Modelos Paramétricos

GABRIELA W GABRIEL

IEE-S / ITA – Sala 195 – Ramal 5991

ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br

São José dos Campos, 2 de Setembro de 2021

Conteúdo

Caracterização do Ruído Estocástico

- Para estudo do modelo, vamos considerar ruído aditivo, sendo

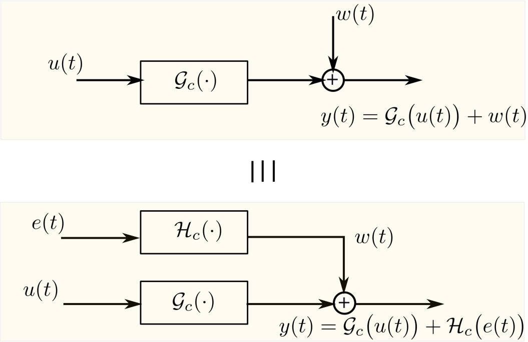


Figura: Sistema com entrada $u(t)$ e ruído aditivo de medida $w(t)$.

Caracterização do Ruído Estocástico

- Sendo $w[k]$ desconhecido a priori, como caracterizá-lo?

⇓

Determinando **TODAS** as suas p.d.f conjuntas?

Caracterização do Ruído Estocástico

- Sendo $w[k]$ desconhecido a priori, como caracterizá-lo?

⇓

Determinando **TODAS** as suas p.d.f conjuntas?

PROIBITIVO

Caracterização do Ruído Estocástico

- Sendo $w[k]$ desconhecido a priori, como caracterizá-lo?

⬇

Determinando **TODAS** as suas p.d.f conjuntas?

⬇

$w[k]$ é um ruído GAUSSIANO : características de 1a e 2a ordens são suficientes!

PROIBITIVO

Caracterização do Ruído Estocástico

- $w[k]$ pode ser construído a partir de um ruído branco

$$w[k] = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)\mathrm{e}[k-j]$$

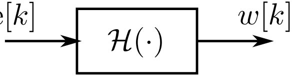


Figura: Modelo entrada-saída do ruído

- $\{\mathrm{e}[k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de ruídos brancos i.i.d, com $\mathrm{e}[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Caracterização do Ruído Estocástico

- Relembrando, $q^{-j}w[k] = w[k-j]$. Assim,

$$w[k] = H(q)\mathrm{e}[k] \; ; \quad H(q) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)q^{-j}$$

- Média e covariância de $w[k]$

$$\mathcal{E}\left(w[k]\right) = 0 \quad \mathcal{E}\left(w[k]w[k-\tau]\right) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} h(j)h(j-\tau)$$

$w[k]$ é **WSS!**

Caracterização do Sistema

- Para o sistema completo, teremos

$$y[k] = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u[k-j] + w[k] = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)q^{-j}u[k] + w[k] = G(q)u[k] + H(q)e[k]$$

- Para o caso de um sistema originalmente contínuo, podemos escrever

$$G(q) \approx G_c\left(\frac{q-1}{T}\right), \quad \text{Aproximação de Euler}$$

ou,

$$G(q) \approx G_c\left(\frac{2}{T}\frac{q-1}{q+1}\right), \quad \text{Aproximação de Tustin}$$

Modelos de Sistemas LTI

- Sistemas LTI podem ser caracterizados por

  1. Resposta ao Impulso do Sistema: $\{g[k]\}_{k=0}^{\infty}$
  2. Densidade espectral do ruído: $S_w(\omega) = \sigma^2 \left| H(e^{j\omega}) \right|^2$
  3. p.d.f. de $\mathrm{e}[k]$, alternativamente por $\mathcal{E}(\mathrm{e}[k])$ e $\mathcal{E}(\mathrm{e}[k]^2)$

- Mesmo conhecendo $\mathrm{e}[k]$, precisamos <u>DETERMINAR</u> $\{g(q)\}$ e $\{h(q)\}$

$$\boxed{\{g(q)\} \text{ e } \{h(q)\} \text{ são } \textbf{SEQUÊNCIAS INFINITAS} \text{ em } q}$$

Modelos de Sistemas LTI

- Sistemas LTI podem ser caracterizados por

  1. Resposta ao Impulso do Sistema: $\{g[k]\}_{k=0}^{\infty}$
  2. Densidade espectral do ruído: $S_w(\omega) = \sigma^2 \left| H(e^{j\omega}) \right|^2$
  3. p.d.f. de $\mathrm{e}[k]$, alternativamente por $\mathcal{E}(\mathrm{e}[k])$ e $\mathcal{E}(\mathrm{e}[k]^2)$

- Mesmo conhecendo $\mathrm{e}[k]$, precisamos DETERMINAR $\{g(q)\}$ e $\{h(q)\}$

IMPRATICÁVEL

$\{g(q)\}$ e $\{h(q)\}$ são **SEQUÊNCIAS INFINITAS** em q

Séries de Potências **Truncadas**

Modelos de Sistemas LTI

- A **Identificação de Sistemas** paramétrica corresponde a encontrarmos um modelo do tipo

$$y[k] = G(q)u[k] + H(q)\mathrm{e}[k]$$

em que as funções de transferência possuem coeficientes, em quantidade finita, a serem determinados.

Modelos de Sistemas LTI

- A **Identificação de Sistemas** paramétrica corresponde a encontrarmos um modelo do tipo

$$y[k] = G(q)u[k] + H(q)\mathrm{e}[k]$$

em que as funções de transferência possuem coeficientes, em quantidade finita, a serem determinados.

$\Downarrow$

PARÂMETROS : θ (vetor)

portanto,

$$y[k] = G(\theta, q)u[k] + H(\theta, q)\mathrm{e}[k]$$

(Família ou Conjunto de Modelos)

Modelos Black-Box

- Há **diferentes famílias de modelos** determinados pelas funções de transferência G e H
- G e H serão **funções racionais** em θ e q
- G e H serão deteminadas a partir das **medidas dos sinais de ENTRADA e SAÍDA** realizadas no sistema
- **Notação:**
  - ⋆ Parâmetro θ obtido a partir dos coeficientes dos polinômios envolvidos nos modelos

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} & \cdots \end{bmatrix}'$$

para polinômios do tipo

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{na} q^{-na} \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{nb} q^{-nb} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Modelo ARX

$$\begin{aligned} y[k] + a_1 y[k-1] + \cdots + a_{na} y[k-na] \\ = b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2] + \cdots + b_{nb} u[k-nb] + \mathrm{e}[k] \end{aligned}$$

(Modelo com Erro na Equação)

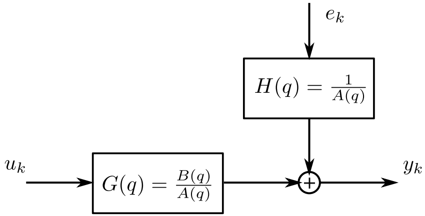
1. Parâmetro $\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} \end{bmatrix}'$
2. Polinômio $A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{na} q^{-na}$
3. Polinômio $B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}$

- Podemos escrever

$$\begin{aligned} G(q, \theta) &= \frac{B(q)}{A(q)} \\ H(q, \theta) &= \frac{1}{A(q)} \end{aligned}$$

Modelo ARX

- O diagrama de blocos correspondente é



que corresponde a

$$A(q)y[k] = B(q)u[k] + e[k]$$

(Família de modelos Autoregressivo com Entrada Exógena (ARX))

Modelo ARX

- Modelo ARX

  1. Autoregressivo pois $y[k]$ **depende de seus valores anteriores**
  2. Com Entrada Exógena pois **depende de** $u[k]$
  3. Ruído passa pela dinâmica do próprio sistema $(1/A(q))$ **(?)**

- Caso particular: $na = 0 \Longrightarrow A(q) = 1$, então

$$y[k] = B(q)u[k] + \mathrm{e}[k]$$

(Família de modelos Resposta ao Impulso Finita (FIR))

Modelo ARX – ESTIMADOR

- Podemos escrever

$$y[k] = B(q)u[k] + [1 - A(q)]y[k] + \mathrm{e}[k]$$

Se o erro $\mathrm{e}[k]$ é o erro de estimação, então

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q)u[k] + [1 - A(q)]y[k]$$

(Estimador ou preditor ARX para $y[k]$)

Modelo ARX – REGRESSÃO LINEAR

- Para o **vetor de regressores**
  $\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y[k-1] & \cdots & -y[k-na] & u[k-1] & \cdots & u[k-nb] \end{bmatrix}'$
  e para o **vetor de parâmetros**
  $\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} \end{bmatrix}'$

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta' \varphi(k) = \varphi(k)' \theta$$

(Regressão linear)

- Caso alguns parâmetros sejam conhecidos, podemos separá-los gerando

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta' \varphi(k) + \mu(k)$$

Modelo ARMAX

- Adicionamos flexibilidade ao modelo, adicionando uma **Média Móvel** ao ruído branco

$$
\begin{aligned}
& y[k] + a_1 y[k-1] + \cdots + a_{na} y[k-na] \\
& \quad = b_1 u[k-1] + \cdots + b_{nb} u[k-nb] + \mathrm{e}[k] + c_1 \mathrm{e}[k-1] + \cdots + c_{nc} \mathrm{e}[k-nc]
\end{aligned}
$$

(Modelo com Erro na Equação)

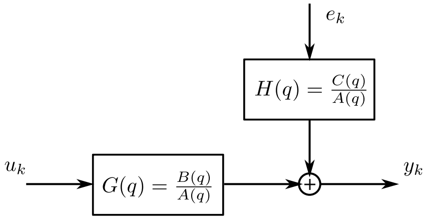
que gera, para $C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nc} q^{-nc}$,

$$A(q)y[k] = B(q)u[k] + C(q)\mathrm{e}[k]$$

(Família de modelos Autoregressivo com Média Móvel e Entrada Exógena (ARMAX))

Modelo ARMAX

- O diagrama neste caso, torna-se



com vetor de parâmetros correspondente

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{na} & b_1 & \cdots & b_{nb} & c_1 & \cdots & c_{nc} \end{bmatrix}'$$

Modelo ARMAX - ESTIMADOR

- Separando o ruído branco

$$\frac{A(q)}{C(q)}y[k] = \frac{B(q)}{C(q)}u[k] + e[k]$$

que leva ao estimador da forma

$$\hat{y}(k|\theta) + [C(q) - 1]\,\hat{y}(k|\theta) = B(q)u[k] + [C(q) - A(q)]\,y[k]$$

Portanto,

$$C(q)\hat{y}(k|\theta) = B(q)u[k] + [C(q) - A(q)]\,y[k]$$

(Estimador ou Preditor do modelo ARMAX)

Modelo ARMAX – Regressão Pseudolinear

- Podemos escrever a equação anterior como

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q)u[k] + [1 - A(q)]\, y[k] + [C(q) - 1]\, \varepsilon(k, \theta)$$

com $\varepsilon(k, \theta) = y[k] - \hat{y}(k|\theta)$.

- Observe que para o **vetor de regressores**

$$\varphi(k) = \Big[-y[k-1] \quad \cdots \quad -y[k-na] \quad u[k-1] \quad \cdots \\ u[k-nb] \quad \varepsilon(k-1, \theta) \quad \cdots \quad \varepsilon(k-nc, \theta) \Big]' = \varphi(k, \theta)$$

teremos

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta' \varphi(k, \theta) = \varphi(k, \theta)' \theta$$

(Regressão pseudolinear)

Outros Modelos Tipo Erro na Equação

- Para uma maior flexibilidade do modelo, poderíamos adicionar outras funções de transferência ao ruído!

1. Adição de um modelo AR

$$A(q)y[k] = B(q)u[k] + \frac{1}{D(q)}e[k]$$

(Família de modelos ARARX)

2. Adição de um modelo ARMA

$$A(q)y[k] = B(q)u[k] + \frac{C(q)}{D(q)}e[k]$$

(Família de modelos ARARMAX)

Outros Modelos Tipo Erro na Equação

- A família **ARARMAX** é o **caso geral** dentre os anteriores

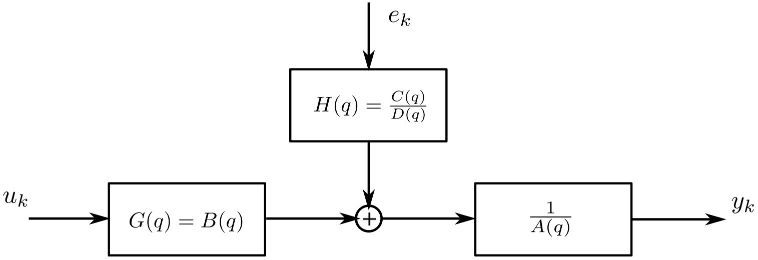


Figura: Diagrama de blocos da família de modelos ARARMAX

Observe que <u>todos</u> são filtrados por $\frac{1}{A(q)}$.

Modelo Erro na Saída

- Para tentar tirar a dependência de $A(q)$, vamos definir $z[k]$, uma saída livre de ruído definida como

$$z(k) + f_1 z(k-1) + \cdots f_{nf} z(k-nf) = b_1 u[k-1] + \cdots + b_{nb} u[k-nb]$$

- Neste caso, no modelo ARX, chamando $F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{nf} q^{-nf}$

$$y[k] = z(k) + e[k] = \frac{B(q)}{F(q)} u[k] + e[k]$$

(Família de modelos Erro na Saída (OE))

Modelo Erro na Saída

- Sua estrutura de blocos é

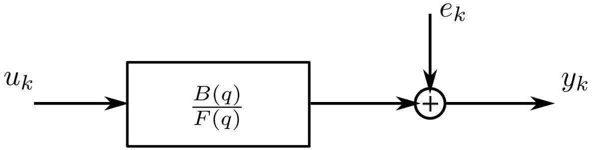


Figura: Diagrama de blocos da família de modelos OE

ESTRUTURA MAIS FÁCIL DE SER IDENTIFICADA, porém sem flexibilidade no sinal de erro!

Modelo Erro na Equação – ESTIMADOR

- O sinal $z[k]$ não pode ser fisicamente observado. Assim, por construção $z(k) = z(k, \theta)$, e escrevemos

$$z(k, \theta) + f_1 z(k-1, \theta) + \cdots f_{nf} z(k - nf, \theta) = b_1 u[k-1] + \cdots + b_{nb} u[k - nb]$$

onde

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_{nb} & f_1 & \cdots & f_{nf} \end{bmatrix}'$$

- Um estimador para este sistema é

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{B(q)}{F(q)} u[k] = z(k, \theta)$$

(Estimador ou Preditor para o Modelo OE)

Modelo Erro na Equação – REGRESSÃO PSEUDOLINEAR

- Considerando

$$\varphi(k,\theta) = \begin{bmatrix} u[k-1] & \cdots & u[k-nb] & -z(k-1,\theta) & \cdots & -z(k-nf,\theta) \end{bmatrix}'$$

teremos

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi(k,\theta)'\theta = \theta'\varphi(k,\theta)$$

$z(k-j,\theta)$ **não pode ser observado, mas pode ser CALCULADO como** $z(k-j,\theta) = \hat{y}(k-j|\theta)$**!**

Modelo BOX-JENKINS

- A partir do modelo OE, adicionamos uma estrutura do tipo ARMA ao erro.

$$y[k] = \frac{B(q)}{F(q)}u[k] + \frac{C(q)}{D(q)}\mathrm{e}[k]$$

(Família de modelos Box-Jenkins (BJ))

- Seu diagrama de blocos é dado por

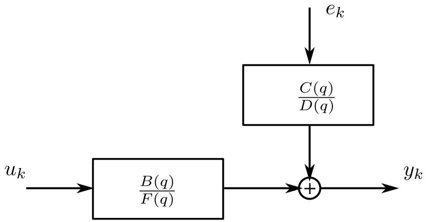


Figura: Diagrama de blocos do modelo BJ

Modelo BOX-JENKINS – ESTIMADOR

Sua estrutura apresenta funções $G(q)$ e $H(q)$ independentes!

- Seu preditor natural é

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u[k] + \frac{C(q) - D(q)}{C(q)}y[k]$$

(Estimador ou Preditor do modelo (BJ))

- Seu preditor implica no método de **regressão pseudolinear**, com parâmetros

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_{nb} & c_1 & \cdots & c_{nc} & d_1 & \cdots & d_{nd} & f_1 & \cdots & f_{nf} \end{bmatrix}'$$

Modelo Geral

- Outros modelos podem ser gerados a partir de escolhas particulares do polinômios $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$

- De uma forma geral

$$A(q)y[k] = \frac{B(q)}{F(q)}u[k] + \frac{C(q)}{D(q)}\mathrm{e}[k]$$

- Este modelo permite facilmente inserir ***DELAY*** no caminho ENTRADA-SAÍDA, sendo $\bar{u}[k - nk + 1] = u[k]$

$$A(q)y[k] = q^{-nk}\frac{B(q)}{F(q)}u[k] + \frac{C(q)}{D(q)}\mathrm{e}[k]$$

(Família Geral de Modelos)

Modelo Geral – ESTIMADOR

- Para o caso sem atraso na equação, o preditor é

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{B(q)D(q)}{C(q)F(q)} u[k] + \left[1 - \frac{D(q)A(q)}{C(q)}\right] y[k]$$

(Preditor ou Estimador para o Modelo Geral)

Modelo Geral – TABELA DE FAMÍLIAS

Tabela: Famílias de modelos derivadas da Estrutura Geral

Nome da Família		**Operadores Utilizados**
FIR	———	$B(q)$
ARX	———	$A(q),\ B(q)$
ARMAX	———	$A(q), B(q), C(q)$
ARMA	———	$A(q), C(q)$
ARARX	———	$A(q), B(q), D(q)$
ARARMAX	———	$A(q), B(q), C(q), D(q)$
OE	———	$B(q), F(q)$
BJ	———	$B(q), C(q), D(q), F(q)$

Modelo Geral – REGRESSÃO PSEUDOLINEAR

- Podemos reescrever o Preditor para o Modelo Geral como

$$\begin{aligned}\hat{y}(k|\theta) =& B(q)D(q)u[k] + [1 - C(q)F(q)]\,\hat{y}(k|\theta)\\ &+ F(q)\,[C(q) - A(q)D(q)]\,y[k]\end{aligned}$$

que nos permite escrever

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q)D(q)u[k] + [C(q)F(q) - 1]\,\varepsilon(k,\theta) + [1 - F(q)A(q)D(q)]\,y[k]$$

onde $\varepsilon(k,\theta) = y[k] - \hat{y}(k|\theta)$.

- De forma equivalente,

$$\varepsilon(k,\theta) = \frac{D(q)}{C(q)}\Bigg[\underbrace{A(q)y[k] - \overbrace{\frac{B(q)}{F(q)}u[k]}^{z(k,\theta)}}_{v(k,\theta)}\Bigg]$$

Modelo Geral – REGRESSÃO PSEUDOLINEAR

- Consequentemente, temos

$$\varepsilon(k,\theta) = y[k] - \hat{y}(k|\theta) = \frac{D(q)}{C(q)}v(k,\theta)$$
$$v(k,\theta) = A(q)y[k] - z(k,\theta)$$
$$z(k,\theta) = \frac{B(q)}{F(q)}u[k]$$

- Reescrevendo

$$z(k,\theta) = b_1u[k-1] + \cdots + b_{nb}u[k-nb] - f_1z(k-1,\theta) - \cdots - f_{nf}z(k-nf,\theta)$$

$$v(k,\theta) = y[k] + a_1y[k-1] + \cdots + a_{na}y[k-na] - z(k,\theta)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(k,\theta) = {} & v(k,\theta) + d_1v(k-1,\theta) + \cdots + d_{nd}v(k-nd,\theta) - c_1\varepsilon(k-1,\theta) \\ & - \cdots - c_{nc}\varepsilon(k-nc,\theta)\end{aligned}$$

Modelo Geral – REGRESSÃO PSEUDOLINEAR

- Assim,

$$y[k] - \hat{y}(k,\theta) = d_1 v(k-1,\theta) + \cdots + d_{nd} v(k-nd,\theta) - c_1 \varepsilon(k-1,\theta) - \cdots - c_{nc}\varepsilon(k-nc,\theta) + v(k,\theta)$$

$$v(k,\theta) = y[k] + a_1 y[k-1] + \cdots + a_{na} y[k-na] - z(k,\theta)$$

$$z(k,\theta) = b_1 u[k-1] + \cdots + b_{nb} u[k-nb] - f_1 z(k-1,\theta) - \cdots - f_{nf} z(k-nf,\theta)$$

- Reorganizando a expressão

$$\hat{y}(k,\theta) = \theta' \varphi(k,\theta) = \varphi(k,\theta)'\theta$$

em que

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{na} & b_1 & \cdots & b_{nb} & f_1 & \cdots & f_{nf} & c_1 & \cdots & c_{nc} & d_1 & \cdots & d_{nd} \end{bmatrix}'$$

$$\varphi = \Big[-y[k-1] \ \cdots \ y[k-na] \ \ u[k-1] \ \cdots \ u[k-nb] \ \ -z(k-1,\theta) \ \cdots \ -z(k-nf,\theta) \ \ \varepsilon(k-1,\theta) \ \cdots \ \varepsilon(k-nc,\theta) \ \ -v(k-1,\theta) \ \cdots \ -v(k-nd,\theta) \Big]'$$