

PRINCÍPIOS DA ESTIMAÇÃO DINÂMICA

GABRIELA W GABRIEL

IEE-S / ITA – Sala 195 – Ramal 5991

ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br

São José dos Campos, 28 de Outubro de 2021

CONTEÚDO

1 ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA DE VETORES GAUSSIANOS

2 ESTIMAÇÃO DINÂMICA

ESTIMAÇÃO ESTATÍSTICA VETORIAL

- Sejam dois vetores $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}, P_{\mathbf{x}\mathbf{x}})$ e $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}, P_{\mathbf{y}\mathbf{y}})$ conjuntamente gaussianos, sendo

■ $\mathbf{x} \longrightarrow$ um vetor aleatório a ser estimado

■ $\mathbf{y} \longrightarrow$ uma medida de $\mathbf{x}$

- Vamos **CONSTRUIR** o vetor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \text{ então } \mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{z}}, P_{\mathbf{z}\mathbf{z}})$$

ESTIMAÇÃO ESTATICA VETORIAL

- E podemos **CALCULAR** $\bar{z}$ e P_{ZZ} conforme

$$\bar{z} = \mathcal{E}\{z\} = \mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} P_{ZZ} &= \mathcal{E}\{(z - \bar{z})(z - \bar{z})'\} = \mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix}'\right\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} (x - \bar{x})(x - \bar{x})' & (x - \bar{x})(y - \bar{y})' \\ (y - \bar{y})(x - \bar{x})' & (y - \bar{y})(y - \bar{y})' \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} P_{XX} & P_{XY} \\ P_{YX} & P_{YY} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} P_{XX} \text{ e } P_{YY} & \text{são as covariâncias de } x \text{ e } y \\ P_{XY} = P'_{YX} & \text{é a cross-covariância entre } x \text{ e } y \end{cases}$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

- ▶ A **estimação ótima linear** ocorre segundo o MMSE dado por

$$\hat{x} = \arg \min_{\hat{x}} \mathcal{E} \left\{ (x - \hat{x})(x - \hat{x})' \middle| y \right\}$$

que sabemos levar a $\hat{x} = \mathcal{E} \{ x | y \}$.

- ▶ Para o caso gaussiano, sabemos ainda que

$$f_{X|Y} = \frac{f_{XY}}{f_Y} = \sqrt{P_{ZZ}P_{YY}^{-1}} e^{-\frac{1}{2}[(z-\bar{z})'P_{ZZ}^{-1}(z-\bar{z}) - (y-\bar{y})'P_{YY}^{-1}(y-\bar{y})]}$$

e, portanto,

$$\min_{\hat{x}} \mathcal{E} \left\{ (x - \hat{x})(x - \hat{x})' \middle| y \right\} = \min_x \left[\overbrace{(z - \bar{z})' P_{ZZ}^{-1} (z - \bar{z}) - (y - \bar{y})' P_{YY}^{-1} (y - \bar{y})}^I \right]$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

- Vamos chamar $e_y = y - \bar{y}$ e $e_z = z - \bar{z}$. Assim,

$$I = e_z' P_{ZZ}^{-1} e_z - e_y' P_{YY}^{-1} e_y$$

$$P_{ZZ}^{-1} = \begin{bmatrix} P_{XX} & P_{XY} \\ P_{YX} & P_{YY} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

- Utilizando a inversa de matrizes bloco 2×2 e o Lema de Woodburry,

$$T_{11} = (P_{XX} - P_{XY} P_{YY}^{-1} P_{YX})^{-1}$$

$$T_{12} = -T_{11} P_{XY} P_{YY}^{-1} \Rightarrow P_{XY} P_{YY}^{-1} = -T_{11}^{-1} T_{12}$$

$$T_{21} = -P_{YY}^{-1} P_{YX} T_{11} \Rightarrow P_{YY}^{-1} P_{YX} = -T_{21} T_{11}^{-1}$$

$$\begin{aligned} T_{22} &= (P_{YY} - P_{YX} P_{XX}^{-1} P_{XY})^{-1} = P_{YY}^{-1} + P_{YY}^{-1} P_{YX} (P_{XX} - P_{XY} P_{YY}^{-1} P_{YX})^{-1} P_{XY} P_{YY}^{-1} \\ &= P_{YY}^{-1} + T_{21} T_{11}^{-1} T_{12} \end{aligned}$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

- Substituindo os valores na expressão de I

$$\begin{aligned}
 I &= e_z' P_{ZZ}^{-1} e_z - e_y' P_{YY}^{-1} e_y \\
 &= e_x' T_{11} e_x + e_x' T_{12} e_y + e_y' T_{21} e_x + e_y' T_{22} e_y - e_y' P_{YY}^{-1} e_y \\
 &= e_x' T_{11} e_x + e_x' T_{11} T_{11}^{-1} T_{12} e_y + e_y' T_{21} T_{11}^{-1} T_{11} e_x \\
 &\quad + e_y' T_{21} T_{11}^{-1} T_{11} T_{11}^{-1} T_{12} e_y - e_y' T_{21} T_{11}^{-1} T_{11} T_{11}^{-1} T_{12} e_y \\
 &\quad + e_y' T_{22} e_y - e_y' P_{YY}^{-1} e_y \\
 &= \left(e_x + T_{11}^{-1} T_{12} e_y \right)' T_{11} \left(e_x + T_{11}^{-1} T_{12} e_y \right) + \underbrace{e_y' \left(T_{22} - T_{21} T_{11}^{-1} T_{12} - P_{YY}^{-1} \right) e_y}_0
 \end{aligned}$$

- O valor **MÍNIMO DE I** ocorre para $e_x + T_{11}^{-1} T_{12} e_y = 0$, sendo

$$\hat{x} = \bar{x} + P_{XY} P_{YY}^{-1} (y - \bar{y})$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

- ▶ Além disso,

$$I = \left(\mathbf{e}_x + T_{11}^{-1} T_{12} \mathbf{e}_y \right)' T_{11} \left(\mathbf{e}_x + T_{11}^{-1} T_{12} \mathbf{e}_y \right)$$

por analogia

$$T_{11}^{-1} = P_{XX|Y} = \text{cov}(x|y) = P_{XX} - P_{XY} P_{YY}^{-1} P_{YX}$$

- ▶ O estimador ótimo linear de x é uma **COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE** $\bar{x}$ e da medida centralizada $y - \bar{y}$.
- ▶ A covariância de $P_{XX|Y}$ **INDEPENDE DE x OU y** . Depende apenas de suas covariâncias.

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

- ▶ Por outro lado, analogamente, se consideramos $\hat{x}$ um estimador linear de x , tal que

$$\hat{x} = Ay + b \quad ; \quad \text{e} \quad \tilde{x} = x - \hat{x} \quad \text{o erro associado}$$

- ▶ Do **Princípio da Ortogonalidade**, temos

- $\hat{x}$ deve ser unbiased

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}\} = \mathcal{E}\{x - (Ay + b)\} = \bar{x} - (A\bar{y} + b) = 0$$

e, portanto,

$$b = -A\bar{y} + \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \bar{x} + A(y - \bar{y})$$

e

$$\tilde{x} = x - \hat{x} = x - \bar{x} - A(y - \bar{y})$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

► Continuando...

$$\blacksquare \mathcal{E}\{\tilde{x}y'\} = 0$$

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}y'\} = \mathcal{E}\{\tilde{x}y'\} - \mathcal{E}\{\tilde{x}\bar{y}'\} = 0$$

então

$$\mathcal{E}\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})'\} - \mathcal{E}\{A(y - \bar{y})(y - \bar{y})'\} = 0$$

Logo,

$$P_{XY} - AP_{YY} = 0 \Rightarrow A = P_{XY}P_{YY}^{-1}$$

e teremos o **ESTIMADOR LINEAR DE x**

$$\hat{x} = \bar{x} + P_{XY}P_{YY}^{-1}(y - \bar{y})$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

- Além disso, a **MATRIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO** é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\{\tilde{x}\tilde{x}'|y\} &= \mathcal{E}\{\tilde{x}\tilde{x}'\} = \mathcal{E}\left\{[x - \bar{x} - P_{XY}P_{YY}^{-1}(y - \bar{y})][x - \bar{x} - P_{XY}P_{YY}^{-1}(y - \bar{y})]'\right\} \\
 &= \mathcal{E}\left\{\mathbf{xx}'\right\} - \bar{x}\bar{x}' - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YX} - \bar{x}\bar{x}' + \bar{x}\bar{x}' \\
 &\quad - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YX} + P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YY}P_{YY}^{-1}P_{YX} \\
 &= P_{XX} - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YX}
 \end{aligned}$$

e teremos

$$P_{XX|Y} = P_{XX} - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YX}$$

ESTIMAÇÃO ÓTIMA VETORIAL

► Observação: $\text{MSE} \neq \text{Matriz MSE}$

$$\blacksquare \text{MSE} = \mathcal{E} \left\{ (x - \hat{x})'(x - \hat{x}) \right\} \text{ é escalar}$$

$$\blacksquare \text{Matriz MSE} \\ = \mathcal{E} \left\{ (x - \hat{x})(x - \hat{x})' \right\} = \mathcal{E} \left\{ (x - \hat{x})(x - \hat{x})'|y \right\} = P_{XX|Y}$$

uma vez que $\hat{x} = \mathcal{E}\{x|y\}$

$$\blacksquare \text{Em geral, } \hat{x} \neq \mathcal{E}\{x|y\} \text{ e } P_{XX|Y} \neq \mathcal{E}\{\tilde{x}\tilde{x}'\}$$

► As equações destacadas são as **EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA ESTIMAÇÃO ESTATICA**► O estimador calculado é **ÓTIMO PARA O CASO GAUSSIANO** e é o **MELHOR ESTIMADOR LINEAR PARA QUALQUER VA ENVOLVIDA**

SISTEMA DINÂMICO

- Seja o sistema dinâmico a tempo discreto

$$x[k+1] = F(k)x[k] + G(k)u[k] + \Gamma(k)v[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$y[k] = H(k)x[k] + w[k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

onde,

$x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados

$u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é uma entrada conhecida

$v(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ é um ruído branco gaussiano

$$\mathcal{E}\{v[k]\} = \bar{v}[k] \text{ e } \text{cov}\{v[k], v[j]\} = Q(k)\delta_{kj}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida

$w(\cdot) \in \mathbb{R}^q$ é o ruído de medida branco gaussiano

$$\mathcal{E}\{w[k]\} = \bar{w}[k] \text{ e } \text{cov}\{w[k], w[j]\} = R(k)\delta_{kj}$$

SISTEMA DINÂMICO

- **Desejamos estimar o vetor de estados** deste sistema

SISTEMA LINEAR DINÂMICO ESTOCÁSTICO



FILTRO DE KALMAN

- └ Estimador ótimo no caso gaussiano
- └ Melhor estimador linear para sistemas lineares não gaussianos

PROPAGAÇÃO DA MÉDIA E VARIÂNCIA

- A média de $x[k]$ é dada por

$$\bar{x}[k+1] = F(k)\bar{x}[k] + G(k)u[k] + \Gamma(k)\bar{v}[k]$$

- Sua covariância

$$\begin{aligned} P_{xx}(k+1) &= \mathcal{E}\{[F(k)(x[k] - \bar{x}[k]) + \Gamma(k)(v[k] - \bar{v}[k])] \\ &\quad [F(k)(x[k] - \bar{x}[k]) + \Gamma(k)(v[k] - \bar{v}[k])]'\} \\ &= F(k)P_{xx}(k)F(k)' + \Gamma(k)Q(k)\Gamma(k)' \end{aligned}$$

(Equação Discreta de Lyapunov (DALE))

uma vez que

$$\mathcal{E}\{(v[k] - \bar{v}[k])(x[k] - \bar{x}[k])'\} = \mathcal{E}\{(x[k] - \bar{x}[k])(v[k] - \bar{v}[k])'\} = 0$$

dado que $v[k]$ é branco e

$$x[k] = F(k-1)x[k-1] + G(k-1)u[k-1] + \Gamma(k-1)v[k-1]$$

(sinais descorrelacionados com $v[k]$)

O PROBLEMA DA ESTIMAÇÃO DINÂMICA

► Seja o sistema (1)–(2) com

(A) $\mathcal{E}\{v[k]\} = \bar{v} = 0$

(B) $\mathcal{E}\{w[k]\} = \bar{w} = 0$

(C) Condição inicial desconhecida, uma v.a. gaussiana com

$$\begin{aligned}\bar{x}[0] &= \bar{x}_0 \\ \text{cov}(x[0]) &= \Lambda\end{aligned}$$

(D) $x[0]$, $w[k]$ e $v[k]$ mutuamente independentes.

► (A), (B), (C) e (D) são chamadas de **CONDIÇÕES GAUSSIANAS LINEARES**.

NOTAÇÃO E OBSERVAÇÕES

► Notação

- $\hat{x}(j|k) = \mathcal{E}\{x[j]|Y^k\}$ é o estado estimado $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dado um conjunto de medidas $Y^k \triangleq \{y[i], i \leq k\}$
- $\tilde{x}(j|k) = x[j] - \hat{x}(j|k)$ é o erro de estimação $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$
- $P(j|k) \triangleq \mathcal{E}\{\tilde{x}(j|k)\tilde{x}(j|k)'|Y^k\}$ é a matriz de covariância condicional do estado dado Y^k (**COVARIÂNCIA ASSOCIADA À ESTIMATIVA - ERRO DE ESTIMAÇÃO**)

► Observações:

- Como no caso MMSE, $\hat{x}(j|k) = \mathcal{E}\{x[j]|Y^k\}$ é a estimativa ótima e $P(j|k) = \mathcal{E}\{(x[j] - \mathcal{E}\{x[j]|k\})(x[j] - \mathcal{E}\{x[j]|k\})'\} = P_{XX|Y}$ é a covariância condicional do estado
- A existência de um pré-filtro em $\{v[k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ faz com que

$$\text{cov}(\Gamma(k)v[k]) = \mathcal{E}\{\Gamma(k)v[k]v[k]'\Gamma(k)'\} = \Gamma(k)Q(k)\Gamma(k)'$$

que corresponde à covariância da perturbação

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

► INICIALIZAÇÃO:

$$\hat{x}(0|0) \quad ; \quad P(0|0)$$

► ESTIMAÇÃO RECURSIVA – IDÉIA:

(A) Calcular:

$$\hat{x}(k|k) = \mathcal{E}\{x[k] | Y^k\} \quad (3)$$

$$P(k|k) = \mathcal{E}\{(x[k] - \hat{x}(k|k))(x[k] - \hat{x}(k|k))'\} \quad (4)$$

(B) Estimar:

$$\hat{x}(k+1|k) = \mathcal{E}\{x[k+1] | Y^k\} \quad (5)$$

$$P(k+1|k) = \mathcal{E}\{(x[k+1] - \hat{x}(k+1|k))(x[k+1] - \hat{x}(k+1|k))'\} \quad (6)$$

(C) Que, a partir de $y[k+1]$, leva a novos:

$$\hat{x}(k+1|k+1) \quad (7)$$

$$P(k+1|k+1) \quad (8)$$

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

- ▶ A partir das equações fundamentais da estimação:

$$\hat{x} = \bar{x} + P_{XY}P_{YY}^{-1}(y - \bar{y})$$

$$P_{XX|Y} = P_{XX} - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YX}$$

- ▶ Desejamos obter a estimação do estado $x = x[k + 1]$ considerando os dados medidos até $k + 1$.
- ▶ Assim, podemos considerar:

- O estado estimado um passo à frente:

$$\bar{x} \longrightarrow \bar{x}[k + 1] \triangleq \hat{x}(k + 1|k) \triangleq \mathcal{E}\{x[k + 1]|Y^k\}$$

- A saída estimada um passo à frente:

$$\bar{y} \longrightarrow \bar{y}[k + 1] \triangleq \hat{y}(k + 1|k) \triangleq \mathcal{E}\{y[k + 1]|Y^k\}$$

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

► Bem como:

- A leitura atual da saída:

$$y \longrightarrow y[k+1]$$

- Que atualiza o estado estimado:

$$\hat{x} \longrightarrow \hat{x}(k+1|k+1) \triangleq \mathcal{E}\{x[k+1]|Y^{k+1}\}$$

► Estas substituições levam às equações:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \bar{x}(k+1) + P_{XY}P_{YY}^{-1}(y[k+1] - \bar{y}(k+1)) \quad (9)$$

e

$$P_{XX|Y} = P_{XX} - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{YX} \quad (10)$$

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

- Por outro lado, a **ESTIMATIVA A PRIORI DO ESTADO** é

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1|k) &= \mathcal{E}\{x[k+1]|Y^k\} \\ &= \mathcal{E}\{F(k)x[k] + G(k)u[k] + \Gamma(k)v[k]|Y^k\} \\ &= F(k)\hat{x}(k|k) + G(k)u[k]\end{aligned}$$

- **O ERRO DE ESTIMAÇÃO DO ESTADO**

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1|k) &= x[k+1] - \hat{x}(k+1|k) \\ &= F(k)\tilde{x}(k|k) + \Gamma(k)v[k]\end{aligned}$$

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

- Da mesma forma, a **COVARIÂNCIA DO ERRO DE ESTIMAÇÃO** é

$$\begin{aligned}\text{cov}(\tilde{x}(k+1|k) | Y^k) &= F(k) \mathcal{E}\{\tilde{x}(k|k) \tilde{x}(k|k)' | Y^k\} F(k)' \\ &\quad + \Gamma(k) \mathcal{E}\{v[k] v[k]' | Y^k\} \Gamma(k)' \\ &= F(k) P(k|k) F(k)' + \Gamma(k) Q(k) \Gamma(k)'\end{aligned}$$

- Para este sistema, a **MEDIDA PREVISTA** é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{y[k+1] | Y^k\} &= \mathcal{E}\{H(k+1)x[k+1] + w[k+1] | Y^k\} \\ &= H(k+1)\hat{x}(k+1|k)\end{aligned}$$

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

- Assim, o **ERRO DE PREDIÇÃO DA MEDIDA** é

$$\tilde{y}(k+1|k) = y[k+1] - \hat{y}(k+1|k) = H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w[k+1]$$

consequentemente,

$$S(k+1) = \text{cov}(\tilde{y}(k+1|k)|Y^k) = H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)' + R(k+1)$$

- A **COVARIÂNCIA CRUZADA** é dada por

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}\{\tilde{x}(k+1|k)\tilde{y}(k+1|k)'|Y^k\} \\ &= \mathcal{E}\{\tilde{x}(k+1|k)[H(k+1)\tilde{x}(k+1|k)]' + \tilde{x}(k+1|k)w[k+1]|Y^k\} \\ &= P(k+1|k)H(k+1)' \end{aligned}$$

A ESTIMAÇÃO ESTÁTICA RECURSIVA E A ESTIMAÇÃO DINÂMICA

- Assim podemos calcular o **GANHO DO FILTRO**:

$$W(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)S(k+1)^{-1}$$

que leva a **ATUALIZAÇÃO DO ESTADO** dada por

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1|k+1) &= \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)[y[k+1] - \hat{y}(k+1|k)] \\ &= \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)\tilde{y}(k+1|k)\end{aligned}$$

e a **ATUALIZAÇÃO DA COVARIÂNCIA DO ESTADO** dada por

$$\begin{aligned}P(k+1|k+1) &= P(k+1|k) - P(k+1|k)H(k+1)'S(k+1)^{-1}H(k+1)P(k+1|k) \\ &= P(k+1|k) - W(k+1)S(k+1)W(k+1)'\end{aligned}$$

FILTRO DE KALMAN

- ▶ As equações acima levam à formulação do **FILTRO DE KALMAN**.
- ▶ Chamando as grandezas que relacionam o estado e a saída
 - Esperança a priori

$$\bar{x}(k+1|k) \triangleq \mathcal{E}\{x[k+1]|Y^k\}$$

- Medida observada no instante $k+1$

$$y[k+1]$$

- Medida com média a priori

$$\bar{y}(k+1) \triangleq \hat{y}(k+1|k) = \mathcal{E}\{y[k+1]|Y^k\}$$

- Estado atualizado

$$\hat{x}(k+1) \triangleq \hat{x}(k+1|k+1) = \mathcal{E}\{x[k+1]|Y^{k+1}\}$$

FILTRO DE KALMAN

- ▶ ...
- ▶ Chamando as grandezas que relacionam as respectivas covariâncias
 - Covariância do estado estimado

$$P_{XX|Y} = P(k+1|k+1) = \text{cov}(x[k+1]|Y^{k+1}) = \text{cov}(\tilde{x}(k+1|k+1)|Y^{k+1})$$

- Covariância da medida com média a priori

$$P_{YY} = S(k+1) \triangleq \text{cov}(y[k+1]|Y^k) = \text{cov}(\tilde{y}(k+1|k)|Y^k)$$

- Covariância cruzada a priori

$$P_{XY} = \text{cov}(x[k+1], y[k+1]|Y^k) = \text{cov}(\tilde{x}(k+1|k), \tilde{y}(k+1|k)|Y^k)$$

- Covariância do estado atualizado

$$P_{XX} = P(k+1|k) \triangleq P(k+1|k) = \text{cov}(x[k+1]|Y^k) = \text{cov}(\tilde{x}(k+1|k)|Y^k)$$

FILTRO DE KALMAN

- ▶ Para ruído branco gaussiano, o Filtro de Kalman corresponde ao **estimador MMSE ótimo**
- ▶ O FK é apresentado em **dois passos**:
 - Predição (estado, medida, covariância)
 - Atualização (estado, medida, covariância)
- ▶ As **hipóteses** do FK são:
 - O estado inicial é conhecido a priori (em Y^k)

$$\mathcal{E}\{x[0]|Y^0\} = \hat{x}(0|0)$$

$$\text{cov}(x[0]|Y^0) = P(0|0)$$

- Os ruídos são conhecidos em média e variância

$$\mathcal{E}\{v[k]\} = \mathcal{E}\{w[k]\} = 0$$

$$\mathcal{E}\{v[k]v[j]'\} = Q(k)\delta_{kj}$$

$$\mathcal{E}\{w[k]w[j]'\} = R(k)\delta_{kj}$$

FILTRO DE KALMAN

► As **hipóteses** do FK são:

- Processos independentes entre si

$$\mathcal{E}\{x[0]v[k]'\} = 0, \forall k$$

$$\mathcal{E}\{x[0]w[k]'\} = 0, \forall k$$

$$\mathcal{E}\{v[k]w[j]'\} = 0, \forall k, j$$

► Fluxograma do filtro de Kalman

FILTRO DE KALMAN A TEMPO DISCRETO

