

Filtro de Partículas Aperfeiçoado para Rastreamento de Alvos com Coeficiente Balístico Variável

Anton Pavlov e Marcelo G. S. Bruno

Resumo—Apresenta-se nesse artigo um filtro de partículas aperfeiçoado para rastreamento de alvos balísticos supersônicos com coeficiente balístico aleatório e lentamente variável no tempo. Como observações, utilizam-se medidas da posição do alvo geradas por um radar convencional. O filtro de partículas proposto combina otimização da função de importância, reamostragem e passos de movimento Metropolis-Hastings para controlar degeneração e empobrecimento de partículas. Experimentos com dados simulados mostram que o desempenho do filtro proposto aproxima-se do desempenho ótimo dado pelo limite inferior de Cramér-Rao (CRLB). O rastreador aperfeiçoado proposto também apresenta desempenho superior ao de um filtro “bootstrap” convencional operando com o mesmo número de partículas.

Palavras-Chave—Filtros de partículas, Métodos Monte Carlo seqüenciais, Estimação bayesiana, Rastreamento de alvos balísticos.

Abstract—We present in this paper an improved particle filter for tracking supersonic ballistic targets with slow-varying, random ballistic coefficient. The proposed particle filter combines an optimized importance function, resampling, and Metropolis-Hastings (MH) move steps to control particle degeneracy and particle impoverishment. Experiments with simulated data show that the performance of the proposed filter approaches the optimal performance given by the Cramér-Rao lower bound (CRLB). The proposed improved tracker also outperforms a conventional bootstrap filter operating with the same number of particles.

Keywords—Particle filters, Sequential Monte Carlo methods, Bayesian estimation, Ballistic target tracking.

I. INTRODUÇÃO

A solução do problema de rastreamento automático de alvos balísticos a partir de medidas de radar convencional apresenta grande dificuldade devido a não-linearidades inerentes ao modelo de movimento do alvo e/ou ao modelo de observações que impedem a aplicação direta de algoritmos convencionais de estimação por mínimos quadrados como o filtro de Kalman. Recentemente, propôs-se uma solução para esse problema utilizando-se métodos Monte Carlo seqüenciais [2] conhecidos como filtros de partículas, que usam técnicas de simulação estocástica para aproximar a estimativa de mínimo erro quadrático médio (MMSE) do estado oculto do alvo dadas as medidas do radar. A idéia central dos filtros de partículas [3] é representar a função densidade de probabilidade (f.d.p) a posteriori do estado do alvo condicionada às observações por um conjunto apropriadamente ponderado de amostras (ou “partículas”). Quando o número de amostras tende a infinito,

a sua média, ponderada pelos respectivos pesos, converge então (em algum sentido estatístico) para a estimativa MMSE desejada do estado. Em um contexto de rastreamento “on-line”, as partículas são amostradas seqüencialmente de uma função de importância escolhida pelo projetista e os pesos correspondentes são atualizados recursivamente [3] de acordo com os modelos de movimento do alvo e de observações e, de acordo com a função de importância escolhida.

Em [4], considerou-se o problema de otimização de filtros de partículas assumindo-se, como em [1], um modelo linear de observações com medidas em coordenadas cartesianas e um modelo não-linear de movimento de alvo, também em coordenadas cartesianas e com coeficiente balístico constante e conhecido. Nesse artigo, fazem-se duas modificações importantes em relação aos modelos em [1], [4]. Primeiro, assume-se um modelo *não-linear* de observações com medidas diretamente em coordenadas polares. Além disso, assume-se, como em [5], que o coeficiente balístico do alvo é desconhecido e aleatório e varia lentamente no tempo de acordo com um modelo “random walk”. O coeficiente balístico é incorporado então ao vetor de estados do alvo e estimado recursivamente em conjunto com as características cinemáticas (posição e velocidade) do alvo nas coordenadas x e y usando como estimador um filtro de partículas aperfeiçoado.

Um dos principais problemas práticos associados ao uso de filtros de partículas em estimação seqüencial é o crescimento ao longo do tempo [6] da variância dos pesos associados à população de amostras levando, no limite, ao fenômeno de degeneração de partículas [3], segundo o qual apenas algumas partículas terão pesos normalizados próximos a 1 enquanto a grande maioria das partículas terão peso desprezível. Uma das formas de minimizar a degeneração de partículas é otimizar a escolha da função de importância. Ao contrário porém de [4], a inclusão nesse artigo de um modelo não-linear de observações impede que se obtenha uma expressão analítica fechada para a função de importância ótima. Recorre-se então ao método de linearização local proposto em [6] para se obter um aproximação da função de importância ótima. Utiliza-se ainda reamostragem das partículas [3] após o estágio de amostragem por importância para obter reduções adicionais na variância dos pesos. Para se restaurar a diversidade das partículas após o passo de reamostragem, segue-se a idéia em [7] de se acrescentar ao algoritmo de rastreamento um passo adicional de movimento Metropolis-Hastings, ver [8], que é projetado usando-se a mesma aproximação local da função de importância ótima usada no passo de amostragem por importância. Como em [4], compara-se o desempenho do filtro de partículas aperfeiçoado ao desempenho de um filtro “bootstrap” convencional como proposto em [9], [10].

Anton Pavlov e Marcelo G. S. Bruno, Departamento de Telecomunicações, Divisão de Engenharia Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil, E-mails: {bruno,anton}@ele.ita.br. O trabalho do primeiro autor foi apoiado pela CAPES, Brasil.

Finalmente, como medida de qualidade para os algoritmos em estudo, usa-se o algoritmo em [11] para se calcular o limite inferior de Cramér-Rao (CRLB) que limita por baixo o erro quadrático médio associado à estimação do vetor de estados.

Esse artigo é dividido em 5 seções. A Seção I é essa Introdução. Na Seção II, descrevem-se os modelos de movimento do alvo e de observações. Na Seção III, deduz-se o filtro de partículas aperfeiçoado, detalhando-se a técnica de aproximação da função de importância ótima e o projeto do passo de movimento. O desempenho do algoritmo proposto em comparação ao filtro “bootstrap” e ao CRLB é examinado na Seção IV. Finalmente, na Seção V, apresentam-se as principais conclusões do nosso trabalho.

II. MODELOS DE MOVIMENTO E OBSERVAÇÕES

A seguir, descrevem-se brevemente os modelos assumidos nesse artigo para o movimento do alvo que se deseja seguir e para as medidas geradas pelo radar de rastreamento. Ao longo desse artigo, usam-se letras minúsculas para representar tanto vetores aleatórios quanto realizações (amostras) de vetores aleatórios, com a interpretação apropriada implícita no contexto.

A. Modelo de Movimento

Seja k um número inteiro não-negativo e denote por Δ o intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas de radar. Assuma ainda um sistema bidimensional (x, y) de coordenadas cartesianas. Para um coeficiente balístico aleatório e variável no tempo, define-se o vetor de estados de dimensão 5×1

$$\mathbf{s}_k = [x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \beta_k]^T \quad (1)$$

que reúne as posições, x_k e y_k , e as velocidades, \dot{x}_k e \dot{y}_k do alvo no instante k e inclui ainda o valor do coeficiente balístico, β_k , no mesmo instante. Considere em seguida que o parâmetro β_k varia no tempo de acordo com o modelo “random walk” [5]

$$\beta_k = \beta_{k-1} + w_k^\beta \quad (2)$$

onde $\{w_k^\beta\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância \tilde{q} . Considerando ainda por simplicidade a hipótese de Terra plana (“flat Earth”), descreve-se a evolução dinâmica do vetor de estados \mathbf{s}_k pelo modelo não-linear adaptado de [1]

$$\mathbf{s}_{k+1} = \Phi \mathbf{s}_k + \mathbf{G} \mathbf{f}(\mathbf{s}_k) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k \quad (3)$$

onde g é a aceleração da gravidade (assumida constante), as matrizes Φ e \mathbf{G} são dadas por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2}{2} & 0 \\ \Delta & 0 \\ 0 & \frac{\Delta^2}{2} \\ 0 & \Delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

e $\{\mathbf{w}_k\}$, $k \geq 0$, é uma seqüência de vetores aleatórios gaussianos de média zero e matriz de covariância não singular

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{q\Delta^3}{3} & q\frac{\Delta^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q\Delta^2}{2} & q\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q\Delta^3}{3} & \frac{q\Delta^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q\Delta^2}{2} & q\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{q}\Delta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

com q um número real positivo. Finalmente, a função não-linear $\mathbf{f}(\cdot)$ em (3) corresponde à força de arrasto aerodinâmica que é dada por

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{s}_k) = -0.5 \frac{g}{s_k[5]} \rho(s_k[3]) \sqrt{s_k^2[2] + s_k^2[4]} \begin{bmatrix} s_k[2] \\ s_k[4] \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Em (6), o parâmetro ρ representa a densidade do ar que decai com a altitude de acordo com a lei exponencial

$$\rho(y) = c_1 \exp(-c_2 y) \quad (7)$$

onde $c_1 = 1,227$, $c_2 = 1,093 \times 10^{-4}$ para $y < 9144$ m, e $c_1 = 1,754$, $c_2 = 1,49 \times 10^{-4}$ para $y \geq 9144$ m.

B. Modelo das Observações

O radar de rastreamento gera a cada instante k medidas corrompidas por ruído $\mathbf{z}_k = [z_{1,k} \ z_{2,k}]^T$ respectivamente da distância (“range”) e do ângulo de elevação do alvo. As medidas do radar em coordenadas polares relacionam-se ao estado oculto \mathbf{s}_k em coordenadas cartesianas através do modelo não-linear

$$\mathbf{z}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{s_k^2[1] + s_k^2[3]} \\ \arctan\left(\frac{s_k[3]}{s_k[1]}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{s}_k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{r,k} \\ v_{\epsilon,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_k} \quad (8)$$

onde $\{v_{r,k}\}$ e $\{v_{\epsilon,k}\}$ são duas seqüências ruído branco gaussiano, mutuamente independentes e identicamente distribuídas com média zero e variâncias respectivamente σ_r^2 e σ_ϵ^2 . Assume-se ainda que as seqüências $\{v_{r,k}\}$ e $\{v_{\epsilon,k}\}$ são independentes da seqüência $\{\mathbf{w}_k\}$ e do estado inicial \mathbf{s}_0 na equação (3).

Seja $\mathbf{v}_k = [v_{r,k} \ v_{\epsilon,k}]^T$ como indicado na equação (8). Segue da hipótese de independência mútua entre $\{v_{r,k}\}$ e $\{v_{\epsilon,k}\}$ que a matriz de covariância $\mathbf{R} = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$ é dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}.$$

Em (8), considerou-se que o ângulo de elevação real se situa entre 0 e $\pi/2$. Do contrário, basta adicionar π ao termo \arctan em (8).

III. ALGORITMOS DE FILTRAGEM

Nessa seção, introduz-se o filtro de partículas aperfeiçoado proposto nesse artigo. Apresenta-se primeiro uma breve revisão da teoria de amostragem por importância seqüencial e aplicam-se em seguida diferentes técnicas de otimização de filtros de partículas no contexto específico do problema de rastreamento de alvos balísticos. Finalmente, conclui-se a seção com uma breve discussão sobre o cálculo do limite

inferior de Cramér-Rao que serve como parâmetro para avaliar a qualidade do estimador seqüencial de estados.

Ao longo dessa seção, dada uma função diferenciável arbitrária $\mathbf{g} : \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^M$, usa-se a notação $\nabla_s \mathbf{g}(\mathbf{s})$ para representar a matriz \mathbf{A} de dimensão $M \times N$ tal que

$$A_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial s_j}(\mathbf{s}) \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

A. Amostragem por Importância Seqüencial

Seja $\mathbf{z}_{1:k} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$ uma seqüência de observações (medidas) e seja $\{\mathbf{s}_k\}$, $k \geq 0$, a seqüência de vetores de estado assumida contínua e descrita pela f.d.p. do estado inicial, $p(\mathbf{s}_0)$, e pela f.d.p. de transição, $p(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1})$. O objetivo de um filtro de partículas é gerar seqüencialmente um conjunto de amostras $\{\mathbf{s}_k^{(j)}\}$ com pesos associados $w_k^{(j)}$, $j = 1, \dots, N_p$, tal que a média ponderada das partículas convirja para a estimativa MMSE ótima do estado $E\{\mathbf{s}_k | \mathbf{z}_{1:k}\}$ quando N_p tende a infinito. Seja $q(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})$ uma f.d.p. válida, denominada função de importância, cujo suporte contém o suporte de $p(\mathbf{s}_k | \mathbf{z}_{1:k})$. Um algoritmo genérico de amostragem por importância seqüencial (em inglês, "sequential importance sampling" ou SIS) para gerar recursivamente o conjunto ponderado de partículas $\{\mathbf{s}_k^{(j)}, w_k^{(j)}\}$ é [3]

1) Inicialização

- Amostre $\mathbf{s}_0^{(j)} \sim p(\mathbf{s}_0)$, $j = 1, \dots, N_p$.
- Fixe $w_0^{(j)} = \frac{1}{N_p}$, $j = 1, \dots, N_p$.

2) Amostragem por Importância

Para $k = 1, \dots, T_{max}$

Para $j = 1, \dots, N_p$

- Amostre $\mathbf{s}_k^{(j)} \sim q(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})$
- Faça

$$w_k^{(j)} = C_k w_{k-1}^{(j)} \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{s}_k^{(j)}) p(\mathbf{s}_k^{(j)} | \mathbf{s}_{k-1}^{(j)})}{q(\mathbf{s}_k^{(j)} | \mathbf{s}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})} \quad (9)$$

onde a constante C_k é calculada tal que $\sum_{j=1}^{N_p} w_k^{(j)} = 1$.

- Calcule

$$\hat{\mathbf{s}}_{k|k} = \sum_{j=1}^{N_p} w_k^{(j)} \mathbf{s}_k^{(j)}. \quad (10)$$

Pode-se mostrar [12] que, para N_p finito,

$$\hat{\mathbf{s}}_{k|k} = \sum_{j=1}^{N_p} w_k^{(j)} \mathbf{s}_k^{(j)}$$

é uma estimativa enviesada de $E\{\mathbf{s}_k | \mathbf{z}_{1:k}\}$, mas, assintoticamente,

$$\hat{\mathbf{s}}_{k|k} \xrightarrow[N_p \rightarrow \infty]{a.s.} E\{\mathbf{s}_k | \mathbf{z}_{1:k}\} \quad (11)$$

onde $\xrightarrow[N_p \rightarrow \infty]{a.s.}$ denota "almost-sure convergence", também chamada convergência com probabilidade um.

B. Filtro de Partículas Aperfeiçoado

Como mencionado na Introdução, a aplicação direta do algoritmo descrito na Seção III-A leva ao fenômeno indesejável de degeneração de partículas [3], que é causado pelo crescimento ao longo do tempo da variância dos pesos $\{w_k^{(j)}\}$. Uma possível estratégia para reduzir a degeneração de partículas é utilizar a função de importância

$$q(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k}) = p(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{z}_k) \quad (12)$$

que, segundo [6], minimiza a variância dos pesos condicionada nas trajetórias simuladas das partículas e nas observações. De acordo com a lei de Bayes e as hipóteses assumidas nos modelos de movimento e observação da Seção II, escreve-se

$$p(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{z}_k) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{s}_k) p(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{s}_{k-1})}. \quad (13)$$

Aproximação da Função de Importância Ótima Devido à não-linearidade do modelo de observações em (8), não é possível obter uma expressão analítica fechada para a função de importância em (13). Como aproximação, recorre-se então à técnica de linearização local descrita em [6]. Seja \mathbf{s}_k o vetor de estados desconhecido no instante k definido como em (1). Defina seguir $\Psi(\mathbf{s}_k)$ como a função

$$\Psi(\mathbf{s}_k) = \Phi \mathbf{s}_k + \mathbf{G} \mathbf{f}(\mathbf{s}_k) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde Φ , \mathbf{G} , e $\mathbf{f}(\cdot)$ são definidos nas equações (4) e (6). Fazendo-se então uma expansão em série de Taylor da equação (8) em torno do ponto $\Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)})$, e truncando-se a série nos termos de primeira ordem, obtém-se a aproximação

$$\mathbf{z}_k \approx \mathbf{h}[\Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)})] + \mathbf{H}_k^{(j)} [\mathbf{s}_k - \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)})] + \mathbf{v}_k \quad (15)$$

onde $\mathbf{H}_k^{(j)} = \nabla_s \mathbf{h}(\mathbf{s})$ calculada em $\mathbf{s} = \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)})$ e a função não-linear $\mathbf{h}(\cdot)$ é definida em (8). Em particular, da equação (8), tem-se

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{s[1]}{\sqrt{s^2[1]+s^2[3]}} & 0 & \frac{s[3]}{\sqrt{s^2[1]+s^2[3]}} & 0 \\ \frac{-s[3]}{s^2[1]+s^2[3]} & 0 & \frac{s[1]}{s^2[1]+s^2[3]} & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Denote agora por $N(\mathbf{s} - \mathbf{a}, \mathbf{P})$ a função multivariável normal de argumento \mathbf{s} , média \mathbf{a} e matriz de covariância \mathbf{P} . Para o modelo dinâmico não-linear em (3) e para o modelo linearizado de observações em (15), procedendo-se analogamente ao descrito no Apêndice I da referência [4], obtém-se da equação (13) a expressão aproximada da função de importância ótima

$$p(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{z}_k) = N(\mathbf{s}_k - \mathbf{m}_k^{(j)}, \Sigma_k^{(j)}) \quad (17)$$

onde

$$\Sigma_k^{(j)} = \left[\mathbf{Q}^{-1} + (\mathbf{H}_k^{(j)})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}_k^{(j)}) \right]^{-1} \quad (18)$$

$$\mathbf{m}_k^{(j)} = (\Sigma_k^{(j)}) \left\{ \mathbf{Q}^{-1} \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)}) + (\mathbf{H}_k^{(j)})^T \mathbf{R}^{-1} \times \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)})) + \mathbf{H}_k^{(j)} \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)}) \right] \right\}. \quad (19)$$

Após amostrar a j -ésima partícula $\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)} \sim N(\mathbf{s}_k - \mathbf{m}_k^{(j)}, \Sigma_k^{(j)})$, atualiza-se o peso correspondente $\tilde{w}_k^{(j)}$ conforme (9) de acordo com a recursão [14]

$$\tilde{w}_k^{(j)} = C_k w_{k-1}^{(j)} \frac{N(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)}), \mathbf{R}) N(\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)} - \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)}), \mathbf{Q})}{N(\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)} - \mathbf{m}_k^{(j)}, \Sigma_k^{(j)})} \quad (20)$$

onde a constante de proporcionalidade C_k é calculada como em (9) de modo que $\sum_j \tilde{w}_k^{(j)} = 1$.

Passo de Seleção Além da otimização da escolha da função de importância descrita anteriormente, pode-se adicionalmente combater a degeneração de partículas introduzindo-se um passo de seleção após o passo de amostragem por importância. O objetivo do passo de seleção é gerar múltiplas cópias de partículas de alto peso enquanto partículas de baixo peso são descartadas. Esse objetivo pode ser atingido como proposto em [10] reamostrando-se um novo conjunto de partículas $\{\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, N_p$ da população original $\{\mathbf{s}_k^{(j)}\}$ com probabilidade de substituição de acordo com os pesos $\{\tilde{w}_k^{(j)}\}$. Formalmente, amostra-se um conjunto de índices auxiliares

$$i^{(j)} \sim \{1, 2, \dots, N_p\} \text{ com } P(\{i^{(j)} = l\}) = \tilde{w}_k^{(l)} \quad (21)$$

e faz-se

$$\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)} = \hat{\mathbf{s}}_k^{(i^{(j)})} \quad j = 1, \dots, N_p. \quad (22)$$

Após a reamostragem de acordo com os pesos, pode-se mostrar, ver [13], que a nova trajetória de partículas reamostradas $(\mathbf{s}_{0:k-1}^{(i^{(j)})}, \bar{\mathbf{s}}_k^{(j)})$, $i^{(j)}$ como em (21), é distribuída aproximadamente de acordo com a função densidade de probabilidade a posteriori real $p(\mathbf{s}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$ e, portanto, a estimativa MMSE marginal $E\{\mathbf{s}_k | \mathbf{z}_{1:k}\}$ pode ser aproximada pela lei dos grandes números pela média ponderada das amostras $\{\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)}\}$ com pesos idênticos $\bar{w}_k^{(j)}$ iguais a $1/N_p$ para $j = 1, \dots, N_p$.

Filtros de partículas que incorporam um passo de reamostragem como descrito em (21) e (22) são chamados genericamente [3] de “sampling/importance resampling (SIR) filters”. Na prática, a reamostragem só é utilizada quando se detecta degeneração apreciável no algoritmo SIS padrão. Para tanto, pode-se usar como figura de mérito, o número efetivo aproximado de partículas, $N_{eff} = \left[\sum_j (\tilde{w}_k^{(j)})^2 \right]^{-1}$ [3]. Nesse artigo, usa-se reamostragem sempre que N_{eff} cai abaixo de 60 % do número total de partículas N_p .

Passo de Movimento O passo de reamostragem descrito anteriormente elimina a degeneração de partículas, mas produz um efeito colateral indesejável de perda de diversidade da população de amostras. Especificamente, reamostragem de acordo com os pesos de importância pode levar a um novo conjunto de amostras formado por múltiplas cópias idênticas de um pequeno número de partículas. Uma possível técnica, ver [7], para restaurar diversidade sem alterar as estatísticas da população de partículas é acrescentar um passo MCMC (“Markov Chain Monte Carlo”) que move o conjunto de partículas reamostradas $\{\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)}\}$ para um novo conjunto $\{\mathbf{s}_k^{(j)}\}$ usando-se, para cada partícula j , uma cadeia de Markov com

núcleo $T(\mathbf{s}_k^{(j)} | \bar{\mathbf{s}}_k^{(j)})$ satisfazendo a condição de invariância

$$\int_{\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)}} T(\mathbf{s}_k^{(j)} | \bar{\mathbf{s}}_k^{(j)}) p(\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)} | \bar{\mathbf{s}}_{0:k-1}^{(j)}, \mathbf{z}_{1:k}) d\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)} = p(\mathbf{s}_k^{(j)} | \bar{\mathbf{s}}_{0:k-1}^{(j)}, \mathbf{z}_{1:k}) \quad (23)$$

de forma que a nova trajetória deslocada de partículas $(\mathbf{s}_{0:k-1}^{(i^{(j)})}, \mathbf{s}_k^{(j)})$, $i^{(j)}$ como em (21), permanece distribuída de acordo com $p(\mathbf{s}_{0:k} | \mathbf{z}_{0:k})$ e, portanto, com pesos $w_k^{(j)} = 1/N_p$. Introduzindo-se

$$w^*(\mathbf{s}_k^{(j)}) = \frac{N(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{s}_k^{(j)}), \mathbf{R}) N(\mathbf{s}_k^{(j)} - \Psi(\bar{\mathbf{s}}_{k-1}^{(j)}), \mathbf{Q})}{N(\mathbf{s}_k^{(j)} - \bar{\mathbf{m}}_k^{(j)}, \bar{\Sigma}_k^{(j)})}, \quad (24)$$

uma possível estratégia baseada no algoritmo Metropolis-Hastings [8] para construir uma cadeia de Markov que satisfaça a condição (23) é resumida na Tabela I, onde $\mathcal{U}([0, 1])$ denota a f.d.p. uniforme no intervalo $[0, 1]$. Finalmente, na Tabela II, resume-se o algoritmo completo para o filtro de partículas aperfeiçoado, doravante referido nesse artigo pela sigla ISIR (“improved sampling/importance resampling filter”).

TABELA I

PASSO DE MOVIMENTO PARA O FILTRO SIR APERFEIÇOADO

PARA $j = 1, \dots, N_p$	
• Amostre $\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)} \sim N(\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{m}}_k^{(j)}, \bar{\Sigma}_k^{(j)})$ onde $\bar{\mathbf{m}}_k^{(j)}$ e $\bar{\Sigma}_k^{(j)}$ são obtidas a partir das equações (18) e (19)	
calculadas no ponto $\mathbf{s}_{k-1}^{(i^{(j)})}$, com $i^{(j)}$ obtido como em (21).	
• Amostre $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$.	
• Se $u \leq \min \left\{ 1, \frac{w^*(\hat{\mathbf{s}}_k^{(j)})}{w^*(\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)})} \right\}$,	faça $\mathbf{s}_k^{(j)} = \hat{\mathbf{s}}_k^{(j)}$
do contrário	faça $\mathbf{s}_k^{(j)} = \bar{\mathbf{s}}_k^{(j)}$.
FIM-LAÇO	

C. Filtro Bootstrap

Como parâmetro de comparação apenas, implementa-se também nesse artigo o filtro “bootstrap” padrão [9], [10] que utiliza como função de importância

$$q(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{0:k-1}^{(j)}, \mathbf{z}_{1:k}) = p(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}^{(j)}) = N(\mathbf{s}_k - \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)}), \mathbf{Q}), \quad (25)$$

independente das observações $\mathbf{z}_{1:k}$ para $j = 1, \dots, N_p$. Com a escolha em (25), a regra de atualização dos pesos em (9) reduz-se simplesmente a

$$w_k^{(j)} = C_k p(\mathbf{z}_k | \mathbf{s}_k^{(j)}) = C_k N(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{s}_k^{(j)}), \mathbf{R})$$

para $j = 1, \dots, N_p$. Completa-se finalmente o algoritmo com um passo de reamostragem de acordo com os pesos como descrito anteriormente.

TABELA II

FILTRO DE PARTÍCULAS APERFEIÇOADO (ISIR) PARA RASTREAMENTO DE ALVOS BALÍSTICOS

Faça $k = 1$.
1) Inicialização
PARA $j = 1, \dots, N_p$
• Amostre $\mathbf{s}_0^{(j)} \sim p(\mathbf{s}_0)$.
• Fixe $w_0^{(j)} = 1/N_p$.
FIM-LAÇO
2) Amostragem por Importância
PARA $j = 1, \dots, N_p$
• Amostre $\tilde{\mathbf{s}}_k^{(j)} \sim N(\mathbf{s}_k - \mathbf{m}_k^{(j)}, \Sigma_k^{(j)})$ onde $\mathbf{m}_k^{(j)}$ e $\Sigma_k^{(j)}$ são obtidas a partir de (18) (19) calculadas em $\mathbf{s}_{k-1}^{(j)}$.
• Atualize os pesos
$\tilde{w}_k^{(j)} = C_k w_{k-1}^{(j)} \frac{N(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{s}}_k^{(j)}, \mathbf{R})) N(\tilde{\mathbf{s}}_k^{(j)} - \Psi(\mathbf{s}_{k-1}^{(j)}, \mathbf{Q}))}{N(\tilde{\mathbf{s}}_k^{(j)} - \mathbf{m}_k^{(j)}, \Sigma_k^{(j)})}$
FIM-LAÇO
3) Passo de Reamostragem
PARA $j = 1, \dots, N_p$
• Amostre $i^{(j)} \sim \{1, 2, \dots, N_p\}$
com $P(\{i^{(j)} = l\}) = \tilde{w}_k^{(l)}$.
• Faça $\bar{\mathbf{s}}_k^{(j)} = \tilde{\mathbf{s}}_k^{(i^{(j)})}$.
FIM-LAÇO
4) Passo de Movimento
• Obtenha $\mathbf{s}_k^{(j)}$ utilizando o passo de movimento na Tabela I.
• Faça $w_k^{(j)} = 1/N_p$.
Faça $k = k + 1$ e volte para o passo 2.

D. Limite Inferior de Cramér-Rao

Sob certas condições de regularidade, ver [11], o erro quadrático médio na estimação do valor assumido pelas componentes do vetor de estados \mathbf{s}_k é limitado por baixo pelos elementos da diagonal da inversa da matriz de informação de Fisher

$$\mathbf{J}_k = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_k} \ln p(\mathbf{s}_k, \mathbf{z}_{1:k}) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_k} \ln p(\mathbf{s}_k, \mathbf{z}_{1:k}) \right]^T \right\} \quad (26)$$

onde para uma função diferenciável arbitrária $\phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\partial \phi(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}$ denota o vetor de dimensão $N \times 1$ dado por

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \left[\frac{\partial \phi(\mathbf{s})}{\partial s[1]} \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{s})}{\partial s[2]} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{s})}{\partial s[N]} \right]^T$$

Tichavský et al. introduziram em [11] um algoritmo recursivo para o cálculo da matriz \mathbf{J}_k . Infelizmente, a aplicação direta das recursões em [11] não é possível no problema de rastreamento de alvos balísticos já que o cálculo da matriz \mathbf{J}_k segundo [11] envolve nesse caso esperanças de funções do estado \mathbf{s}_k para as quais não existem formas analíticas fechadas. Procede-se então nesse artigo como em [1], [15] e substituem-se essas esperanças pelas suas estimativas Monte Carlo obtidas a partir das mesmas trajetórias de estado simuladas que são usadas para estimar as curvas de erro RMS. Omitem-se os detalhes nesse artigo por economia de espaço.

IV. SIMULAÇÕES

Simularam-se inicialmente o modelo de movimento em (3) e o modelo de observações em (8) com parâmetros

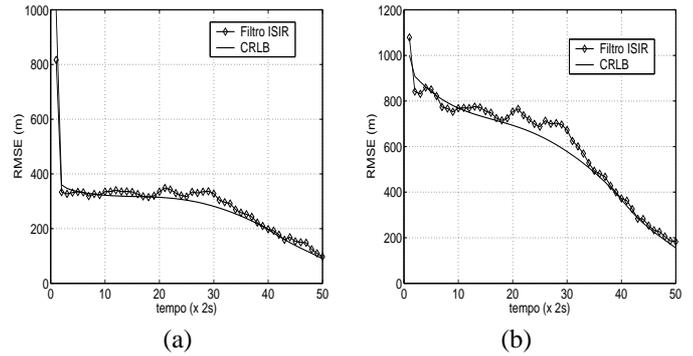


Fig. 1. Erro RMS da estimativa da posição, $\sigma_r = 100 \text{ m}$, $\sigma_{\beta_0} = 2500 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$ e $\sigma_{\dot{x}_0} = \sigma_{\dot{y}_0} = 20 \text{ m/s}$; (a) Coordenada x , (b) Coordenada y .

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\Delta = 2 \text{ s}$, $q = \tilde{q} = 5$, $\sigma_r = 100 \text{ m}$, e $\sigma_\epsilon = 0.017 \text{ rad}$. O estado inicial do alvo, \mathbf{s}_0 , foi especificado como um vetor aleatório gaussiano de média $\mathbf{m}_0 = [232000 \text{ m} \quad 2290 \cos(190^\circ) \text{ m/s} \quad 88000 \text{ m} \quad 2290 \sin(190^\circ) \text{ m/s} \quad 40000 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}]$ e matriz de covariância diagonal Σ_0 com $\Sigma_0(1,1) = \Sigma_0(3,3) = 1000^2 \text{ m}^2$, $\Sigma_0(2,2) = \Sigma_0(4,4) = 20^2 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ e $\Sigma_0(5,5) = 2500^2 \text{ kg}^2.\text{m}^{-2}.\text{s}^{-4}$.

A simulação contém 100 realizações Monte Carlo da trajetória do alvo e das respectivas medidas do radar. Em cada realização, rastreou-se o alvo ao longo de 50 intervalos de tempo utilizando-se o filtro de partículas aperfeiçoado (ISIR) da Tabela II com $N_p = 8000$ partículas. Esse número de partículas utilizado compara-se a números muito maiores (25000) mencionados na literatura [1] em problemas semelhantes de rastreamento onde filtros “bootstrap” convencionais foram empregados. As curvas de erro RMS para as estimativas da posição do alvo geradas pelo filtro ISIR respectivamente nas coordenadas x e y são mostradas nas Figuras 1(a) e (b). Para efeito de comparação, sobrepõem-se ainda aos gráficos das Figuras 1(a) e (b) a raiz quadrada dos correspondentes CRLBs para o erro quadrático médio de estimação da posição respectivamente nas coordenadas x e y . Nota-se pelas Figuras 1(a) e (b) que as curvas de erro RMS do filtro ISIR acompanham o limite inferior ideal de Cramér-Rao (CRLB) aproximando-se do mesmo nos estágios finais do vôo balístico. Esse bom desempenho do filtro ISIR é obtido apesar de a simulação incluir um coeficiente balístico aleatório e desconhecido com condição inicial também desconhecida e aleatória. Ocasionalmente, as curvas RMS estimadas caíram abaixo do CRLB devido ao uso de um número finito de simulações Monte Carlo.

A seguir, para estudar o comportamento do filtro quando se deterioram as condições de observação e amplia-se o grau de incerteza sobre a posição do alvo, aumentou-se σ_r para 150 m e aumentaram-se $\sigma_{\dot{x}_0} = \sigma_{\dot{y}_0}$ para 50 m/s . As Figuras 2(a) and (b) mostram os erros RMS das estimativas de posição, respectivamente nas coordenadas x e y , dessa vez para o filtro ISIR da Tabela II e para o filtro “bootstrap” descrito na Seção III-C. Os correspondentes CRLBs são mostrados também na Figura 2 como critério de comparação. Tanto o filtro ISIR como o filtro “bootstrap” utilizaram $N_p = 8000$ partículas e as curvas de erro RMS foram estimadas novamente

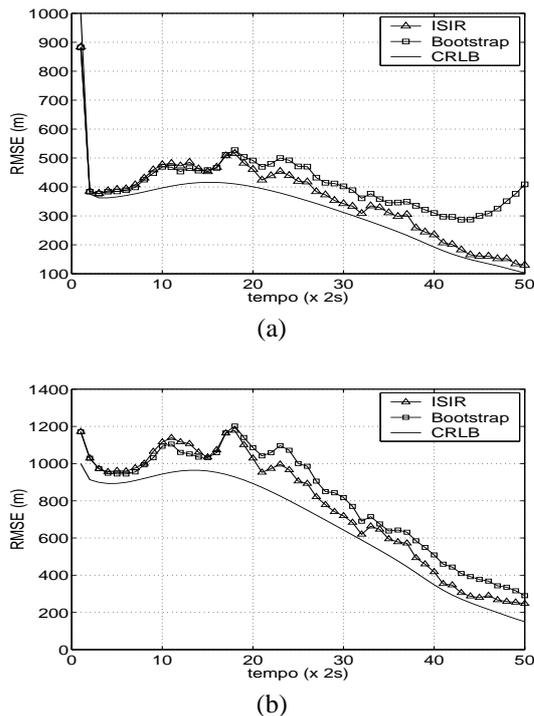


Fig. 2. Erro RMS da estimativa da posição $\sigma_r = 150\text{ m}$, $\sigma_{\beta_0} = 2500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ e $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 50\text{ m/s}$; (a) coordenada x , (b) coordenada y .

a partir de 100 realizações Monte Carlo. As curvas na Figura 2 quando comparadas à Figura 1 mostram que, com o aumento do ruído das medidas e o aumento da incerteza sobre a velocidade inicial do alvo, houve uma pequena deterioração na qualidade das estimativas de posição geradas pelo filtro ISIR. Ainda assim, o filtro ISIR convergiu em todas as 100 realizações Monte Carlo e foi capaz de acompanhar o limite de Cramér-Rao. Em contraste, o filtro “bootstrap” convencional operando com o mesmo número de partículas divergiu quando o alvo entrou nas camadas mais densas da atmosfera (por volta do passo de tempo 40) e foi assim incapaz de rastrear o alvo na fase final do trajetória balística. As simulações sugerem então que o aumento na complexidade algorítmica do filtro ISIR quando comparado ao filtro “bootstrap” é parcialmente compensado pela possibilidade de se rastrear o alvo com um número de partículas potencialmente mais baixo do que o número que seria necessário caso o filtro “bootstrap” fosse utilizado.

V. CONCLUSÕES

Introduziu-se nesse artigo um novo filtro de partículas aperfeiçoado para rastreamento automático de alvos balísticos supersônicos no estágio de reentrada na atmosfera. Em contraste com trabalhos anteriores [1], [4], assume-se um modelo não-linear de observações em coordenadas polares e um modelo também não-linear de movimento do alvo com coeficiente balístico desconhecido (aleatório) e variável. O filtro proposto usa uma função de importância otimizada e reamostragem de acordo com os pesos de importância para minimizar a degeneração de partículas, e incorpora ainda

um passo adicional de movimento Metropolis-Hastings para restaurar a diversidade da população de partículas após o passo de reamostragem. Apesar do uso de um número de partículas significativamente menor do que previamente sugerido na literatura, o filtro proposto apresenta desempenho próximo ao limite inferior de Cramér-Rao para o erro quadrático médio de estimação. Nas mesmas condições de simulação, um filtro “bootstrap” padrão operando com o mesmo número de partículas foi incapaz de rastrear o alvo nos estágios finais do vôo balístico.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Farina, B. Ristic, D. Benvenuti, “Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, n. 3, pp.854-867, julho de 2002.
- [2] A. Doucet, J. F. G. Freitas, e N. J. Gordon, “An introduction to sequential Monte Carlo methods,” *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, J. F. G. Freitas, e N. J. Gordon, Editores. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [3] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, n. 2, pp.174-188, fevereiro de 2002.
- [4] A. Pavlov e M. G. S. Bruno, “Filtros de Partículas Otimizados para Rastreamento de Alvos Balísticos,” *Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, Brasil, setembro de 2003.
- [5] P. Minvielle, “Tracking a ballistic re-entry vehicle with a sequential-Monte Carlo filter,” *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference 2002*, vol.4, pp. 4-1773 a 4-1787, março de 2002.
- [6] A. Doucet, “On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering,” *Technical Report CUED/F-INFENG/TR 310*, Department of Engineering, University of Cambridge, UK, 1998.
- [7] W. R. Gilks e C. Berzuini, “Following a moving target - Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models,” *J. R. Statist. Soc. B*, vol.63, pp. 127-146, 2001.
- [8] C. P. Robert e G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- [9] N. J. Gordon, D. J. Salmond, e A. F. M. Smith, “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation,” *IEE Proceedings-F*, vol.140, n.2, pp. 107-113, 1993.
- [10] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and C. Ewing, “Bayesian state estimation for tracking and guidance using the bootstrap filter,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol.18, n.6, pp. 1434-1443, 1995.
- [11] P. Tichavský, C. H. Muravchik, and A. Nehorai, “Posterior Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Filtering,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.46, n.5, maio de 1998.
- [12] J. Geweke, “Bayesian inference in econometric models using Monte Carlo integration,” *Econometrica*, n.24, pp.1317-1399, 1989.
- [13] J. S. Liu, R. Chen, and T. Logvinenko, “A theoretical framework for sequential importance sampling with resampling,” capítulo 11 em *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag, 2001.
- [14] M. G. S. Bruno e A. Pavlov, “Improved Particle Filters for Ballistic Target Tracking,” *Proceedings IEEE ICASSP 2004*, vol.II, pp. 705-708, maio de 2004.
- [15] N. Bergman, “Posterior Cramér-Rao Bounds for Sequential Estimation,” capítulo 15 em *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag, 2001.