IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Alguns Aspectos Práticos

GABRIELA W GABRIEL

IEE-S / ITA – Sala 195 – Ramal 5991

ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br

São José dos Campos, 2 de Junho de 2021

Conteúdo

Escolha dos Dados

- Envolve principalmente questões como:
  - Quais sinais entrada$\times$saída fornecem **RELAÇÕES RELEVANTES**?
  - Que tipo de sinal de entrada utilizar para termos **INFORMAÇÕES RELEVANTES**? **(onde excitar a planta?)**
  - Como **AMOSTRAR** os dados?

Relação Entrada×Saída

- Hipótese Necessárias

  1ª Deve haver **CORRELAÇÃO** entre **ENTRADA e SAÍDA**

  2ª **CAUSA** ($u[k]$) $\rightarrow$ **EFEITO** ($y[k]$)

- Sistemas de controle:
  - ENTRADA – Entrada de Controle
  - SAÍDA – Saída Controlada

RELAÇÃO ENTRADA×SAÍDA

- A **qualificação dos pares entrada** $\times$ **saída** é realizada através da

CORRELAÇÃO CRUZADA

- **RELAÇÃO TRIVIAL** – quanto não há componentes comuns entre os sinais de entrada e saída.

$\star$ <u>correlação cruzada</u> $\neq 0$ $\Longrightarrow$ Há qualificação;

$\star$ <u>correlação cruzada NULA</u> $\Longrightarrow$ Não há qualificação;

$\star$ <u>Duas ENTRADAS correlacionadas e ambas com a mesma saída</u> $\Longrightarrow$ Uma das entradas poderá ser descartada;

Relação Entrada×Saída

- Correlação cruzada

  - **NÃO TRIVIAL** – quando há componentes comuns entre os sinais que não fazem parte do sinal a ser identificado (componentes espúrias)

Sugestão de tratamento (Madsen, 2008):

1º Ajuste do modelo ARMA em um dos sinais:

$$A(q^{-1})u[k] = C(q^{-1})\nu_u[k]$$

onde $\nu_u[k]$ é a sequência de ruídos de estimação.

2º Gera-se a sequência de erros de predição um passo à frente:

$$\begin{aligned}\xi_y[k] =& y[k] + a_1 y[k-1] + \cdots + a_{na} y[k-na] - c_1 \xi_y[k-1] \\ & - \cdots - c_{nc}\xi_y[k-nc]\end{aligned}$$

3º Determina-se a correlação cruzada entre ν_u e ξ_y

Escolha do Sinal de Entrada

- **Aspecto numérico**
  - $u[k]$ constante $\longrightarrow$ Matriz de regressores MAL CONDICIONADA
  - $u[k]$ aleatório $\longrightarrow$ Matriz de regressores MELHOR CONDICIONADA
- **Aspecto dinâmico**
  - RUÍDO BRANCO $\longrightarrow$ DISTRIBUIÇÃO UNIFORME em FREQUÊNCIA
  - Excitação de MODOS DOMINANTES

Escolha do Sinal de Entrada

Características Dinâmicas ou Estáticas não excitadas

↓

Informação não presente nos dados coletados

↓

Modos não identificáveis!

- **Sistemas não lineares:** Se a não linearidade não for excitada, ela não aparecerá nos dados!

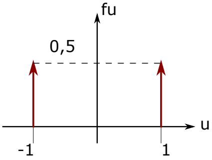
Escolha do Sinal de Entrada - ASPECTOS PRÁTICOS

- Quanto **MAIOR A FAIXA DE FREQUÊNCIA** analisada, **melhor a identificação** realizada.

- O **TIPO DE SINAL DE ENTRADA** dependerá do **tipo de identificação** a ser realizada: paramétrico ou não paramétrico, quais métodos dentre eles.

- Caracterização dos sinais através dos 1^o **e** 2^o **momentos**.

  Exemplo: $\mathcal{N}(0,1)$ *é diferente de*



Escolha do Sinal de Entrada

- Alguns sinais comumente utilizados são

  - **Sinal Degrau**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ u_0 & , \quad t \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{ Especificar } u_0$$

(Válido para sinais com elevado SNR - Relação Sinal Ruído)

  - **Soma de Senóides**

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \longrightarrow \text{ Especificar } a_i, \omega_i, \phi_i$$

(Escolha em sistemas não-lineares)

Escolha do Sinal de Entrada

- Alguns sinais comumente utilizados são

  - **Sinais Dinâmicos do Tipo ARMA, AR e MA**

$$C(q^{-1})u[k] = D(q^{-1})e[k] \longrightarrow \text{ Especificar coeficientes}$$

(Sinais Pseudoaleatórios que se aproximam do Ruído Branco)

  - **Sinais do Tipo PRBS**

Gerados através de portas lógicas e registradores

(Pseudoaleatórios simples de serem gerados)

Sinais PRBS

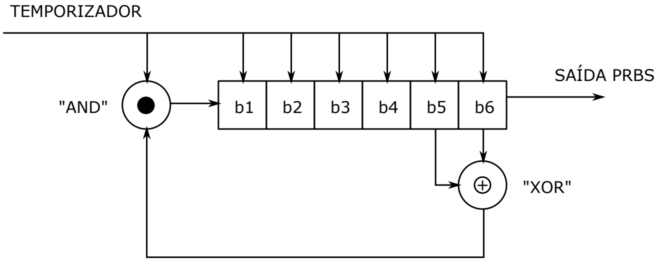
- **Sinais Binários Pseudo-Aleatórios (PRBS)**
  - Admitem somente **dois níveis de tensão** possíveis: $+V$ e $-V$
  - **Mudança de nível** ocorre a cada intervalo T_b
  - São sinais periódicos com **período** $N.T_b$, $N \leq 2^n - 1$ ímpar, n corresponde ao **número de bits**

$$\frac{N+1}{2}, \text{ períodos em } \nu_1$$
$$\frac{N-1}{2}, \text{ períodos em } \nu_0$$

onde $\nu_i \in \{+V, -V\}$ para $i = \{0, 1\}$.

Sinais PRBS

- Exemplo de um Sinais PRBS



- Número de bits: $n = 6$
- Tamanho da Sequência gerada: $N = 2^n - 1 = 63$
- Periodicidade: $63T_b$

Sinais PRBS

- **SEQUÊNCIA m ou de MÁXIMO COMPRIMENTO**: é o maior N para uma determinada quantidade de bits n

$$m = 2^n - 1$$

- Como observado, m depende da **combinação de bits escolhida**.

- Conexões para gerar sinais de sequência m

n	2	3	4	5	6	7	8	9
N	3	7	15	31	63	127	255	511
XOR	1 e 2	2 e 3	3 e 4	3 e 5	5 e 6	4 e 7	2,3,4 e 8	5 e 9

- Porque a MÁXIMA SEQUÊNCIA?

Sinal descorrelacionado $\equiv$ Semelhança ao Ruído Branco

$\Downarrow$

Sinal Persistentemente excitante

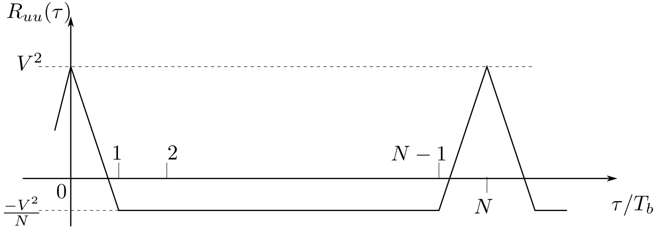
Sinais PRBS

- Para estes sinais é possível mostrar que

$$\mathcal{E}\{u[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u[j]$$

$$\mathcal{E}\left\{(u[k+\tau]-\bar{u})'(u[k]-\bar{u})\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(u[i+\tau]-\bar{u})(u[i]-\bar{u})'\right]$$

- Assim, é possível verificar que



Sinais PRBS

- A escolha do **PERÍODO** T_b considera as propriedades dinâmicas do sistema

$$\frac{\tau_{min}}{10} < T_b < \frac{\tau_{min}}{3}$$

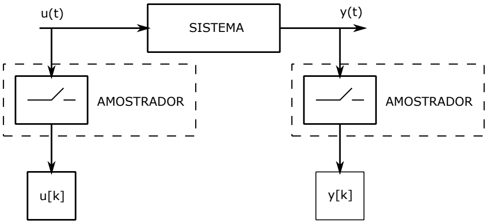
  (Para sistemas lineares)

- τ_{min} é a **menor constante de tempo** do sistema
- τ_{min} verificado na **resposta ao degrau** do sistema
- A escolha da **AMPLITUDE DO SINAL** deve considerar
  - **Máxima excursão** $\longrightarrow$ Evidencia as Não Linearidades

Amostragem do Sinal

- Sinais de entrada / saída são **medidos de forma discreta**

Na prática, **SISTEMAS AMOSTRADOS**



Amostragem do Sinal

- Aspectos práticos da escolha de T_s:
  - Deve existir uma **relação entre T_b e T_s**

$$3T_s \leq T_b \leq 5T_s$$

onde T_s é o tempo de amostragem.

  - T_s pequeno o suficiente para **reter informações do sistema**
  - T_s muito pequeno $\longrightarrow$ **matriz de regressores mal condicionada**
  - Seleção do Período de amostragem segundo o **Teorema de Shannon**:

$$f_s > 2f_{máx} \Longrightarrow T_s < \frac{\tau_{min}}{2}$$

Validação do Modelo

- Desejamos responder as questões:

O ESTIMADOR ENCONTRADO NOS SERVE?

O MODELO EXPLICA O COMPORTAMENTO DO SISTEMA?

- Para isso, **CONFRONTAMOS**

Modelo $\mathcal{M}(\hat{\theta})$ $\times$ **INFORMAÇÕES do SISTEMA REAL**

Validação do Modelo - ALGUNS MÉTODOS

a) Teste de acordo com o **propósito (uso)**

- Uso como **regulador** $\longrightarrow$ teste como **regulador**
- Uso como **preditor** $\longrightarrow$ teste como **preditor**
- Uso como **simulador** $\longrightarrow$ teste como **simulador**

Testar todos os modelos obtidos para selecionar o melhor às vezes pode ser muito custoso em **tempo** e **dinheiro**

b) Análise de **viabilidade dos parâmetros**

- Verificação/análise baseada em **conhecimentos anteriores**
- Análise da **sensibilidade** do sistema com os valores encontrados

Validação do Modelo

c) Consistência do **comportamento entrada$\times$saída**

- sistemas lineares $\longrightarrow$ **resposta em frequência e comparar** com o modelo obtido

  (corresponde a extrapolar e comparar outros pontos, distintos dos utilizados no processo de identificação)

d) **Redução do modelo**

Como visto, se uma **redução de ordem** continua descrevendo o comportamento do sistema, o modelo é **desnecessariamente complexo**.

Validação do Modelo

E) **Análise de Resíduos**

- Resíduo é a parte dos dados que o modelo não consegue explicar!

$$\varepsilon_k = \mathcal{E}\{k, \hat{\theta}_N\} \triangleq y[k] - \hat{y}[k|\theta_N]$$

calculamos

$$S_1 = \max_k |\varepsilon_k|$$

(máximo erro produzido pelo estimador)

$$S_2^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2$$

(erro médio produzido pelo estimador)

Validação do Modelo

e) **Análise de Resíduos (cont)**

- Se S_1 e S_2 são próximos para a massa de dados de identificação e de validação é pouco provável que seja diferente para outros conjuntos de dados

- Assim, assumindo que ε_k não depende significativamente da quantidade de medidas Z^k,

$$\hat{R}_{\varepsilon u}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k u_{k-\tau}$$

($\hat{R}_{\varepsilon u}(\tau)$ é baixa $\longrightarrow$ qualidade da análise é boa)

($\hat{R}_{\varepsilon u}(\tau)$ é alta $\longrightarrow$ realimentação de saída)

Validação do Modelo

E) **Análise de Resíduos (cont)**

- Analogamente,

$$\hat{R}_{\varepsilon}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \varepsilon_{k-\tau}$$

($\hat{R}_{\varepsilon}(\tau)$ é elevada para $\tau \neq 0 \longrightarrow \varepsilon_k$ poderia ser previsto a partir de dados passados)

- Podem ser utilizadas as relações

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\varepsilon}(\tau) &= \mathcal{E}\{\varepsilon_k \varepsilon_{k-\tau}\} = \delta(\tau) \\
\hat{R}_{\varepsilon u}(\tau) &= \mathcal{E}\{\varepsilon_k u[k-\tau]\} = 0, \forall\tau \\
\hat{R}_{\varepsilon u^2}(\tau) &= \mathcal{E}\{\varepsilon_k (u[k-\tau]^2 - \overline{u[k]}^2)\} = 0, \forall\tau \\
\hat{R}_{\varepsilon^2 u^2}(\tau) &= \mathcal{E}\{\varepsilon_k^2 (u[k-\tau]^2 - \overline{u[k]}^2)\} = 0, \forall\tau \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Validação do Modelo

E) **Análise de Resíduos (cont)**

- Para sistemas lineares, usamos $\hat{R}_{\varepsilon}(\tau)$ e $\hat{R}_{\varepsilon u}(\tau)$.
- A análise de ruído não valida o modelo, apenas avalia a qualidade da estimação realizada.

F) **Verificação das Hipóteses**

- Linearidade $\longrightarrow$ Variar a amplitude do sinal de entrada e verificar sua composição

  Grau de não linearidade:

$$\begin{array}{rl} u(t)=0 & \Longrightarrow y_0(t) \\ u_1(t) & \Longrightarrow y_1(t) \\ \gamma u_1(t) & \Longrightarrow y_2(t) \end{array} \qquad \Longrightarrow \delta(t) = \frac{y_2(t)-y_0}{y_1(t)-y_0}; \eta = \max_t \frac{|\delta(t)-\gamma|}{|\gamma|}$$

Validação do Modelo

F) **Verificação das Hipóteses**

- Linearidade (cont.)

  (Para sistemas lineares com ausência de ruído, $\eta = 0$)

- Invariância no Tempo

  Dividimos a massa de dados em duas partes D_1 e D_2
  Com D_1 verificamos o perfil da entrada e da saída
  Com D_2 verificamos se os mesmos perfis se reproduzem com deslocamento no tempo