Sistemas Sujeitos a Incertezas e Revisão sobre Teoria de Sistemas

GABRIELA W GABRIEL

IEE-S / ITA – Sala 195 – Ramal 5991

ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br

São José dos Campos, 2 de Setembro de 2021

Conteúdo

Sistema de Controle Sujeitos a Entradas Estocásticas

- Vamos considerar o sistema

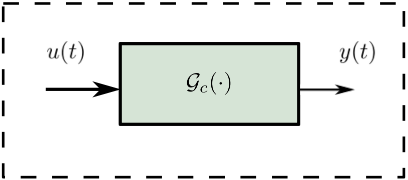


Figura: Modelo entrada-saída de um sistema.

$$y(t) = \mathcal{G}_c(u(t))$$

- Como sistemas de controle respondem a entradas estocásticas?
  - ☐ Caracterizar o sistema $\mathcal{G}_c$
  - ☐ caracterizar a entrada $u(t)$

Sistemas Determinístico e Estocásticos

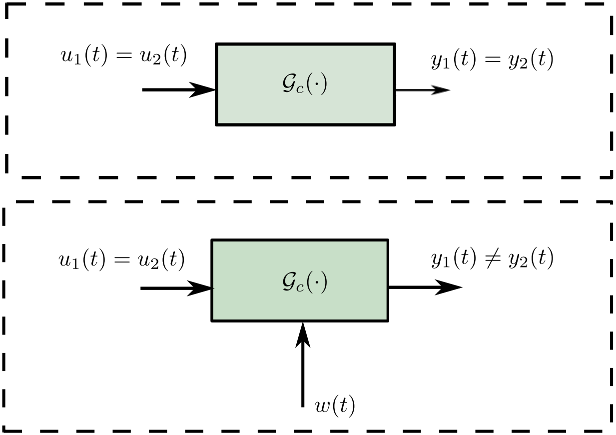


Figura: Sistemas Estocásticos e Sistemas Determinísticos

Sistema de Controle Sujeitos a Entradas Estocásticas

- Neste curso, vamos interpretar as diferenças na saída da planta pela existência de **ruído estocástico aditivo**.

- Três cenários distintos são possíveis:
  1. Ruído de processo
  2. Ruído de medida
  3. Ruído de processo e medida

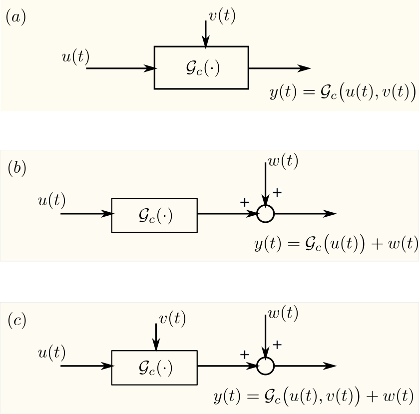


Figura: Sistema $\mathcal{G}_c$ com entrada $u(t)$ e (a) ruído na equação (processo), (b) ruído aditivo de medida (saída) e (c) ruído na equação (processo) e ruído aditivo na medida (saída).

RESPOSTA DE SISTEMAS SUJEITOS A ENTRADA ESTOCÁSTICA

- Por simplicidade, vamos considerar o sistema anterior em que
  - ☐ $v(t)$ é a entrada estocástica com estatísticas μ_v e $R_v(\tau)$
  - ☐ $y(t)$ é a saída a ser caracterizada

Então

- Para um **SISTEMA LTI CONTÍNUO** temos

$$\mu_y = \mu_v G_c(0)$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_c(r_1) g_c(r_2) R_v(\tau + r_1 - r_2) dr_1 \, dr_2$$

Resposta de Sistemas Sujeitos a Entrada Estocástica

- Como resultado, para um sistema LTI

SE $v(t)$ É WSS, ENTÃO $y(t)$ SERÁ WSS!

- Analogamente, para um **SISTEMA LTI DISCRETO** temos

$$\mu_y = \mu_v G(e^{j0})$$

$$R_y[k] = \sum_{\kappa_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa_2=-\infty}^{\infty} g[\kappa_1] g[\kappa_2] R_v[k + \kappa_1 - \kappa_2]$$

Relação com a Densidade Espectral

TEOREMA

Se $y(t)$ é descrita por uma relação linear de $v(t)$, então a densidade espectral de $y(t)$ é tal que

$$S_y(\omega) = |G_c(\omega)|^2 \, S_v(\omega)$$

- Para um sistema LTI discreto, teremos o análogo discreto para o cálculo de S_y

- Decorre que podemos gerar um ruído colorido $w(t)$ a partir de uma transformação linear, $h(t)$, aplicada a uma sequencia de v.a. i.i.d. com média nula e variância unitária, $\mathrm{e}(t)$, para o caso geral

$$S_w(\omega) = \sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2$$

Conceitos Iniciais

- **SISTEMA** é o conjunto físico (ou não) que desejamos modelar.
  - Sistemas **estáticos** são representados por **equações algébricas**
  - Sistemas **dinâmicos** são representados por **equações diferenciais**

- Modelos são **representações matemáticas** e, portanto, **aproximações** do sistema real.
  - Os sinais de **entrada** podem ser **manipuláveis** ou não, **medidas** ou não.
  - Os sinais de **saída** podem ser **medidos** ou não.

Modelo Entrada-Saída

- Para o sistema

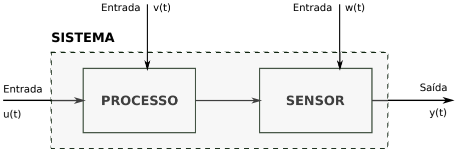


Figura: Elementos de um sistema dinâmico.

- ☐ $y(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ é a **saída medida** (**observável**) do sistema
- ☐ $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é a **entrada (exógena) de controle** (entrada manipulável)
- ☐ $v(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_v}$ e $w(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_w}$ são **entradas exógenas não manipuláveis** (ruídos)

$v(\cdot)$ e $w(\cdot)$ serão entradas não mensuráveis chamados, respectivamente, de **ruído de processo** e de **ruído de medida**.

Características

- Simplificadamente, escrevemos $y(t) = \mathcal{G}_c(u(t))$

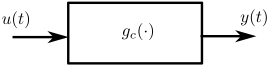


Figura: Modelo entrada $\times$ saída de um sistema dinâmico.

DEFINIÇÃO IV.1

Um sistema é ***LINEAR*** *se, e somente se, ele satisfaz a propriedades de superposição (ou adição) e de escalabilidade.*

$$\mathcal{G}_c(a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)) = a_1 \mathcal{G}_c(u_1(t)) + a_2 \mathcal{G}_c(u_2(t))$$

para quaisquer coeficientes a_1 e a_2 e quaisquer processos $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Características

DEFINIÇÃO IV.2

Um sistema é ***INVARIANTE NO TEMPO*** *se a sua resposta em $u(t+\tau)$ corresponde a saída $y(t+\tau)$, ou seja, uma translação no tempo de τ na entrada do sistema $u(t)$ corresponde a uma translação de τ unidades de tempo na saída $y(t)$.*

DEFINIÇÃO IV.3

Um sistema é ***CAUSAL*** *se sua resposta no tempo t depende somente dos instantes de tempo até t. Neste caso, o sistema é dito* **não-antecipativo***.*

- Sistemas LTI são causais se, e somente

$$g_c(t) = 0, \ \forall t < 0$$

Características

- Neste curso, consideraremos sistemas **lineares**, **invariantes no tempo**, **reais** e **causais**
- Em sistemas **LTI** (Lineares e Invariantes no Tempo) a resposta é

$$y(t) = g_c(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

sendo $g_c(t) = \mathcal{G}_c(\delta(t))$ sua resposta ao impulso.

Nestes sistemas, as **ESTATÍSTICAS DA SAÍDA** podem ser completamente determinadas pelo conhecimento das **ESTATÍSTICAS DA ENTRADA**.

Representação em Espaço de Estados

- Sistemas LTI podem ser representados no espaço de estados por

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \mathcal{A}_c x(t) + \mathcal{B}_c u(t) + \mathcal{J}_c v(t) \\
y(t) &= \mathcal{C}_c x(t) + \mathcal{D}_c u(t) + w(t)
\end{aligned}
$$

onde $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é o estado
$u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do sistema
$v(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_v}$ é a entrada de ruído na planta
$y(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida
$w(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ é o ruído de medida

- Neste caso temos um sistema a **TEMPO CONTÍNUO**, com $t \in \mathcal{T} = \mathbb{R}_+$

Representação em Espaço de Estados

- Analogamente,

$$
\begin{aligned}
x[k+1] &= \mathcal{A}x[k] + \mathcal{B}u[k] + \mathcal{J}v[k] \\
y[k] &= \mathcal{C}x[k] + \mathcal{D}u[k] + w[k]
\end{aligned}
$$

onde $x[\cdot] \in \mathbb{R}^n$ é o estado
$u[\cdot] \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do sistema
$v[\cdot] \in \mathbb{R}^{n_v}$ é a entrada de ruído na planta
$y[\cdot] \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida
$w[\cdot] \in \mathbb{R}^p$ é o ruído de medida

- Neste caso temos um sistema a **TEMPO DISCRETO**, com $k \in \mathcal{T} = \mathbb{N}$

Linearização de Sistemas

- De uma forma geral, representação um sistema não linear contínuo, $t \in \mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, no espaço de estados como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t), v(t)\right), \quad x(t_0) = x(0) = x_0 \\ y(t) &= h\left(x(t), u(t), w(t)\right) \end{aligned}$$

onde chamaremos $p(t) = (x(t), u(t), v(t), w(t))$ o conjunto dos sinais x, u, v e w, calculados todos em t.

DEFINIÇÃO IV.4

O ponto $p_e = (x_e, u_e, 0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_w}$ do espaço de estados é um ***PONTO DE EQUILÍBRIO*** *se $p(0) = p_e$ implicar em que $p(t) = p_e$ para todo $t \geq 0$.*

- Pontos de equilíbrio podem ser **estáveis**, **indiferentes** ou **instáveis**

Linearização de Sistemas

- Diferentemente dos sistemas lineares, sistemas não lineares podem ter mais de um **ponto de equilíbrio** $p_e = (x_e, u_e, 0, 0)$, calculados como

$$f(p_e) = 0$$

- Expandindo $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $h(\cdot,\cdot,\cdot)$ em série de Taylor em torno de p_e

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p=p_e} x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p=p_e} u(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{p=p_e} v(t) \\
y(t) &= \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{p=p_e} x(t) + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{p=p_e} u(t) + \left.\frac{\partial h}{\partial w}\right|_{p=p_e} w(t)
\end{aligned}$$

- Para o caso vetorial, utilizamos a **matriz Jacobiana**

Resposta Temporal de Sistemas Contínuos

- Para $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}_c x(t) + \mathcal{B}_c u(t) + \mathcal{J}_c v(t) \\ y(t) &= \mathcal{C}_c x(t) + \mathcal{D}_c u(t) + w(t) \end{aligned}$$

cuja resposta temporal é dada por

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t, t_0) x(t_0)}_{\text{Resposta a entrada nula}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) \left[\mathcal{B}_c u(\tau) + \mathcal{J}_c v(\tau) \right] d\tau}_{\text{Resposta a condições inicias nulas}}$$

- $\Phi(t, t_0) = \{\phi_{ij}\}$ é a **matriz de transição de estados** definida como

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathcal{A}_c \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

Resposta Temporal de Sistemas Contínuos

- Em um sistema LTI,

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathcal{A}_c(t-t_0)}$$

sendo $e^{\mathcal{A}_c t} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{(sI - \mathcal{A}_c)^{-1}\right\}$.

Propriedades da Matriz de transição $\Phi(t, t_0)$

- $\Phi(t, t) = I$
- $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0), \;\; \forall t_1 \in [t_0, t_2]$
- $\Phi(t, t) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, t) \Rightarrow \Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t)^{-1}$, dada a existência de $\Phi(t, t_0)^{-1}$

Resposta Temporal de Sistemas Discretos

- Analogamente, para $k \in \mathbb{T} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \mathcal{A}x[k] + \mathcal{B}u[k] + \mathcal{J}v[k] \\ y[k] &= \mathcal{C}x[k] + \mathcal{D}u[k] + w[k] \end{aligned}$$

cuja resposta temporal é dada por

$$x[k] = \underbrace{\mathcal{A}^k x[0]}_{\text{Resposta a entrada nula}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-i-1} \left[\mathcal{B}u[i] + \mathcal{J}v[i]\right]}_{\text{Resposta a condições inicias nulas}}$$

- Note que as medidas em um sistema físico são realizadas de forma discreta, ou seja, de forma **finita** e **contável**

Discretização de Sistemas

- A partir da solução do sistema contínuo

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\left[\mathcal{B}_c u(\tau) + \mathcal{J}_c v(\tau)\right] d\tau$$

- Tomando intervalos de tempo contantes $T > 0$, tal que os instantes de amostragem $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definem

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) = e^{\mathcal{A}_c(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathcal{A}_c(t_{k+1}-\tau)}\mathcal{B}_c u(\tau)d\tau \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathcal{A}_c(t_{k+1}-\tau)}\mathcal{J}_c v(\tau)d\tau \end{aligned}$$

em que $u(\tau) = u(t_k)$, $\forall\tau \in [t_k, t_{k+1})$

Estabilidade de Sistemas

- Para o caso discreto de interesse

$$x[k+1] = \mathcal{A}x[k], \qquad x[0] = x_0$$
$$y[k] = \mathcal{C}x[k]$$

DEFINIÇÃO IV.5

O sistema será **ESTÁVEL** *a partir do instante de tempo $k \geq k_0$, se para cada valor $\epsilon > 0$ pequeno, existir um valor $\delta > 0$ tal que $\|x[k_0]\|_2 < \epsilon$ implicar em $\|x[k_1]\|_2 < \delta$, para todo $k_1 \geq k_0$.*

- Esta definição corresponde a

Todos os autovalores de $\mathcal{A}$ devem estas localizados dentro do círculo de raio unitário centrado em $0 + 0j$, do plano complexo!

ESTABILIDADE DE SISTEMAS

- Dizemos ainda que

DEFINIÇÃO IV.6

O sistema discreto LTI será **ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL** *se o estado* x*, a partir do instante de tempo* $k \geq k_0$ *for* **estável** *e, além disso, existir um* $\eta > 0$ *tal que* $\|x[k_0]\|_2 < \eta$ *implicar em* $\lim_{k\to\infty} \|x[k]\|_2 = 0$.

- Estas definições são aplicáveis a sistemas com **ENTRADA NULA**, para entradas não nulas recorremos ao conceito da BIBO estabilidade.

Estabilidade de Sistemas

- Adicionando o sinal de entrada $u[\cdot]$ ao sistema discreto, teremos

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \mathcal{A}x[k] + \mathcal{B}u[k], \qquad x[0] = x_0 \\ y[k] &= \mathcal{C}x[k] + \mathcal{D}u[k] \end{aligned}$$

e definimos

DEFINIÇÃO IV.7

O sistema acima será **BIBO ESTÁVEL** *se existir uma constante finita η tal que, pata todo instante j e toda entrada $u[k]$, a resposta correspondente do sistema $y[k]$, para $x[j] = 0$, satisfizer*

$$\sup_{k \geq j} \|y[k]\|_2 \leq \eta \sup_{k \geq j} \|u[k]\|_2$$

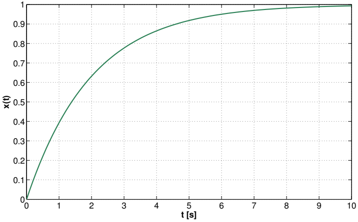
- BIBO (*BOUNDED INPUT BOUNDED OUTPUT*)

Características das Respostas Temporais

- Seja um sistema contínuo de PRIMEIRA ordem do tipo

$$\dot{x}(t) + (1/2)x(t) = u(t),\ x(0) = 0,\ \tau > 0$$

sua resposta temporal ao degrau unitário $u(t) = 1$ será do tipo



☐ Constante de Tempo

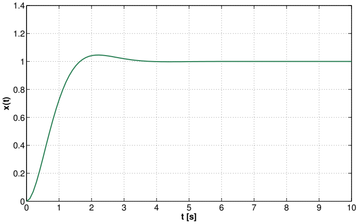
Figura: Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem.

Características das Respostas Temporais

- Seja um sistema contínuo de SEGUNDA ordem do tipo

$$\ddot{x}(t) + 2.8\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t),\ \dot{x}(0) = x(0) = 0$$

sua resposta temporal ao degrau unitário $u(t) = 1$ será do tipo



- ☐ Erro em regime
- ☐ Tempo de estabilização para ε%
- ☐ Overshoot máximo
- ☐ Tempo de subida
- ☐ Tempo de pico

Figura: Resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem.

Controlabilidade / Alcançabilidade

DEFINIÇÃO IV.8

O sistema discreto LTI é **CONTROLÁVEL** *se, dado qualquer condição inicial $x[k_a]$, existe um sinal de entrada $u[k]$, para $k_a \leq k \leq k_b$, tal que $x[k_b] = 0$, para algum k_b.*

DEFINIÇÃO IV.9

O sistema discreto é **ALCANÇÁVEL** *se para quaisquer dois estados x_a e x_b existir um sinal de entrada $u[k]$ para $k_a \leq k \leq k_b$ que levará o sistema de $x[k_a] = x_a$ até $x[k_b] = x_b$.*

- Alcançabilidade implica em controlabilidade. O inverso só será verdadeiro se a matriz A for inversível

Controlabilidade / Alcançabilidade

- Na prática, determinamos se um sistema LTI é alcançável através da matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{A}\mathcal{B} & \cdots & \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B} \end{bmatrix}$$

LEMA IV.1

O sistema LTI discreto é **ALCANÇÁVEL** *se, e somente se,*

$$rank(\mathcal{C}_n) = n$$

Observabilidade

DEFINIÇÃO IV.10

O sistema LTI discreto é **OBSERVÁVEL** *se qualquer condição inicial $x[k_o]$ puder ser unicamente determinada pela sua resposta a entrada nula correspondente $y[k]$ em $k_a \leq k \leq k_b$, com k_b finito.*

- Analogamente, a observabilidade pode ser determinada a partir da matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_n = \left[\mathcal{C}' \quad \mathcal{A}'\mathcal{C}' \quad \cdots \quad \left(\mathcal{A}'^{n-1}\right)'\mathcal{C}'\right]'$$

LEMA IV.2

O sistema LTI discreto é **OBSERVÁVEL** *se, e somente se,*

$$rank\left(\mathcal{O}_n\right) = n$$

Modelo Entrada-Saída

- Outra possível representação matemática de um sistema LTI é através do seu modelo **entrada-saída** que relaciona diretamente a entrada do sistema a sua saída correspondente.

- Para isso, vamos introduzir o **OPERADOR DE ATRASO** q^{-1}, sendo $x[k+t] = q^t x[k]$. Portanto, se existir $(qI - \mathcal{A})^{-1}$,

$$x[k] = (qI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} u[k]$$

e,

$$y[k] = \left(\mathcal{C}(qI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}\right) u[k] = H(q)u[k]$$

Modelo Entrada-Saída

- $H(q)$ é chamada **Função de Transferência**, racional em q

$$H(q) = \frac{\mathcal{C}\ \mathrm{adj}(qI - \mathcal{A})\ \mathcal{B} + \mathcal{D}\ \det(qI - \mathcal{A})}{\det(qI - \mathcal{A})} = \frac{B(q)}{A(q)}$$

- Em sistemas MIMO, caso geral, teremos cada elemento da matriz $H(q) = \{H_{ij}(q)\}$ determinado por

$$H_{ij}(q) = \frac{B_{ij}(q)}{A(q)}$$

- As raízes de $B_{ij}(q)$ são chamadas de **zeros** de $H(q)$

- As raízes de $A(q)$ são chamados **polos** de $H(q)$

Modelo Entrada-Saída

- A **relação entrada-saída** será

$$y_i[k] = \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{ij}(q)}{A(q)} u_j[k]$$

em que, para $n_a \geq n_b$,

$$A(q) = q^{n_a} + a_{(n_a-1)} q^{n_a-1} + \cdots + a_1 q + a_0$$
$$B_{ij}(q) = b_{ijn_b} q^{n_b} + b_{ij(n_b-1)} q^{n_b-1} + \cdots + b_{ij1} q + b_{ij0}$$

e que representam o conjunto de $i \times j$ **equações a diferenças**

$$y_i[k+n_a] + \sum_{\ell=0}^{n_a-1} a_\ell y_i[k+\ell] = \sum_{\ell=0}^{n_b} b_{ij\ell} u_j[k+\ell]$$