

FILTRAGEM

Profa GABRIELA W GABRIEL

IEE-S / ITA – Sala 195 – Ramal 5991

São José dos Campos, 18 de Junho de 2021

FILTRO DE KALMAN

PREDIÇÃO

SUAVIZAÇÃO

FILTRO DE KALMAN – INICIALIZAÇÃO

INICIALIZAÇÃO DO FK

- Filtro de Kalman:
 - ▶ Modelo Bayesiano

$$x(0) \sim \mathcal{N}(\hat{x}(0|0), P(0|0))$$

- ▶ Escolha de $\hat{x}(0|0)$ e $P(0|0)$ influenciam na convergência do filtro
- ▶ Teste χ^2 permite uma boa escolha de $\tilde{x}(0|0)$ e de $P(0|0)$

$$\tilde{x}(0|0)'P(0|0)\tilde{x}(0|0) \leq c_1$$

onde c_1 é a região de 95% de confiabilidade.

INICIALIZAÇÃO DO FK

- Observem que

$$\begin{aligned}f_{\hat{x}|x} &= \mathcal{N}(x(0); \hat{x}(0|0), P(0|0)) \\&= \mathcal{N}(\hat{x}(0|0); x(0), P(0|0)) \\&= f_{x|\hat{x}}\end{aligned}$$

- Assim,

$x(0)$ é fixo e $\hat{x}(0|0)$ uma distribuição gaussiana

PREDIÇÃO

FILTRAGEM, PREDIÇÃO E SUAVIZAÇÃO

- Para o FK

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Fx(k) + \Gamma v(k) \\ z(k) &= Hx(k) + w(k)\end{aligned}$$

sendo $v(k)$ e $w(k)$ ruídos brancos aditivos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{v(k)\} &= 0; \quad \mathcal{E}\{v(k)v(j)'\} = Q\delta_{k-j} \\ \mathcal{E}\{w(k)\} &= 0; \quad \mathcal{E}\{w(k)w(j)'\} = R\delta_{k-j}\end{aligned}$$

- Além disso, x_0 é dado e $\hat{x}(0|0)$ e $P(0|0)$ são escolhidos.
- **Objetivo:** Desejamos encontrar $\hat{x}(k|j)$ dado Z^j

FILTRAGEM, PREDIÇÃO E SUAVIZAÇÃO

- A escolha de k e j definem os casos
 - ▶ $j = k$: Filtragem (filtro de Kalman)
 - ▶ $j < k$: Predição (estado estimado à frente do instante atual de medição)
 - ▶ $j > k$: Suavização (estado estimado atrás do instante atual de medição)

PREDIÇÃO

- Neste caso, desejamos uma estimação à priori

$$\hat{x}(k|j) = \mathcal{E}\{x(k)|Z^j\}; j < k$$

- Há 3 tipos:
 - ▶ Predição de Ponto Fixo
 - ▶ Predição de Avanço Fixo
 - ▶ Predição de Intervalo Fixo
- Relembrando as equações do Filtro de Kalman ($k = j$)

$$\hat{x}(j|j) = \hat{x}(j|j-1) + W(j)\nu(j) \quad (1)$$

$$P(j|j) = P(j|j-1) - W(j)S(j)W(j)' \quad (2)$$

PREDIÇÃO DE PONTO FIXO

- Neste caso $j + l = k = N$ é fixo e j varia.

- De (1),

$$\hat{x}(j|j) = F(j-1)\hat{x}(j-1|j-1) + W(j)v(j)$$

- Calculando o sistema no instante $j + l$ à frente

$$x(j+1) = F(j)x(j) + \Gamma(j)v(j)$$

$$x(j+2) = F(j+1)[F(j)x(j) + \Gamma(j)v(j)] + \Gamma(j+1)v(j+1)$$

...

$$x(j+l) = \left[\prod_{i=0}^{l-1} F(j+l-i-1) \right] x(j) + \sum_{\ell=j}^{j+l-1} \left[\prod_{i=0}^{j+l-\ell-2} F(j+l-i-1) \Gamma(\ell) v(\ell) \right]$$

PREDIÇÃO DE PONTO FIXO

- Seu estimador em um instante futuro fixo $N > j$ será

$$\hat{x}(N|j) = \prod_{i=0}^{N-j-1} F(N-i-1) \hat{x}(j|j)$$

$$\hat{x}(N|j) = \prod_{i=0}^{N-j-1} F(N-i-1) [F(j-1) \hat{x}(j-1|j-1) + W(j) \nu(j)]$$

$$\hat{x}(N|j) = \hat{x}(N|j-1) + \left[\prod_{i=0}^{N-j-1} F(N-i-1) \right] W(j) \nu(j)$$

PREDIÇÃO DE PONTO FIXO

- Sabendo que $\hat{x}(N|j) = \mathcal{E}\{\hat{x}(N|i)|Z^j\}$, $\forall i \geq j$ (exercício)
- Sua covariância poderá ser calculada como

$$\mathcal{E}\left\{(\hat{x}(N|i) - \hat{x}(N|j))(\hat{x}(N|i) - \hat{x}(N|j))' \mid Z^j\right\} = P(N|i) - P(N|j)$$

para todo $i \geq j$

SUAVIZAÇÃO

SUAVIZAÇÃO

- Neste caso, desejamos uma estimação à posteriori.
 - ▶ Suavização de Ponto Fixo
 - ▶ Suavização de Avanço Fixo
 - ▶ Suavização de Intervalo Fixo
- Relembrando as equações do Filtro de Kalman ($k = j$)

$$\hat{x}(j|j) = \hat{x}(j|j-1) + W(j)\nu(j) \quad (3)$$

$$P(j|j) = P(j|j-1) - W(j)S(j)W(j)' \quad (4)$$

SUAVIZAÇÃO DE INTERVALO FIXO

- Analogamente ao caso da predição podemos verificar que

$$\hat{x}(k|n) = \hat{x}(k|k) + c(k) [\hat{x}(k+1|n) - \hat{x}(k+1|k)]$$

sendo

$$c(k) = P(k|k)F(k)'P(k+1|k)^{-1}$$

- Com covariância associada

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(k|n) \tilde{x}(k|n)' \} = P(k|k) + c(k) [P(k+1|n) - P(k+1|k)] c(k)'$$