Estabilidade de Oscilações

TakashiYoneyama

2003

Estabilidade de Oscilações

Suponha que o método da primeira harmônica indica que um sistema pode apresentar oscilações com amplitude X_0 e freqüência ω_0. Uma questão relevante para aplicações práticas é se a oscilação é estável, ou seja, quando X_0 ou ω_0 sofre perturbação, o sistema retorna expontânteamente à condição anterior.

Se a saída de um oscilador é

$$x(t) = X_0 sen(\omega_0 t) \tag{1}$$

deseja-se verificar se após uma perturbação que alterou a amplitude e a freqüência para $X_0+\Delta X_0$ e $\omega_0+\Delta\omega_0$

$$x(t) = (X_0 + \Delta X_0)\, sen\left[(\omega_0 + \Delta\omega_0)\, t\right] e^{-\eta t} \tag{2}$$

o decaimento η é tal que

$$\Delta X_0 > 0 \Rightarrow \eta > 0 \tag{3}$$
$$\Delta X_0 < 0 \Rightarrow \eta < 0 \tag{4}$$

A condição de oscilação

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(X_0)} \tag{5}$$

pode ser reescrita agrupando-se os termos reais e complexos

$$A(X_0, \omega_0) + jB(X_0, \omega_0) = 0 \tag{6}$$

Notando-se que a expressão 2 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x(t) &= (X_0 + \Delta X_0)\, \mathrm{Im}\left\{e^{j(\omega_0+\Delta\omega_0)t}\right\} e^{-\eta t} && (7)\\ &= (X_0 + \Delta X_0)\, \mathrm{Im}\left\{e^{j(\omega_0+\Delta\omega_0+j\eta)t}\right\} && (8) \end{aligned}$$

a condição 6 se torna

$$A(X_0 + \Delta X_0, \omega_0 + \Delta\omega_0 + j\eta) + jB(X_0 + \Delta X_0, \omega_0 + \Delta\omega_0 + j\eta) = 0 \tag{9}$$

A análise local é feita expandindo-se A e B em série de Taylor

$$\overbrace{A(X_0, \omega_0)}^{\times} + \frac{\partial A}{\partial X_0}(X_0, \omega_0)\, \Delta X_0 + \frac{\partial A}{\partial \omega_0}(X_0, \omega_0)(\Delta\omega_0 + j\eta) \tag{10}$$

$$+\overbrace{jB(X_0, \omega_0)}^{\times} + j\frac{\partial B}{\partial X_0}(X_0, \omega_0)\, \Delta X_0 + j\frac{\partial B}{\partial \omega_0}(X_0, \omega_0)(\Delta\omega_0 + j\eta) = 0 \tag{11}$$

onde os termos marcados com $\times$ se anulam em vista de 6.

Igualando-se as partes real e imaginário a zero, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X_0}(X_0, \omega_0)\, \Delta X_0 + \frac{\partial A}{\partial \omega_0}(X_0, \omega_0)\, \Delta\omega_0 - \frac{\partial B}{\partial \omega_0}(X_0, \omega_0)\, \eta &= 0 && (12)\\ \frac{\partial A}{\partial \omega_0}(X_0, \omega_0)\, \eta + \frac{\partial B}{\partial X_0}(X_0, \omega_0)\, \Delta X_0 + \frac{\partial B}{\partial \omega_0}(X_0, \omega_0)\, \Delta\omega_0 &= 0 && (13) \end{aligned}$$

onde $\Delta\omega_0$ pode ser eliminado, levando a

$$\overbrace{\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial \omega_0}(X_0,\omega_0)\right]^2+\left[\frac{\partial B}{\partial \omega_0}(X_0,\omega_0)\right]^2\right\}}^{\geq 0}\eta =$$
$$\left[\frac{\partial B}{\partial \omega_0}(X_0,\omega_0)\frac{\partial A}{\partial X_0}(X_0,\omega_0)-\frac{\partial A}{\partial \omega_0}(X_0,\omega_0)\frac{\partial B}{\partial X_0}(X_0,\omega_0)\right]\Delta X_0 \quad (14)$$

A condição 4 e a equação 14 permitem escrever a condição de Loeb para estabilidade de oscilações

$$\left[\frac{\partial B}{\partial \omega_0}(X_0,\omega_0)\frac{\partial A}{\partial X_0}(X_0,\omega_0)-\frac{\partial A}{\partial \omega_0}(X_0,\omega_0)\frac{\partial B}{\partial X_0}(X_0,\omega_0)\right]>0 \quad (15)$$