EE-266 – Lista de Exercícios I

Profa. Gabriela.

(Exercícios extraídos de diversas referências)

1. Considere um grupo de n homens, cada um com seu chapéu. Os chapéus são misturados e cada homem escolhe um de forma aleatória. Qual a probabilidade de que nenhum homem escolha o seu próprio chapéu? Determine o limite quando $n \to \infty$.

2. Mostre que se U é uma v.a. contínua e positiva com função densidade de probabilidade $f_U(u)$, então

$$\mathcal{E}(U) = \int_0^\infty \mathcal{P}(U > u) du$$

Calcule $\mathcal{E}(U)$ para o caso em que U tem densidade de probabilidade $f_U(u) = 2ue^{-u^2}$ para $u \geq 0$ e 0, caso contrário.

3. Mostre que ao estimar um vetor aleatório x com os seguintes critérios
   - $\min_{\hat{x}} \mathcal{E}\big[(x-\hat{x})'A(x-\hat{x})|z\big]$, para todo $A > 0$ (definido positivo)
   - $\min_{\hat{x}} \mathbf{tr}(P)$, com $P \triangleq \mathcal{E}\big[(x-\hat{x})(x-\hat{x})'|z\big]$
   - $\min_{\hat{x}} \mathbf{tr}(AP)$, com A e P definidos acima, todos levam ao mesmo resultado de $\hat{x} = \mathcal{E}\big[x|z\big]$

4. Uma companhia recebeu uma encomenda para fundir 3 peças complicadas. A probabilidade de se conseguir um molde adequado é de 0.4, sendo o molde destruído quando a peça é retirada. O custo do molde é de R\$500.00 e se o molde não for adequado, a peça é refugada, perdendo-se R\$700.00 de material.
   (a) Qual a probabilidade de se fundir no máximo 6 peças para atender à demanda?
   (b) Qual o preço a ser cobrado pelo serviço para ter um lucro esperado de R\$1000.00 na encomenda?

5. Sejam X_1 e X_2 v.a. com função densidade de probabilidade conjunta,

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)^{1/2}}\left(\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2\right)}$$

onde ρ, σ_1 e σ_2 são constantes satisfazendo $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ e $-1 < \rho < 1$. Determine:
   (a) As funções densidade de probabilidade $f_{X_1}(x_1)$ e $f_{X_2}(x_2)$ e os valores para os quais teremos X_1 e X_2 independentes.
   (b) $\mathcal{E}\big(X_1\big|X_2\big)$ e $\mathrm{var}\big(X_1\big|X_2\big)$.
   (c) Uma transformação linear do tipo $Y = AX$, em que $Y = [Y_1Y_2]'$ e $X = [X_1X_2]'$ para que Y_1 e Y_2 sejam independentes e para $\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$ e $\rho = 1/\sqrt{3}$. Obtenha, neste caso, $f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)$ bem como as funções densidades marginais.
   (d) A função densidade de probabilidade conjunta $f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2)$ quando $Z_1 = X_1 + X_2$ e $Z_2 = X_1 - X_2$, e $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ e $\rho = 0$. As variáveis Z_1 e Z_2 são independentes?

6. Uma partícula se move em uma circunferência marcada pelos pontos $0, 1, 2, 3, 4$ (sentido horário). Em cada instante de tempo a partícula tem probabilidade p de se mover para a direita (sentido horário) e $1-p$ para a esquerda (sentido anti-horário). Seja X_k a posição da partícula no instante k,
   (a) determine a matriz de transição de probabilidade P.
   (b) A probabilidade da partícula estar na posição 2 no instante $k = 8$, dado que começou na posição 0 em $k = 0$. Considere $p = 1/2$.
   (c) Calcule as probabilidades limites.

7. Considere um sistema linear do tipo

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \tilde{v}$$

em que $(\tilde{v})$ é um ruído branco com média $\bar{v}$ e variância q.
   (a) Encontre α tal que a mádia do processo estacionário seja $\bar{x} = c$.

(b) Utilizando uma aproximação no domínio do tempo, encontre a autocorrelação do processo estacionário resultante.

8. Considere o modelo ARMA

$$x(k) + ax(k-1) = e(k) + ce(k-1), \; |a| < 1$$

onde $e(k), \; k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média nula e variância unitária. Determine a função de covariância $r(k, j)$. O processo $x(k)$ é estacionário no sentido amplo?

9. Suponha N observações independentes de uma variável aleatória x de Bernoulli, com probabilidade p de sucesso, Encontre a estimativa de ML (máxima verossimilhança) de p. Defina $\Lambda_{X|p} = \ln f_{X|p}(x)$. Verifique se este estimador é estável, consistente e eficiente.

10. Seja x uma variável aleatória não observável com média $\mathcal{E}(x) = 2$ e variância $var(x) = 1$ e observações

$$y_1 = x + z_1, \; y_2 = x + z_2,$$

onde z_1 e z_2 são variáveis aleatórias descorrelacionadas entre si com média nula e variância unitária. Entretanto, cada z_i é correlacionada com x, sendo $\mathcal{E}(z_1 x) = \mathcal{E}(z_2 x) = 1/4$. Qual o melhor estimador afim (linear + constante) de x dados y_1 e y_2.