# Outras Estruturas de Filtros

**Profa GABRIELA W GABRIEL**

IEE-S / ITA – Sala 195 – Ramal 5991

São José dos Campos, 28 de Junho de 2021

**OBJETIVO:**

Apresentar outros algoritmos de estimação de grandezas variantes no tempo.

Para isso, obteremos:

- O **estado estimado** $\hat{x}(k|k)$
- A **covariância** associada $P(k|k)$

# Filtro $\mathcal{H}_\infty$

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- **Sistemas reais** estão sujeitos a ruídos.
- O Filtro de Kalman é ótimo **se e somente se** os ruídos forem gaussianos. Outras hipóteses são ainda necessárias, como ruídos descorrelacionados e brancos.
- Introduzido na década de 80, o Filtro $\mathcal{H}_\infty$ possui requisitos **menos rígidos**.
  - Otimização do erro de estimação segundo incertezas provocadas pela ação de **ruídos** (entradas exógenas) ou **modelagem na planta**
  - Estimação robusta, sem a necessidade de hipóteses inicias

# A Norma $\mathcal{H}_\infty$ – ESPAÇO DE BANACH

- Um **espaço normado** sobre $\mathbb{C}$[1], é um espaço vetorial definido em $\mathbb{C}$, para o qual também definimos uma norma $\|\cdot\|$.
- Uma sequência $\{x_n\}$ definida em um espaço normado $\mathbb{V}$, tal que $\|x_n - x_m\| \to 0$ quando $n, m \to \infty$, é dita **sequência de cauchy**.
- Além disso, uma sequência $\{x_n\}$ **converge** para $x$, se $\|x_n - x\| \to 0$.
- Um espaço normado é dito **completo** se toda sequência de Cauchy definida em $V$ converge para algum valor em $x \in V$. A este espaço normado completo chamamos **espaço de Banach**.

[1] $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos

# A Norma $\mathcal{H}_\infty$ – Espaço de Hardy $\mathcal{H}_\infty$

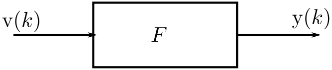
- O **espaço** $\mathcal{L}_\infty(j\omega)$, ou $\mathcal{L}_\infty$, é um espaço de Banach, definido para funções vetoriais ou escalares em $\mathbb{C}$ e que são limitadas em $j\mathbb{R}$.
- O **espaço** $\mathcal{RH}_\infty$ é um subespaço (fechado) de $\mathcal{L}_\infty$ com funções analíticas e limitadas do semi-plano direito aberto de $\mathbb{C}$.
- A **norma** $\mathcal{H}_\infty$ (que define o espaço $\mathcal{RH}_\infty$) é obtida conforme[2]

$$\|\mathcal{S}\|_\infty := \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \bar{\sigma}(\mathcal{S}(s)) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathcal{S}(j\omega)) \tag{1}$$

[2] $\sigma$ corresponde ao espectro de $\mathcal{S}$. Portanto, $\bar{\sigma}$ é o máximo valor singular de $\mathcal{S}$.

# A Norma $\mathcal{H}_\infty$ – definição temporal

- Dado o sistema




em que $\mathrm{v}$ e $\mathrm{y}$ são os sinais (a tempo discreto) de entrada e saída do sistema.

- A **norma euclidiana** do sinal $\{u\}$ é dada por $\|u\|_2^2 := \sum_{k=0}^{\infty} u(k)'u(k)$.

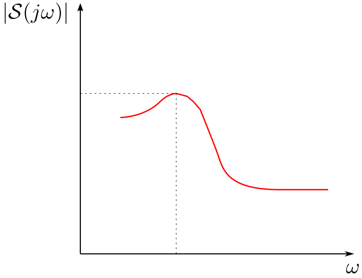
- A interpretação, no domínio do tempo, da norma $\mathcal{H}_\infty$ definida anteriormente é[3]

$$\|\mathcal{S}\|_\infty = \sup_{v \in \mathbb{L}_2^*} \frac{\|\mathrm{y}\|_2}{\|\mathrm{v}\|_2} \tag{2}$$

[3] Um sinal $u \in \mathbb{L}_2^*$ se $u$ é limitado em norma, ou seja, $\|u\|_2 < \infty$, e $u \neq 0$.

# Interpretações da Norma $\mathcal{H}_\infty$

- Decorrente de (1) pode-se dizer que a norma $\mathcal{H}_\infty$ corresponde ao máximo ganho de energia entre a entrada $\mathrm{v}$ e a saída $\mathrm{y}$, traduzido através de (2).




O pico de $|\mathcal{S}(j\omega)| \times \omega$ corresponde ao maior valor singular de $\mathcal{S}$, facilmente verificável para o caso de sistemas SISO.

- Outra possível interpretação, relacionado à robustêz do sistema, decorre do **Teorema dos Pequenos Ganhos**, apresentado no próximo slide.

# O Teorema dos Pequenos Ganhos

- Antes de iniciar, vamos considerar que o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ é dado por

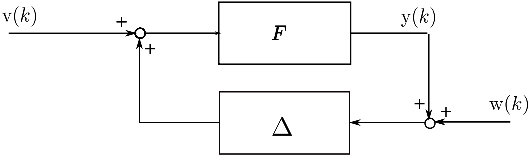
$$\|\mathcal{S}\|_\infty^2 = \sup_{v \in \mathbb{L}_2^*} \frac{\|y\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \gamma^2 \tag{3}$$

- Neste caso, podemos reescrever o limitante superior acima como um limitante inferior da forma

$$\|\mathcal{S}\|_\infty = \min \gamma, \quad \text{tal que} \quad \|y\|_2^2 - \gamma^2 \|v\|_2^2 < 0 \tag{4}$$

## O Teorema dos Pequenos Ganhos

- Vamos considerar que o sistema anterior de forma que todo ruído que incide sobre $\mathcal{S}$ pode ser condensado em uma função de transferência $\Delta$ conforme




### Theorem 1

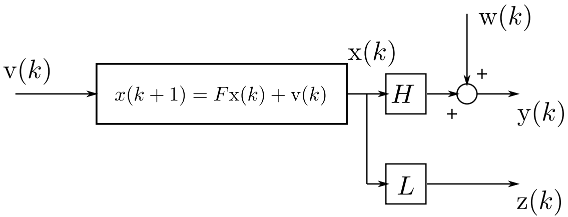
*Suponha $\mathcal{S} \in \mathcal{RH}_\infty$ e seja $\gamma > 0$, então o sistema anterior é (bem comportado e) internamente estável para todo $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ com*

A) $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma \longleftrightarrow \|\mathcal{S}(s)\|_\infty < \gamma$

B) $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma \longleftrightarrow \|\mathcal{S}(s)\|_\infty \leq \gamma$

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- Seja o sistema geral definido por




onde $\mathrm{y}(k)$ é a saída medida do sistema e $\mathrm{z}(k)$, a saída a ser estimada (representativa do estado $\mathrm{x}(k)$).

- Assim, definimos o sistema $\mathcal{S}$, como

$$\mathcal{S} := \begin{cases} \mathrm{x}(k+1) &= F(k)\mathrm{x}(k) + \mathrm{v}(k) \\ \mathrm{y}(k) &= H(k)\mathrm{x}(k) + \mathrm{w}(k) \\ \mathrm{z}(k) &= L(k)\mathrm{x}(k) \end{cases} \quad (5)$$

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- A norma $\mathcal{H}_\infty$ de $\mathcal{S}$ é definida como

$$\|\mathcal{S}\|_\infty = \sup_{\mathrm{x}(0),\mathrm{w}(k),\mathrm{v}(k)} \frac{\|\mathrm{z}-\hat{\mathrm{z}}\|^2_{2,S(k)^{-1}}}{\left(\|\mathrm{x}(0)-\hat{\mathrm{x}}(0)\|^2_{2,P_0^{-1}} + \|\mathrm{w}\|^2_{2,Q(k)^{-1}} + \|\mathrm{v}\|^2_{2,R(k)^{-1}}\right)} \tag{6}$$

onde $\mathrm{z}$, $\mathrm{v}$ e $\mathrm{w}$ são sinais.

- Para um sinal $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $N$ medidas (limitadas), definimos

$$\|u\|^2_{2,T(k)^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)'T(k)^{-1}u(k)$$

- Da mesma forma, para o vetor $\mathrm{x}(0)$ definimos

$$\|\mathrm{x}(0)-\hat{\mathrm{x}}(0)\|^2_{2,P(0)} = (\mathrm{x}(0)-\hat{\mathrm{x}}(0))'P(0)(\mathrm{x}(0)-\hat{\mathrm{x}}(0))$$

## O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

Relembrando da minimização dos erro quadrático médio, para sinais estocásticos, as matrizes de ponderação ($Q(k)$, $R(k)$ e $S(k)$) corresponderiam às covariâncias destes processos.

Analogamente a matriz $P(0)$ corresponderia a covariância associada à estimação do estado, no instante inicial.

- Como visto anteriormente, resolver (6) corresponde a resolver o problema de minimização

$$\min \gamma, \quad s.t.$$
$$\|\mathrm{z} - \hat{\mathrm{z}}\|^2_{2,S(k)^{-1}} - \gamma^2 \left( \|\mathrm{x}(0) - \hat{\mathrm{x}}(0)\|^2_{2,P_0^{-1}} + \|\mathrm{w}\|^2_{2,Q(k)^{-1}} + \|\mathrm{v}\|^2_{2,R(k)^{-1}} \right) < 0 \tag{7}$$

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- A partir da definição de $\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{z}-\hat{\mathrm{z}}\|^2_{2,S(k)^{-1}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(L(k)\mathrm{x}(k) - L(k)\hat{\mathrm{x}}(k)\right)' S(k)^{-1} \left(L(k)\mathrm{x}(k) - L(k)\hat{\mathrm{x}}(k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathrm{x}(k) - \hat{\mathrm{x}}(k)\right)' L(k)'S(k)^{-1}L(k) \left(\mathrm{x}(k) - \hat{\mathrm{x}}(k)\right) \\
&= \|\mathrm{x}-\hat{\mathrm{x}}\|^2_{2,\overline{S(k)}^{-1}}
\end{aligned}$$

onde $\overline{S(k)}^{-1} = L(k)'S(k)^{-1}L(k)$.

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- Assim, o problema a ser resolvido (que gera o **Filtro** $\mathcal{H}_\infty$) é dado por

$$\min \gamma, \quad s.t.$$
$$\|\mathrm{x} - \hat{\mathrm{x}}\|^2_{2,\overline{S(k)}^{-1}} - \gamma^2 \left( \|\mathrm{x}(0) - \hat{\mathrm{x}}(0)\|^2_{2,P_0^{-1}} + \|\mathrm{w}\|^2_{2,Q(k)^{-1}} + \|\mathrm{v}\|^2_{2,R(k)^{-1}} \right) < 0 \tag{8}$$

- Definimos $\overline{S(k)}^{-1} = L(k)'S(k)^{-1}L(k)$ e $\gamma^2 = 1/\theta$, e

$$M(k) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ L \end{bmatrix} P(k|k-1) \begin{bmatrix} H' & L' \end{bmatrix}$$

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- Cálculo a Posteriori

$$\hat{x}(k+1|k) = F(k)\hat{x}(k|k) \tag{9}$$
$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)M(k)F(k)' + Q(k) \tag{10}$$

- O ganho do filtro é

$$K(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)'(H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)' + R)^{-1} \tag{11}$$

- A atualização

$$\hat{\mathrm{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathrm{x}}(k+1|k) + K(k+1)(\mathrm{y}(k+1) - H(k+1)\hat{\mathrm{x}}(k+1|k)) \tag{12}$$
$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)\begin{bmatrix} H' & L' \end{bmatrix} M(k+1)^{-1} \begin{bmatrix} H \\ L \end{bmatrix} P(k+1|k) \tag{13}$$

# O Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- Note que é requerido que

$$M(k) > 0$$

a cada iteração $k \in \mathbb{N}$ com $k < N$. Neste caso, garantimos que

$$\|\mathcal{S}\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

- Note ainda que $L(k) = S(k)^{-1} = I$, e supondo hipótese linear gaussiana, o Filtro $\mathcal{H}_\infty$ torna-se o Filtro de KALMAN.

# Filtro de Kalman Estendido

# O Filtro de Kalman Estendido

- Adaptação do Filtro de Kalman para **sistemas não lineares**.
- **Idéia:** linearização o modelo original $\Longrightarrow$ Perda da Otimalidade!
- Considere o sistema do tipo

$$x(k+1) = f(k, x(k)) + g(k, x(k))v(k) \tag{14}$$
$$y(k) = h(k, x(k)) + e(k) \tag{15}$$

onde $v = \{v(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $e = \{e(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ são duas sequências de ruído branco gaussianos mutuamente independentes:

$$\mathcal{E}(v(k)) = 0, \quad \mathcal{E}(v(k)v(k)') = Q(k)$$

$$\mathcal{E}(e(k)) = 0, \quad \mathcal{E}(e(k)e(k)') = R(k)$$

## O Sistema

- As funções $f(k,x)$ e $g(k,x)$ devem ser contínuas em torno de $x$.
- Consideramos os termos de primeira ordem da expansão em série de Taylor do sistema:
  - $f(k,x(k))$ em torno do estado estimado $\hat{x}(k|k)$
  - $h(k,x(k))$ em torno do estado predito $\hat{x}(k|k-1)$

    (Assim é possível obter uma correção para a estimativa do filtro.)
- Assim,

$$\bar{f}(k,x(k)) \approx f(k,\hat{x}(k|k)) + F(k)(x(k) - \hat{x}(k|k)) \tag{16}$$
$$\bar{g}(k,x(k)) \approx G(k) \tag{17}$$
$$\bar{h}(k,x(k)) \approx h(k,\hat{x}(k|k-1)) + H(k)(x(k) - \hat{x}(k|k-1)) \tag{18}$$

# O Sistema

- As funções $F(k)$, $G(k)$ e $H(k)$ são as derivadas das funções não lineares do sistema, sendo

$$F(k) = \left.\frac{\partial f(k,x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}(k|k)}, \quad G(k) = g(k,x)\big|_{x=\hat{x}(k|k)},$$
$$H(k) = \left.\frac{\partial h(k,x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}(k|k-1)}$$

- A partir de (16)–(18), podemos escrever o sistema linearizado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F(k)x(k) + G(k)v(k) + \tilde{u}(k) \\ y(k) &= H(k)x(k) + e(k) + \tilde{w}(k) \end{aligned}$$

com $\tilde{u}$ e $\tilde{w}$ funções conhecidas dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k) &= f(k, \hat{x}(k|k)) - F(k)\hat{x}(k|k) \\ \tilde{w}(k) &= h(k, \hat{x}(k|k-1)) - H(k)\hat{x}(k|k-1) \end{aligned}$$

# O Filtro de Kalman Estendido

- No sistema linearizado, aplicamos as equações do filtro de Kalman.

1. Inicializações

$$
\begin{aligned}
x(0) &\sim \mathcal{N}(\hat{x}(0|0), P(0|0)) \\
v(k) &\sim \mathcal{N}(0, Q(k)) \\
e(k) &\sim \mathcal{N}(0, R(k))
\end{aligned}
$$

onde $v$, $e$ e $x(0)$ são descorrelacionados entre si e $v$ e $e$ são brancos.

2. Predição 1 passo à frente

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|k) &= F(k)\hat{x}(k|k) + \tilde{u}(k) = f(k, \hat{x}(k|k)) \\
\hat{y}(k+1|k) &= H(k+1)\hat{x}(k+1|k) + \tilde{w}(k+1)
\end{aligned}
$$

# O Filtro de Kalman Estendido

3. Com o valor da nova medida $y(k)$, calculamos a inovação

$$\begin{aligned}
\nu(k+1) &= y(k+1) - \hat{y}(k+1|k) \\
&= y(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k) - h(k+1, \hat{x}(k+1|k)) \\
&\quad + H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \\
&= y(k+1) - h(k+1, \hat{x}(k+1|k))
\end{aligned}$$

4. Cálculo da covariância 1 passo à frente

$$\begin{aligned}
P(k+1|k) &= \mathcal{E}\big([x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)][x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)]'\big) \\
&= \mathcal{E}\big([F(k)x(k) + G(k)v(k) + \tilde{u}(k) - F(k)\hat{x}(k|k) - \tilde{u}(k)]... \\
&\quad ...[F(k)x(k) + G(k)v(k) + \tilde{u}(k) - F(k)\hat{x}(k|k) - \tilde{u}(k)]'\big) \\
&= \mathcal{E}\big([F(k)\tilde{x}(k|k) + G(k)v(k)][F(k)\tilde{x}(k|k) + G(k)v(k)]'\big) \\
&= F(k)P(k|k)F(k)' + G(k)Q(k)G(k)'
\end{aligned}$$

# O Filtro de Kalman Estendido

5. Calculamos a covariância da inovação

$$
\begin{aligned}
S(k+1) &= \mathcal{E}\big([y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)][y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)]'\big) \\
&= \mathcal{E}\big([H(k+1)x(k+1) + e(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k)]... \\
&\quad ...[H(k+1)x(k+1) + e(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k)]'\big) \\
&= H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)' + R(k+1)
\end{aligned}
$$

6. Cálculo do ganho do filtro

$$
W(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)'S(k+1)^{-1}
$$

7. Cálculo das atualizações

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|k+1) &= \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)\nu(k+1) \\
P(k+1|k+1) &= P(k+1|k) - W(k+1)S(k+1)W(k+1)'
\end{aligned}
$$

# Considerações Sobre o Filtro de Kalman Estendido

- É importante observar que as estimativas $\hat{x}(k+1|k)$ e $\hat{x}(k|k)$ não correspondem às médias condicionais de $x$, uma vez que

$$\mathcal{E}(x(k+1)|Y^k) = \mathcal{E}(f(k, x(k))|Y^k) \neq f(k, \mathcal{E}(x(k)|Y^k))$$
$$\mathcal{E}(x(k)|Y^k) \neq \mathcal{E}(x(k+1)|Y^k) + W(k+1)\nu(k+1)$$

- Além disso, note que para o caso do EKF, a covariância não pode ser calculada a priori, ou mesmo o ganho do filtro, uma vez que as linearizações dependem dos valores calculados a cada passo, em $F(k)$, $H(k)$ e $G(k)$.

- Por fim, devido às considerações anteriores, não há garantias de que $\hat{x}$ seja próxima do seu valor ótimo, ou mesmo de que o filtro convirja para um valor estacionário.

# Exemplo Linearização

- Seja um sistema não linear dado por

$$x(k+1) = \frac{1}{1+x(k)} + v(k)$$
$$y(k) = x(k) + e(k)$$

com todas as hipóteses iniciais para o filtro de Kalman, para valores numéricos dados por $Q = 1/3$, $R = 1$ e $x(0) = 1$.

- Os pontos de operação/equilíbrio são $(-1+\sqrt{5})/2$ e $(-1-\sqrt{5})/2$.

# Exemplo Linearização

- Escolhendo $(-1+\sqrt{5})/2$, o sistema linearizado, corresponde a

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{-2}{(3+\sqrt{5})}\left(x(k) - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + v(k) \\
&= \frac{-2}{(3+\sqrt{5})}x(k) + v(k) + \frac{5+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} \\
y(k) &= x(k) + e(k)
\end{aligned}
$$

- Para aplicar o Filtro de Kalman a este sistema, podemos fazer

$$\frac{5+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}}u(k)$$

onde $u(k) = 1$ é constante. Neste caso, $G = \frac{5+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}}$.

# Bibliografia


1. T. Soderstrom, *Discrete-Time Stochastic System*. Springer-Verlag: London, 2002.
2. K. Zhou, *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall: US, 1996.
3. M. Najim, *Modeling, Estimation and Optimal Filtering in Signal Processing*. ISTE e John Wiley & Sons, 2008.