

Plano de Fase

Takashi Yoneyama

2003

No caso específico de sistemas de segunda ordem, o espaço de estados é um plano e as trajetórias típicas podem ser traçáveis graficamente.

Seja o sistema descrito por

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Em um ponto (x_1, x_2) do plano a inclinação da trajetória é dada por

$$m = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \simeq \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

uma vez que

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\frac{\Delta x_2}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_1}{\Delta t}} \xrightarrow{\Delta t \downarrow 0} \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (1)$$

Os métodos mais comuns buscam a caracterização do lugar geométrico dos pontos do plano que apresentem um m constante (método da isóclina) ou calcular m nos pontos correspondentes a uma grade (método dos campos vetoriais).

Exemplo 1 *Equação de Lotka-Volterra. É uma equação que descreve a dinâmica populacional de predadores e presa de uma região. Se $x_1(t)$ representa a população de presas e $x_2(t)$ a de predadores*

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \quad (3)$$

onde $\{a, b, c, d\}$ são constantes positivas.

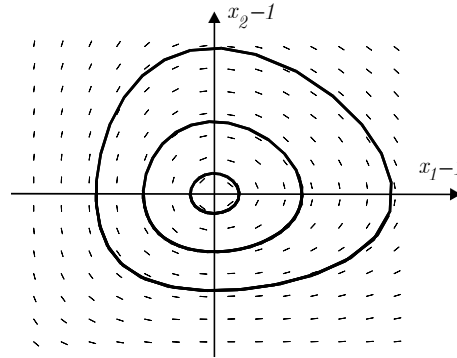


Figure 1: Esboço do Plano de Fase para a Equação de Lotka-Volterra

Exemplo 2 *Equação de Van der Pol.* É uma equação que aparece frequentemente no estudo de circuitos osciladores

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + \varepsilon [y^2(t) - 1] \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = 0 \quad (4)$$

onde $\varepsilon > 0$, que pode ser colocada na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\varepsilon [x_1^2(t) - 1] x_2(t) - x_1(t) \quad (6)$$

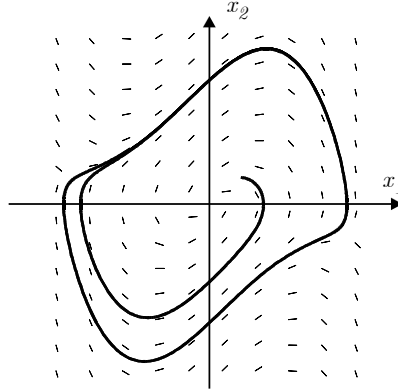


Figure 2: Esboço do Plano de Fase para a Equação de Van der Pol

Exemplo 3 *Equação de Lanchester.* É uma equação que modela combate entre exércitos. O número de soldados da facção 1, denotado $x_1(t)$ decai, por unidade de tempo, proporcionalmente ao número de soldados da facção 2. O número de soldados da facção 2, denotado $x_2(t)$ decai, por sua vez, proporcionalmente ao número de soldados inimigos da facção 1.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2(t) \quad (7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1(t) \quad (8)$$

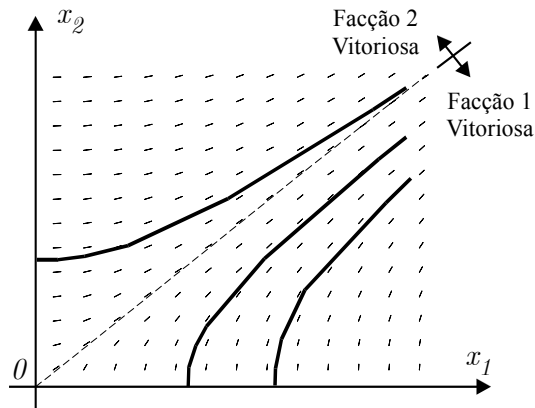


Figure 3: Esboço do Plano de Fase para a Equação de Lanchester

Programa para plotar o campo vetorial e trajetórias típicas no plano de fase

```
% Arquivo xdot.m
%
function [xponto] = xdot(t,x)
xponto(1,1)=x(2);
xponto(2,1)=(0.5-3*x(2)^2)*x(2)-x(1)-x(1)^2;
% Programa pfase.m
clear all
% Editar o arquivo xdot.m que deve conter
% o Modelo do Sistema, no formato:
%
% function [xponto] = xdot(t,x)
% xponto(1,1)=x(2);
% xponto(2,1)=(0.5-3*x(2)^2)*x(2)-x(1)-x(1)^2;
%
% e que representa:
%
% xponto1 = f1(x1,x2)
% xponto2 = f2(x1,x2)
% Definir Area de Interesse no Plano de Fase
x1min=-2;
x1max=1;
x2min=-2;
x2max=2;
% Definir Numero de Pontos em Cada Eixo
npont=25;
deltx1=(x1max-x1min)/npont;
deltx2=(x2max-x2min)/npont;
compr=sqrt(deltx1^2+deltx2^2)/3;
% Fixar Janela de Grafico
axis([x1min x1max x2min+deltx2 x2max+deltx2]);
hold on
% Plotar o Campo de Vetores
for x1=x1min:deltx1:x1max
    for x2=x2min:deltx2:x2max
        x=[x1 x2]; t=0;
        xponto=xdot(t,x);
        m=xponto(2)/(xponto(1)+1e-8);
        dx1=compr/sqrt(1+m^2);
        dx2=m*dx1;
        plot([x1 x1+dx1],[x2 x2+dx2],'k');
    end
end
% Programa trajetos.m
%
% Chama xdot.m que deve ter a forma
% function [xponto] = xdot(t,x)
% xponto(1,1)=x(2);
% xponto(2,1)=(0.5-3*x(2)^2)*x(2)-x(1)-x(1)^2;
% Entrada da Condicao Inicial
x0(1)=input('IC(1) = ');
x0(2)=input('IC(2) = ');
% Especificar o Intervalo de Tempo
tspan=[0 20];
% Chama o Resolvedor de EDO
```

```
[T,X]=ode45('xdot',tspan,x0)
% Plota Trajetoria no Plano de Fase
plot(X(:,1),X(:,2),'k')
```

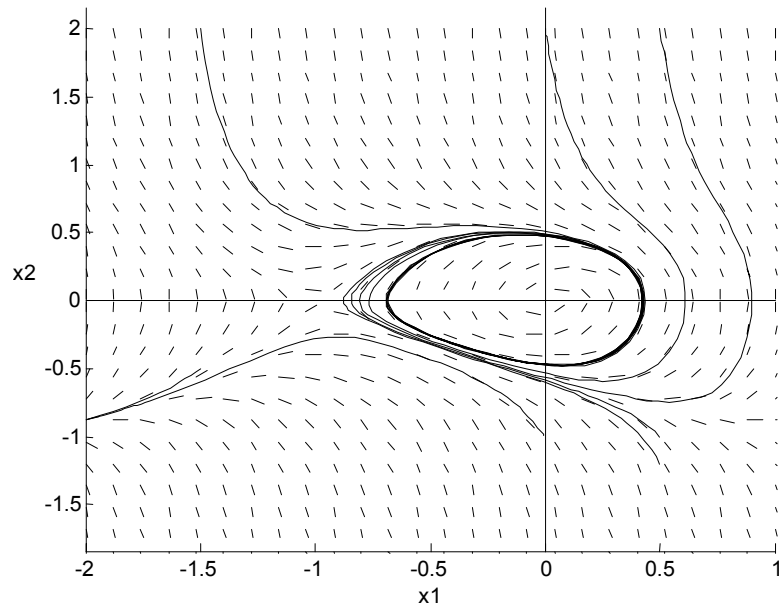


Figure 4: