. замечание 2°).

Заметим, что нет простого способа для выражения общего графиче-

* Очевидно, что такая прямая должна содержать начало координат. Уравнение этой прямой есть $u + qv = 0$, где $q \geqslant 0$.

** Иначе говоря, выполняется неравенство (5.5).

ского критерия (рис. 1) при помощи обычной А. Ф. Х. Зная обычную А. Ф. Х., можно получить видоизмененную А. Ф. Х. умножением ординаты каждой точки на соответствующее значение переменной ω.

6. Заключительные замечания

Большинство изложенных выше рассуждений почти непременно применяются и в более общих случаях, о которых говорилось во введении, и при отыскании результатов того же типа.

Основной чертой полученных результатов является тот факт, что в критерии входит, помимо простых условий раздела 1, переходная функция линейной части системы. Последняя не обязательно должна вычисляться при помощи формулы (2.9), а может быть получена более прямыми методами, известными из линейной теории систем автоматического регулирования. Графические критерии абсолютной устойчивости, изложенные выше, применимы даже в тех случаях, в которых о линейном блоке системы ничего не известно, кроме его линейности и автономности, а его амплитудно-фазовая характеристика определена экспериментальным путем.

Автор благодарит коллектив исследователей Института математики Академии наук Румынской Народной Республики, работающих в области обыкновенных дифференциальных уравнений и особенно проф. А. Халанаю за внимание и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Исследуемую систему можно всегда представить в виде схемы рис. 4, где через L обозначен линейный блок, который описывается системой уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_k + b_l z \quad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{I.1}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = z,$$

$$\eta = -\sum_{l=1}^{n} c_l x_l + \gamma\xi,$$

а через N обозначен нелинейный блок. Входные и выходные величины линейного и нелинейного блоков связаны равенствами

$$\eta = -\sigma, \quad z = \varphi(\sigma). \tag{I.2}$$

Пусть $z^0(t)$ — известная функция, для которой интеграл $\int_0^\infty |z^0(t)|\,dt$ существует и пусть $L\{z^0(t)\}$ — преобразование Лапласа

$$L\{z^0(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} z^0(t)\,dt, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0. \tag{I.3}$$

Пусть далее $x_l^0(t)$, $\xi^0(t)$, $\eta^0(t)$ — решение системы (I.1) при $z = z^0(t)$ и при нулевых начальных условиях. Из предположений раздела 1 следует, что $L\{x_l^0(t)\}$ существует по крайней мере при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, а $L\{\xi^0(t)\}$ и $L\{\eta^0(t)\}$ существуют при $\operatorname{Re} s > 0$.

Применяя преобразование Лапласа к (I.1), получим

$$sL\{x_l^0(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} L\{x_k^0(t)\} + b_l L\{z^0(t)\}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{I.4}$$

$$sL\{\xi^0(t)\} = L\{z^0(t)\}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{I.5}$$

$$L\{\eta^0(t)\} = -\sum_{l=1}^{n} c_l L\{x_l^0(t)\} + \gamma L\{\xi^0(t)\}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{I.6}$$

Система уравнений (I.4) имеет единственное решение при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ (см. предположения раздела 1).

Применим теперь преобразование Лапласа к системе (2.1) при начальных условиях (2.2):

$$sL\{\psi_{lm}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} L\{\psi_{km}(t)\} + \delta_{lm}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, n \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{I.7}$$

Сравнивая (I.4) с (I.7) получим

$$L\{x_l^0(t)\} = \Big(\sum_{m=1}^{n} L\{\psi_{lm}(t)\}\, b_m\Big) L\{z^0(t)\}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{I.8}$$

Пользуясь (I.5), (I.6) и (I.8), получим

$$L\{\eta^0(t)\} = \widetilde{G}(s)\, L\{z^0(t)\}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{I.9}$$

где

$$\widetilde{G}(s) = N(s) + \frac{\gamma}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{I.10}$$

$$N(s) = -\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} c_l L\{\psi_{lm}(t)\}\, b_m, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0. \tag{I.11}$$

Функция $\widetilde{G}(s)$, определенная равенствами (I.10) — (I.11), является передаточной функцией линейного блока системы. Функция $\widetilde{G}(s)$ получается как рациональная функция от s. Хотя проведенные выше рассуждения справедливы только при $\operatorname{Re} s > 0$, будем называть передаточной функцией рациональную функцию $G(s)$, определенную во всей плоскости s и полученную аналитическим продолжением функции $\widetilde{G}(s)$.

Заметим, что функция $L\{\psi_{lm}(t)\}$ существует при $\operatorname{Re} s = 0$ и что при $s = j\omega$ (ω — вещественное) $L\{\psi_{lm}(t)\} = F\{\psi_{lm}(t)\}$ [см. (4.10)]. Сравнивая (I.11) с (2.6) и (2.9), получим, что при $s = j\omega$ функция (I.11) равна функции (2.9). Поэтому функция (2.10) равна функции $G(s)$, определенной выше, при $s = j\omega$.

?

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Используя (3.1) и (3.2), получим, что при $t > T$

$$\lambda_T(t) = -\int_0^T \Big(\nu(t-\zeta) + q\frac{d\nu(t-\zeta)}{dt}\Big)\varphi(\sigma(\zeta))\, d\zeta. \tag{II.1}$$

Но [см. (2.6), (2.1) и (2.7)]

$$\Big|\nu(t) + q\frac{d\nu(t)}{dt}\Big| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |c_l| \Big(1 + q\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} |a_{km}|\Big) \sum_{i=1}^{n} |b_i| K_1 e^{-K_0 t}. \tag{II.2}$$

Поэтому

$$|\lambda_T(t)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \zeta \leqslant T} |\varphi(\sigma(\zeta))| \int_0^T \Big|\nu(t-\zeta) + q\frac{d\nu(t-\zeta)}{dt}\Big| d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant \zeta \leqslant T} |\varphi(\sigma(\zeta))| \sum_{l=1}^{n} |c_l| \Big(1 + q\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} |a_{km}|\Big) \sum_{i=1}^{n} |b_i| K_1 \int_0^T e^{-K_0(t-\zeta)}\, d\zeta. \tag{II.3}$$

Таким образом, получено неравенство (3.4), где

$$K_3 = \sup_{0 \leqslant \zeta \leqslant T} |\varphi(\sigma(\zeta))| \sum_{l=1}^{n} |c_l| \Big(1 + q\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} |a_{km}|\Big) \sum_{i=1}^{n} |b_i| \frac{K_1}{K_0}(e^{K_0 T} - 1). \tag{II.4}$$

При данном решении системы и данном T K_3 — постоянная.
Поэтому преобразование Фурье (3.5) существует.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Пользуясь уравнением (1.2), получим

$$E=\int\limits_0^T\left(\mu_m(t)+q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right)\varphi_T(\sigma(t))\,dt=\int\limits_0^T\left(\mu_m(t)+q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right)\frac{d\xi(t)}{dt}\,dt. \quad \text{(III.1)}$$

Интегрируя по частям, получим

$$E=\left[\left(\mu_m(t)+q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right)\xi(t)\right]_0^T-\int\limits_0^T\xi(t)\left(\frac{d\mu_m(t)}{dt}+q\frac{d^2\mu_m(t)}{dt^2}\right)dt, \quad \text{(III.2)}$$

откуда, поскольку $|\xi(T)|\leqslant\sup\limits_{0\leqslant\zeta\leqslant T}|\xi(\zeta)|$ и $|\xi(0)|\leqslant\sup\limits_{0\leqslant\zeta\leqslant T}|\xi(\zeta)|$, следует, что

$$E|\leqslant\sup_{0\leqslant\zeta\leqslant T}|\xi(\zeta)|\left(2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\mu_m(t)+q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right|+\int\limits_0^T\left|\frac{d\mu_m(t)}{dt}+q\frac{d^2\mu_m(t)}{dt^2}\right|dt\right). \quad \text{(III.3)}$$

Но [см. (2.5), (2.1) и (2.7)]

$$\left|\mu_m(t)+q\frac{d\mu_m(t)}{dt}\right|\leqslant\sum_{l=1}^n|c_l|\left(1+q\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n|a_{km}|\right)K_1, \quad \text{(III.4)}$$

$$\left|\frac{d\mu_m(t)}{dt}+q\frac{d^2\mu_m(t)}{dt^2}\right|\leqslant\sum_{l=1}^n|c_l|\left(1+q\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n|a_{km}|\right)\sum_{k'=1}^n\sum_{m'=1}^n|a_{k'm'}|K_1e^{-K_0t}. \quad \text{(III.5)}$$

Подставляя (III.4) и (III.5) в (III.3) и пользуясь неравенством

$$\int\limits_0^T e^{-K_0t}\,dt<\int\limits_0^\infty e^{-K_0t}\,dt=\frac{1}{K_0}, \quad \text{(III.6)}$$

получим неравенство (3.26), где

$$\frac{1}{n}K_4=\sum_{l=1}^n|c_l|\left(1+q\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n|a_{km}|\right)\left(2+\frac{1}{K_0}\sum_{k'=1}^n\sum_{m'=1}^n|a_{k'm'}|\right)K_1. \quad \text{(III.7)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Заменяя в (2.3) $\varphi(\sigma(\zeta))$ через $\frac{d\xi(\zeta)}{d\zeta}$ [см. (1.2)] и интегрируя по частям, получим

$$x_l(t)=\sum_{m=1}^n\psi_{lm}(t)\,x_{m0}+\sum_{m=1}^n b_m\left[\psi_{lm}(t-\zeta)\,\xi(\zeta)\right]_{\xi=0}^{\zeta=t}-\sum_{m=1}^n b_m\int\limits_0^t\xi(\zeta)\,\frac{d\psi_{lm}(t-\zeta)}{d\varsigma}\,d\zeta. \quad \text{(IV.1)}$$

Пользуясь (2.1) и (2.7), получим

$$|x_l(t)|\leqslant K_1n\max(|x_{m0}|)+$$
$$+\sup|\xi(\zeta)|K_1\sum_{m=1}^n|b_m|\left(2+\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{lk}|\int\limits_0^t e^{-K_0(t-\zeta)}\,d\zeta\right). \quad \text{(IV.2)}$$

Поскольку $\int\limits_0^t e^{-K_0(t-\zeta)}\,d\zeta\leqslant\int\limits_{-\infty}^t e^{-K_0(t-\zeta)}\,d\zeta=\frac{1}{K_0}$, получим неравенство (3.35), где

$$K_5=nK_1,$$
$$K_6=K_1\sum_{m=1}^n|b_m|\left(2+\frac{1}{K_0}\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{lk}|\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ V

Следствие (3.42) можно получить при помощи одной леммы, опубликованной Д. Барбалатом в [9]. Приведем ниже более прямое доказательство.

Предположим от противного, что (3.42) не имеет места. Тогда существует такое положительное число δ и такая последовательность чисел t_i, что

$$|\sigma(t_i)| > \delta, \quad t_i > 0, \quad \lim_{i\to\infty} t_i = +\infty. \tag{V.1}$$

Пусть для исследуемого решения [см. (3.41), (3.36), (3.37) и (1.3)]

$$\left|\frac{d\sigma(t)}{dt}\right| < M_1, \quad |\sigma(t)| < M_2. \tag{V.2}$$

Можно выбрать такую подпоследовательность t_k, что

$$t_k - t_{k-1} > \frac{\delta}{M_1}, \quad t_1 > \frac{\delta}{2M_1}. \tag{V.3}$$

При $|t - t_k| < \frac{\delta}{2M_1}$ имеем

$$M_2 > |\sigma(t)| = \left|\sigma(t_k) + \int_{t_k}^{t} \frac{d\sigma(t)}{dt}\,dt\right| > |\sigma(t_k)| - M_1|t - t_k| > \frac{1}{2}\,\delta. \tag{V.4}$$

Имеем также [см. (1.4) и (1.5)]

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt \geqslant \sum_{k=1}^{N(T)} \int_{t_k - \frac{\delta}{2M_1}}^{t_k + \frac{\delta}{2M_1}} \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt, \tag{V.5}$$

где $N(T)$ — такое число, что $t_{N(T)} + \frac{\delta}{2M_1} \leqslant T$ и $t_{N(T)+1} + \frac{\delta}{2M_1} > T$.

Очевидно, что

$$\lim_{T\to\infty} N(T) = \infty. \tag{V.6}$$

Пусть $\inf\limits_{\frac{\delta}{2} < |\sigma| < M_2} |\varphi(\sigma)| = m$. Тогда из (V.5) получим [см. (1.5)]

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt \geqslant N(T)\,\frac{\delta}{M_1}\,\frac{\delta}{2}\,m. \tag{V.7}$$

Поскольку имеет место (V.6), то

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \varphi(\sigma(t))\,\sigma(t)\,dt = \infty, \tag{V.8}$$

что противоречит (3.39) и доказывает справедливость соотношения (3.42).

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Чтобы доказать соотношение (3.44) [см. (2.3)] достаточно, поскольку имеет место (2.7), доказать, что из (3.44) следует

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \psi_{lm}(t-\zeta)\,\varphi(\sigma(\zeta))\,d\zeta = 0. \tag{VI.1}$$

Согласно (2.7), имеем

$$\left|\int_0^t \psi_{ml}(t-\zeta)\,\varphi(\sigma(\zeta))\,d\zeta\right| \leqslant K_1 \int_0^t e^{-K_0(t-\zeta)}\,|\varphi(\sigma(\zeta))|\,d$$

Применяя правило Лапиталля (см., например, [10]), получим [см. (3.43)]

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-K_0(t-\zeta)}\,|\,\varphi(\sigma(\zeta))\,|\,d\zeta=\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t e^{K_0\zeta}\,|\,\varphi(\sigma(\zeta))\,|\,d\zeta}{e^{K_0\tau}}=\frac{1}{K_0}\lim_{t\to\infty}|\,\varphi(\sigma(t))\,|=0,\quad \text{(VI.3)}$$

откуда следует (VI.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

Легко видеть, что самую общую отрицательно-определенную функцию Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» можно всегда представить в виде

$$V=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}x_l r_{lm}x_m-\alpha\left(\sigma-\sum_{l=1}^{n}c_lx_l\right)^2-2\beta\int_0^{\sigma}\varphi(\sigma)\,d\sigma+2\sigma\sum_{l=1}^{n}f_lx_l,\qquad \text{(VII.1)}$$

где r_{lm}, α, β, f_l — постоянные. Производная функции V в силу системы (4.1) имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}=W(x_l,\sigma)+\sigma\sum_{l=1}^{n}f_l\left(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k+b_l\varphi(\sigma)\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}f_lx_l\left[\sum_{l=1}^{n}c_l\left(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k+b_l\varphi(\sigma)\right)-\gamma\varphi(\sigma)\right],\qquad \text{(VII.2)}$$

где $W(x_l,\sigma)$ имеет выражение (4.4).

Докажем, что равенства

$$f_l=0\qquad (l=1,2,\ldots,n)\qquad \text{(VII.3)}$$

являются необходимыми. Действительно, функция $\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}$ должна быть положительной при

$$x_l=x_l^0=\varepsilon\int_0^{\infty}\psi_{lm}(t)\,dt\quad (l=1,2,\ldots,n)\qquad \text{(VII.4)}$$

$$\varphi(\sigma)=\varepsilon^2\sigma,\qquad \text{(VII.5)}$$

$$\sigma=1,\qquad \text{(VII.6)}$$

где m — одно из чисел $1, 2, \ldots, n$; $\psi_{lm}(t)$ — функции, определенные в разделе 2, а ε — произвольное (положительное или отрицательное) число. Очевидно, что функция (VII.5) принадлежит к классу А. Интегрируя (2.1), получим, поскольку $\lim\limits_{t\to\infty}\psi_{lm}(t)=0$ [см. также (2.2)]:

$$-\psi_{lm}(0)=-\delta_{lm}=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\int_0^{\infty}\psi_{km}(t)\,dt.\qquad \text{(VII.7)}$$

Следовательно [см. (VII.4)],

$$\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k^0=-\varepsilon\delta_{lm}.\qquad \text{(VII.8)}$$

Легко видеть, что при значениях (VII.4) — (VII.6) функция $\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}$ может быть написана в виде

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}=\left(\sum_{l=1}^{n}f_l\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k^0\right)\varepsilon+O(\varepsilon^2),\qquad \text{(VII.9)}$$

где через $O(\varepsilon^2)$ обозначены члены, обладающие свойством $|O(\varepsilon^2)|<K\varepsilon^2$, где K — постоянная.

Пользуясь (VII.8), получим из (VII.9)

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = -f_m\varepsilon + O(\varepsilon^2). \qquad \text{(VII.10)}$$

Если $f_m \neq 0$, то при достаточно малом ε выражение (VII.10) имеет знак члена $-f_m\varepsilon$, который произволен, поскольку знак ε произволен. Поэтому необходимо, чтобы выполнялись равенства $f_m = 0$. Исходя из того, что m произвольно, получим необходимые равенства (VII.3).

Функция (4.2) должна быть отрицательна при $x_l = 0$, $\sigma = 1$, $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h > 0$. Поэтому получаем необходимое неравенство

$$-\alpha - h\,\beta < 0 \text{ при всяком } h > 0, \qquad \text{(VII.11)}$$

откуда следуют соотношения (4.3).

Поступила в редакцию
17 января 1961 г.

Цитированная литература

1. Лурье А. И., Розенвассер Е. Н. О методах построения функции Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем. Труды Первого международного Конгресса ИФАК по автоматическому управлению. Изд-во АН СССР. 1961.
2. Popov V. M. Criterii de stabilitate pentru sistemele neliniare de reglare automată pe utilizarea transformatei Laplace. Studii și Cercetări de Energetică, Anul. IX. Nr. 4, 1959.
3. Popov V. M. Criterii suficiente de stabilitate asimptotică in mare pentru sistemele neliniare cu mai multe organe oe execuţie. Studii şi Cercetări de Energetică, Anul. IX, Nr. 4, 1959.
4. Popov V. M. Nouveaux critériums pe stabilité por les systèmes automatiques non-linéaires. Revue d'Électrotechnique et d'Énergétique, t. V, Nr. 1, 1960.
5. Popov V. M. Noi criterii grafice pentru stabilitatea stării staţionare a sistemelor automate neliniare. Studii şi Cerletări de Energetică, Anul. X, Nr. 3, 1960.
6. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Гостехиздат, 1951.
7. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
8. Якубович В. А. О нелинейных дифференциальных уравнениях систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом. Вестн. Ленингр· ун-та, № 7, 1960.
9. Barbălat I. Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires. Revue de mathematiques pures et appliquées. Acad. R. P. R., t. 4, Nr. 2, 1959.
10. Nicolescu Miron. Analiză Matematică, Vol. II, Bucureşti Editura Tehnică, 1958.

ON ABSOLUTE STABILITY OF NON-LINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

V. M. POPOV

The problem of absolute stability of an «indirect control» system with one non-linearity is analyzed by a special method which differs from the second method of Liapounoff. In the obtained criterium of absolute stability main condition is expressed by means of the transfer function of the linear part of the system. It is proved that by plotting Liapounof ffunction of the general type «a quadratic form plus an integral from non-linearity» it is impossible to obtain stability area for the analyzed problem (in the parameter space) wider than the area resulting from application of the suggested criterium. Graphical criteria of absolute stability are given which are expressed by means of a phase-amplitude characteristic or so called «a modificated phase-amplitude characteristic» of the linear part of the system.