Método de Lyapunov

TakashiYoneyama

2003

Primeiro Método de Lyapunov

O Primeiro Método de Lyapunov, também conhecido como o Método Indireto ou Método da Linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não-linear através do seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos auto-valores. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno do ponto de operação nominal.

Seja o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \tag{1}$$

e x_E o ponto de equilíbrio de 1 correspondente a uma excitação constante $u(t) = u_E$, ou seja,

$$f(x_E, u_E) = 0 \tag{2}$$

Correspondendo a uma entrada perturbada $u = u_E + \nu$ o estado perturbado é do tipo $x = x_E + \xi$, satisfazendo 1

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d\left(x_E + \xi\right)}{dt} && (3)\\
&= \overbrace{\frac{dx_E}{dt}}^{0} + \frac{d\xi}{dt} && (4)\\
&= f(x, u) && (5)\\
&= f\left(x_E + \xi, u_E + \nu\right) && (6)\\
&= \overbrace{f\left(x_E, u_E\right)}^{0} + \nabla_x f\left(x_E, u_E\right)\xi + \nabla_u f\left(x_E, u_E\right)\nu + o\left(\|\xi, \nu\|^2\right) && (7)
\end{aligned}$$

O modelo linearizado é, portanto,

$$\frac{d\xi}{dt} = \overbrace{\nabla_x f\left(x_E, u_E\right)}^{A}\xi + \overbrace{\nabla_u f\left(x_E, u_E\right)}^{B}\nu \tag{8}$$

Teorema 1 *(Primeiro Método de Lyapunov)*

(i) Se o modelo linearizado 8 é assintoticamente estável, então o sistema original 1 é assintoticamente estável em torno de x_E.

(ii) Se o modelo linearizado 8 é instável, então o sistema original 1 é instável em torno de x_E.

Observação 2 *Se modelo linearizado 8 é estável, mas não assintoticamente estável (algum auto-valor de A se localiza sobre o eixo imaginário), nada se pode afirmar sobre o sistema original 1.*

Exemplo 3 *O pêndulo com haste rígida é descrito, na ausência de atrito, por*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{\ell}\sin\left(x_1\right)$$

Os pontos de equilíbrio são da forma $(k\pi, 0)$, $k = 0, 1, 2, ...$ e os termos correspondentes a 8 são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{x_1 = k\pi}$$

Em torno de $x_E = (0, 0)$

$$\left| \lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm j\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

e o primeiro método de Lyapunov não permite garantir a estabilidade do sistema original (neste exemplo, em particular, o pêndulo apresenta oscilação em torno da posição vertical, se a energia não é suficiente para que haja rotação).

Em torno de $x_E = (\pi, 0)$

$$\left| \lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - \frac{g}{\ell} = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

e, portanto, há um auto-valor no semi-plano direito. De fato, o pêndulo invertido é instável.

Segundo Método de Lyapunov

O Segundo Método de Lyapunov, também conhecido como o Método Direto, é baseado em um conceito análogo ao de energia. Considerando-se, para efeito de ilustração, um pêndulo simples de massa m e comprimento ℓ, sob efeito de aceleração de gravidade g uniforme na direção vertical e imerso em um meio viscoso com coeficiente b

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\sin\theta = 0 \tag{9}$$

onde θ é o ângulo entre a haste do pêndulo e a vertical, as energias cinética e potencial são dadas por

$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{10}$$

$$E_p = mg\ell(1 - \cos\theta) \tag{11}$$

A energia total é dada por

$$E_T = E_c + E_p \tag{12}$$

e se verifica por cálculos simples que

$$\frac{dE_T}{dt} = -\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 b \leq 0 \tag{13}$$

e

$$-\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 b = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{14}$$

Portanto, a energia do pêndulo decresce sempre que $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$, tendendo a E_T mínimo que, no caso ocorre para $\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) = (0, 0)$, onde também $\frac{dE_T}{dt} = 0$.

Definição 4 *Uma função $V : R^n \to R$ é dita ser positivo definida em uma vizinhança $B(0,\rho)$ da origem com raio ρ se $\forall x \in B(0,\rho)$, $V(x) \geq 0$ e $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Definição 5 *Uma função $V : R^n \to R$ é dita ser positivo semi-definida em uma vizinhança $B(0,\rho)$ da origem com raio ρ se $\forall x \in B(0,\rho)$, $V(x) \geq 0$ mas $V(x) = 0 \not\Rightarrow x = 0$.*

Definição 6 *Uma função $V : R^n \to R$ é dita ser globalmente positivo definida se é positivo definida em $B(0,\rho)$ com $\rho \uparrow \infty$.*

Definição 7 *Uma função $V : R^n \to R$ é dita ser negativo definida em uma vizinhança $B(0,\rho)$ da origem com raio ρ se $-V$ é positivo definida.*

As outras definições que combinando os qualificativos positivo, negativo, globalmente e semi-definida são obtidas por analogia (por exemplo, globalmente negativo semi-definida).

Teorema 8 *(Segundo Método de Lyapunov: Estabilidade Local para Sistema Invariante no Tempo) O sistema de ordem n (ou seja, $x(t) \in R^n$)*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \tag{15}$$

$$f(0) = 0 \tag{16}$$

é estável em uma vizinhança $B(0,\rho)$ se existe uma função contínua $V : R^n \to R$ tal que

$$V \text{ é positivo definida em } B(0,\rho) \tag{17}$$

$$V(x(t)) \text{ possui derivadas contínuas em relação a } t \tag{18}$$

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \text{ é negativo semi-definida em } B(0,\rho) \tag{19}$$

Prova. Pela definição **??**, um ponto de equilíbrio 0 é estável se dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $x(t_0) \in B(0,\delta) \Rightarrow x(t) \in B(0,\varepsilon)$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $\partial B(0,\varepsilon)$ a fronteira do $\overline{B(0,\varepsilon)}$ (ou seja, a *casca* da esfera). Seja $V_{\min}$ o mínimo de $V(x)$ para $x \in \partial B(0,\varepsilon)$ e note que $V(x) < V_{\min} \Rightarrow x \in B(0,\varepsilon)$. Seja δ tal que $\forall x \in B(0,\delta)$, $V(x) < V_{\min}$. Se $x(t_0) \in B(0,\delta)$ então $V(x(t)) < V_{\min}$ para $t \geq t_0$ pois $\frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$ e $V(x(t_0)) \leq V(x(t))$ para $t \geq t_0$. Portanto $x(t) \in B(0,\varepsilon)$, $\forall t \geq t_0$. ■

Observação 9 *Uma função V que satisfaz as condições 17 é chamada de Função de Lyapunov.*

Definição 10 *Uma função $V : R^n \to R$ é dita ser radialmente ilimitada se*

$$\|x\| \uparrow \infty \Rightarrow V(x) \uparrow \infty \tag{20}$$

Teorema 11 *(Segundo Método de Lyapunov: Estabilidade Global para Sistema Invariante no Tempo) O sistema de ordem n (ou seja, $x(t) \in R^n$)*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \tag{21}$$

$$f(0) = 0 \tag{22}$$

é globalmente estável se existe uma função contínua $V : R^n \to R$ tal que

$$V \text{ é positivo definida em } R^n \tag{23}$$

$$V(x(t)) \text{ possui derivadas contínuas em relação a } t \tag{24}$$

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \text{ é negativo semi-definida em } R^n \tag{25}$$

$$V \text{ é radialmente ilimitada} \tag{26}$$

Prova. Similar ao caso local, Teorema 8, notando que para $\forall x(t_0) \in R^n$, $V(x(t_0)) \leq V(x(t))$ em vista de $\frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$ e V ser radialmente ilimitada. ■

Exemplo 12 *Considere o sistema unidimensional*

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\sigma(x(t)) \tag{27}$$

onde $\sigma : R \rightarrow R$ *é tal que*

$$\xi\sigma(\xi) > 0,\ \forall\xi \neq 0 \tag{28}$$

Utilizando a função candidata de Lyapunov, positivo definida e radialmente ilimitada

$$V(x) = x^2 \tag{29}$$

obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= 2x(t)\frac{dx}{dt} && (30) \\ &= -2x(t)c\,(x(t)) \leq 0 && (31) \end{aligned}$$

ou seja, o sistema é globalmente estável.