

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 27/12/2024.

Prof. G. W. Gabriel



EES22 CONTROLE CLÁSSICO I

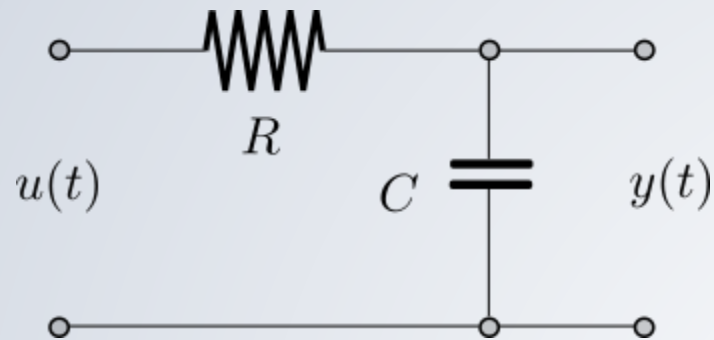
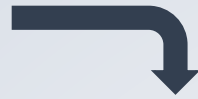
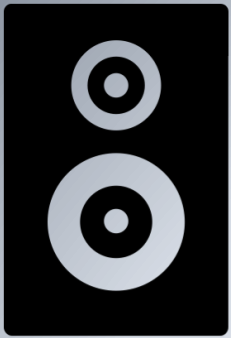
Sistemas de Primeira Ordem. Sistemas de Segunda
Ordem. Requisitos de Desempenho no Domínio do
Tempo.

ASSUNTOS

- Sistemas de primeira ordem.
- Requisitos de desempenho de sistemas de primeira ordem.
- Sistemas de segunda ordem.
- Requisitos de desempenho de sistemas de segunda ordem.



SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM



CIRCUITO RC

■ Modelo do sistema:

$$u(t) = Ri + y(t); \quad i = C \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

$$u(t) = A\mu(t) \Rightarrow y(t) = \frac{A}{RC} \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \right]$$

```
tspan=[0 10];  
y0=0; [t,y]=ode45(@ddt,tspan,y0);  
plot(t,y)  
function dydt = ddt(t,y)  
u=1;
```

MATLAB LINK

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (Sistema de Primeira Ordem)

- Transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}U(s)$$

- A função de transferência para este sistema é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{RCs + 1},$$

$$\Re(s) > -\frac{1}{RC}$$

*(Domínio de
validade de $G(s)$)*

RESPOSTA TEMPORAL (Sistema de Primeira Ordem)

- A dinâmica do sistema é descrita por

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

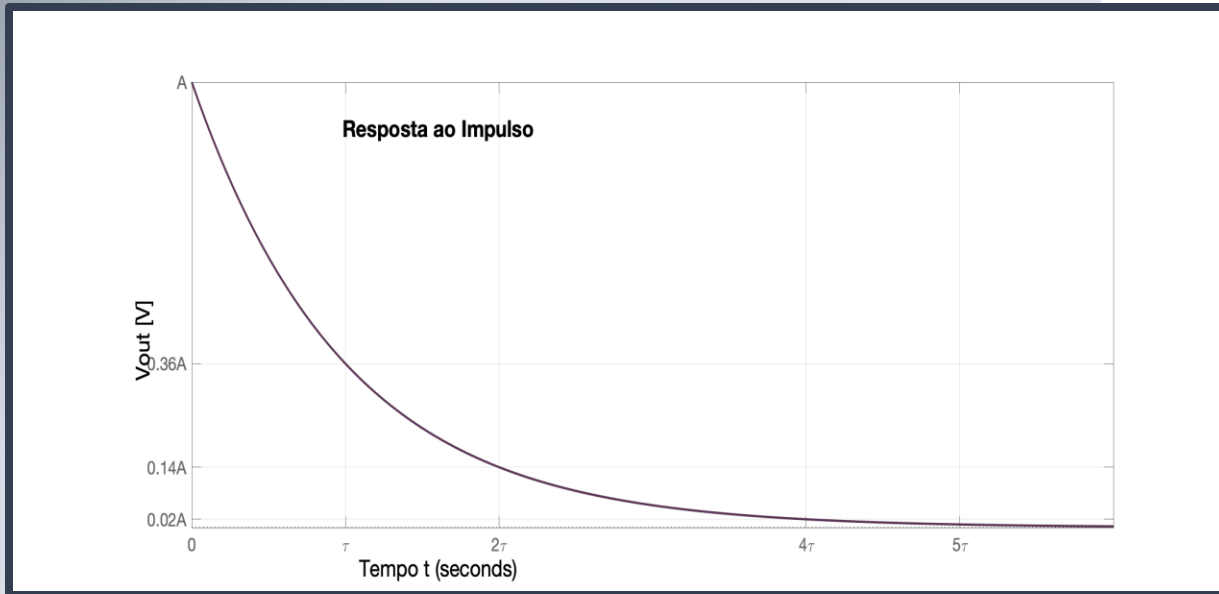
- Cuja solução é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(e^{(1/RC)t} y(t) \right) = e^{(1/RC)t} \frac{1}{RC} u(t) \quad \Rightarrow \quad e^{(1/RC)t} y(t) - y(0) = \int_0^t e^{(1/RC)\alpha} \frac{1}{RC} u(\alpha) d\alpha$$

$$y(t) = e^{-(1/RC)t} y(0) + \int_0^t e^{-(1/RC)(t-\alpha)} \frac{1}{RC} u(\alpha) d\alpha$$



RESPOSTA AO IMPULSO (Sistema de Primeira Ordem)



■ $u(t) = A\delta(t)$

■ A solução torna-se, para $y(0) = 0$,

$$y(t) = \int_0^t e^{-(1/RC)(t-\alpha)} \frac{1}{RC} u(\alpha) d\alpha$$

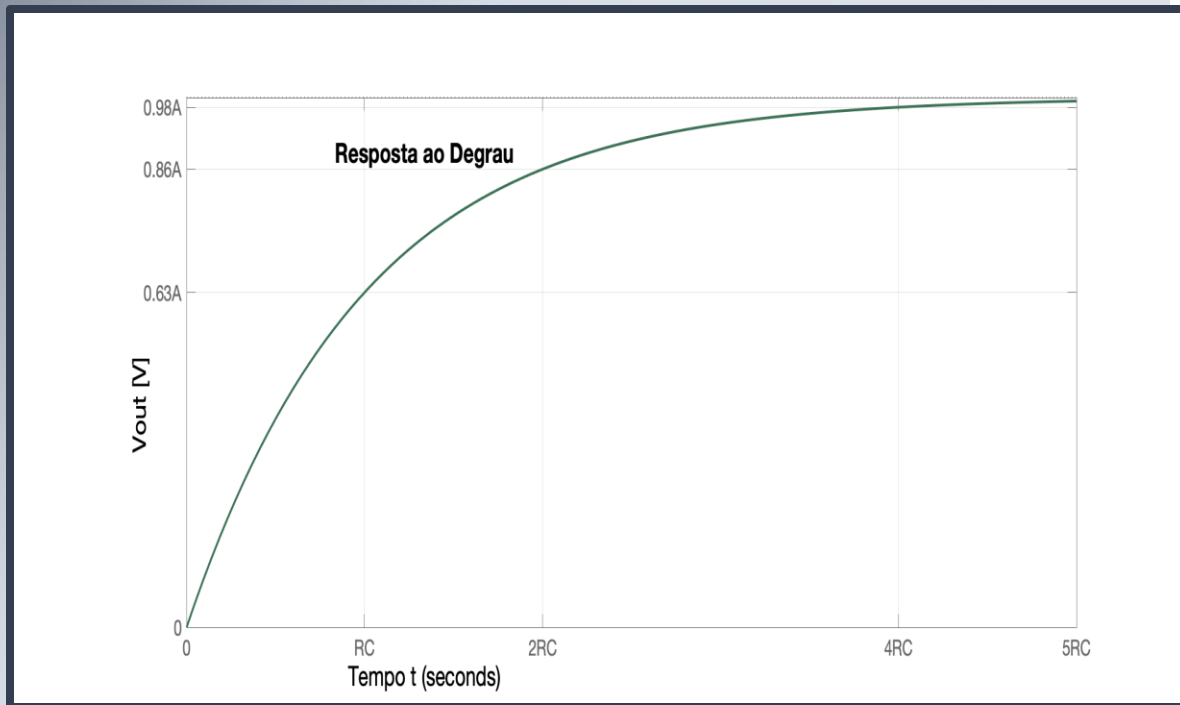
$$y(t) = \frac{A}{RC} e^{-(1/RC)t} = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$$

■ Em $t = \tau$ [s] a saída decai em 63%

■ $\tau = RC$ é a **CONSTANTE DE TEMPO**

$$G(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \quad \text{FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA}$$

RESPOSTA AO DEGRAU (Sistema de Primeira Ordem)



- $u(t) = A\mu(t)$

- A solução, neste caso, torna-se, para $y(0) = 0$,

$$y(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)(t-\alpha)} \frac{1}{RC} u(\alpha) d\alpha$$

$$y(t) = A - Ae^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} = A[1 - e^{-t/\tau}]$$

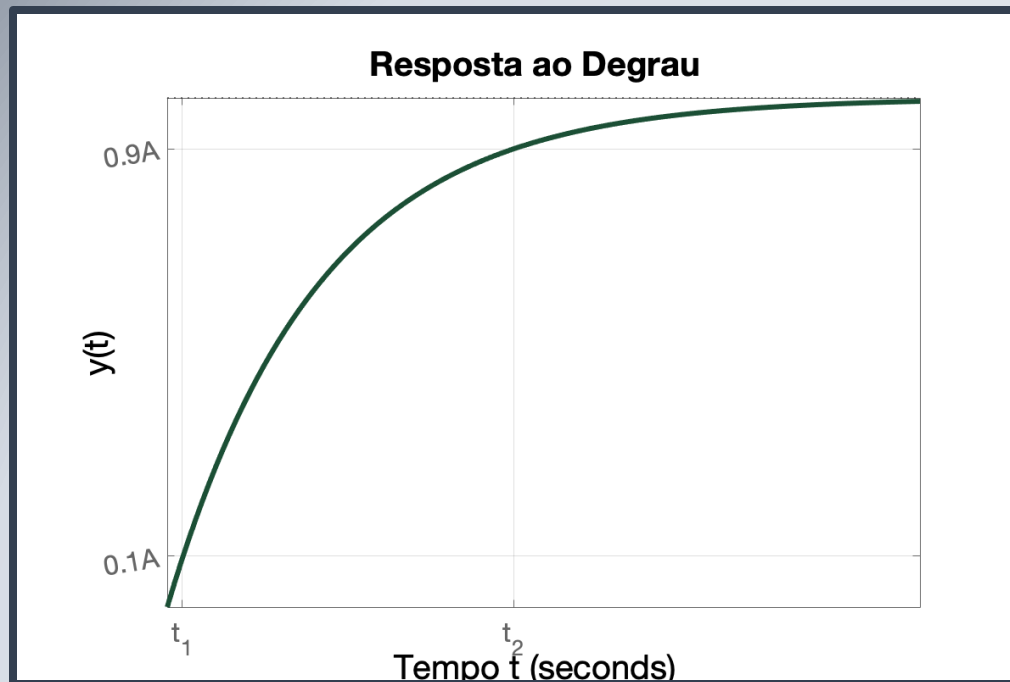
- Em $t = \tau$ [s], a saída chega a 63% do seu valor final.

- Em $t \approx 4\tau$ [s], a saída chega ao seu valor de regime com erro de 2%.

$$t_{S2\%} \approx 4\tau$$

TEMPO DE ACOMODAÇÃO
(SETTLING TIME)

RESPOSTA AO DEGRAU (Sistema de Primeira Ordem)



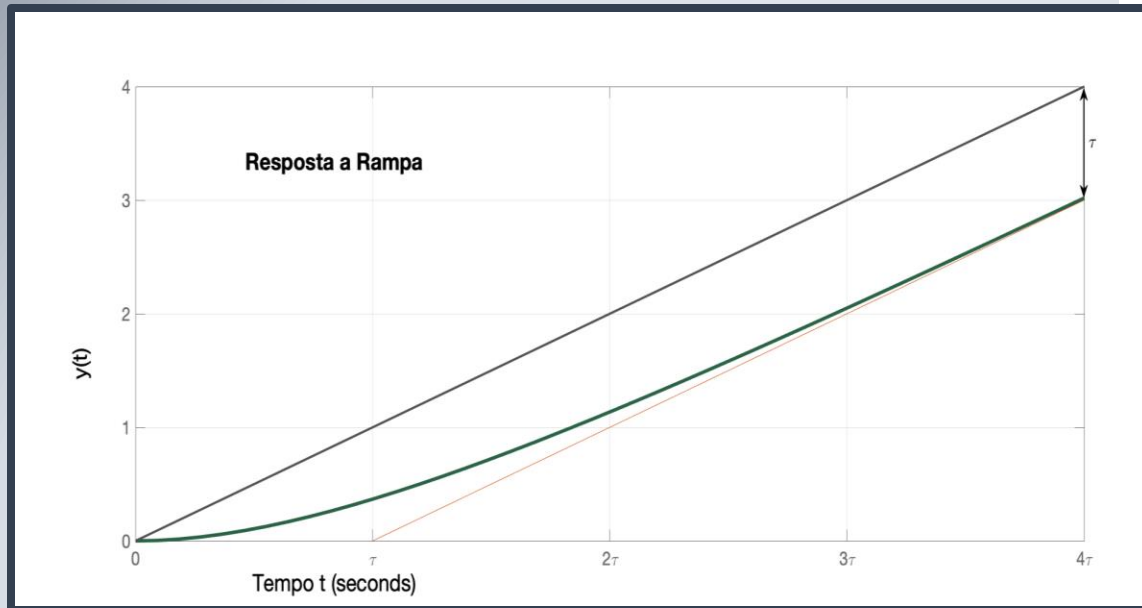
■ O **TEMPO DE SUBIDA** é o tempo para o sistema ir de 10% a 90% de seu valor final

$$\begin{aligned}0,1A &= A \left(1 - e^{-t_1/\tau} \right) \\0,9A &= A \left(1 - e^{-t_2/\tau} \right)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}9 &= e^{(t_2 - t_1)/\tau} \\ \tau \ln 9 &= t_2 - t_1 = t_r\end{aligned}$$

RESPOSTA À RAMPA (Sistema de Primeira Ordem)



■ $u(t) = At\mu(t)$

■ A resposta temporal é, para $y(0) = 0$,

$$y(t) = \int_0^t e^{-(1/RC)(t-\alpha)} \frac{1}{RC} u(\alpha) d\alpha$$

$$y(t) = \frac{A}{RC} e^{-(1/RC)t} \int_0^t \alpha e^{(1/RC)\alpha} d\alpha$$

$$y(t) = \frac{A}{RC} e^{-(1/RC)t} [te^{(1/RC)t} - RCe^{(1/RC)t} + RC]$$

$$y(t) = A[t - RC + RCe^{-(1/RC)t}]$$

$$y(t) = A[t - \tau + \tau e^{-t/\tau}]$$

RESPOSTA À RAMPA (Sistema de Primeira Ordem)

- Para este sistema, se fizermos

$$u(t) - y(t) = At - A[t - \tau + \tau e^{-t/\tau}] = A\tau - A\tau e^{-t/\tau}$$

- O **ERRO EM REGIME**, é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A\tau - A\tau e^{-t/\tau} = A\tau$$

ou através do teorema do valor final

$$\lim_{s \rightarrow 0} s[U(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{A}{s^2} - \frac{A/\tau}{s^2(s + 1/\tau)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{(s + 1/\tau)} = A\tau$$

REQUISITOS DE DESEMPENHO (Sistemas de Primeira Ordem)

■ TEMPO DE ACOMODAÇÃO (entrada degrau)

$$t_{s2\%} = 4\tau$$

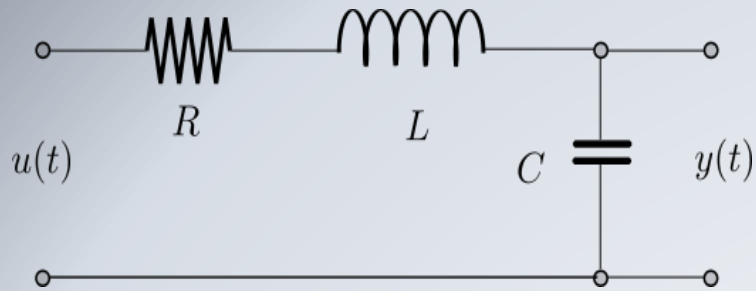
■ TEMPO DE SUBIDA (entrada degrau)

$$t_r = \tau \ln 9$$

■ ERRO EM REGIME (entrada rampa)

$$e = A\tau$$

SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM



CIRCUITO RLC

■ Modelo do sistema:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t); \quad i = C \frac{dy(t)}{dt}$$
$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L} \dot{y}(t) + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} u(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

■ A equação característica é:

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow s = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$
$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

RESPOSTA TEMPORAL

(Sistema de Segunda Ordem)

- A solução da equação homogênea é

$$y_h(t) = c_1 e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + c_2 e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

- A solução da eq. particular depende da entrada do sistema:

- $u(t) = A\delta(t) \Rightarrow y_p = 0, \forall t > 0 ; y(0) = 0 \text{ e } \dot{y}(0) = A$

- $u(t) = A\mu(t) \Rightarrow y_p = c_3\mu(t) = \frac{A}{C}\mu(t)$

- $u(t) = At\mu(t) \Rightarrow y_p = c_3 t\mu(t) + c_4\mu(t) = AC(t - CR)\mu(t)$

RESPOSTA TEMPORAL (Sistema de Segunda Ordem)

■ Para condições iniciais nulas e $R = 2 [\Omega]$, $C = 1 [F]$ e $L = 1 [H]$,

$$\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$$

■ Portanto,

- $u(t) = A\delta(t) \Rightarrow y(t) = Ate^{-t}\mu(t)$
- $u(t) = A\mu(t) \Rightarrow y(t) = -Ae^{-t} - Ate^{-t} + A$
- $u(t) = At\mu(t) \Rightarrow y(t) = 2Ae^{-t} + Ate^{-t} + At - 2A$

```
tspan=[0 10];  
y0=0; [t,y]=ode45(@ddt,tspan,y0);  
plot(t,y)  
function dydt = ddt(t,y)  
u=1;
```

MATLAB LINK



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (Sistema de Segunda Ordem)

- Transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$s^2 Y(s) + \frac{R}{L} s Y(s) + \frac{1}{LC} Y(s) = \frac{1}{LC} U(s)$$

- A função de transferência para este sistema é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}},$$

$$\Re(s) > \max(\Re(s_1), \Re(s_2))$$

*(Domínio de
validade de $G(s)$)*



PARÂMETROS (Sistemas de Segunda Ordem)

■ FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

■ Parâmetros de interesse:

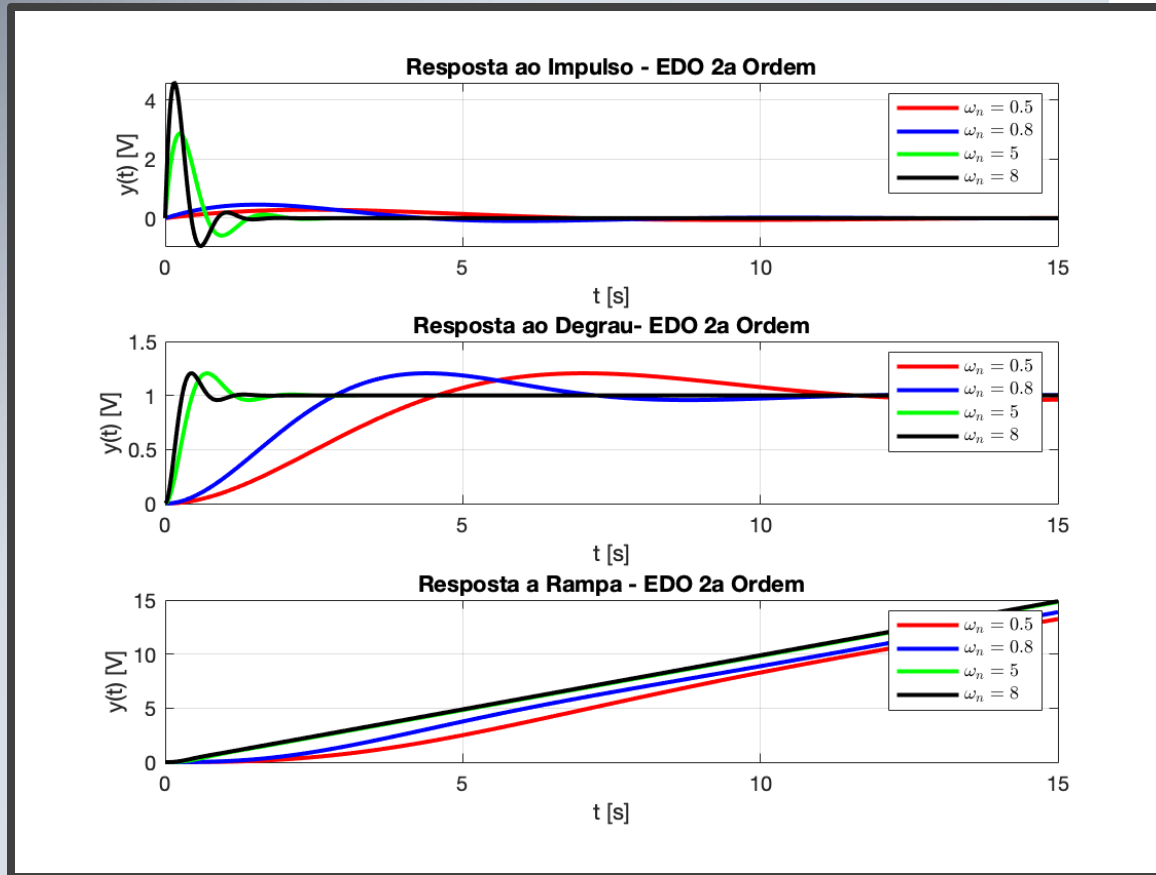
■ COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO

ξ

■ FREQUENCIA NATURAL DE OSCILAÇÃO

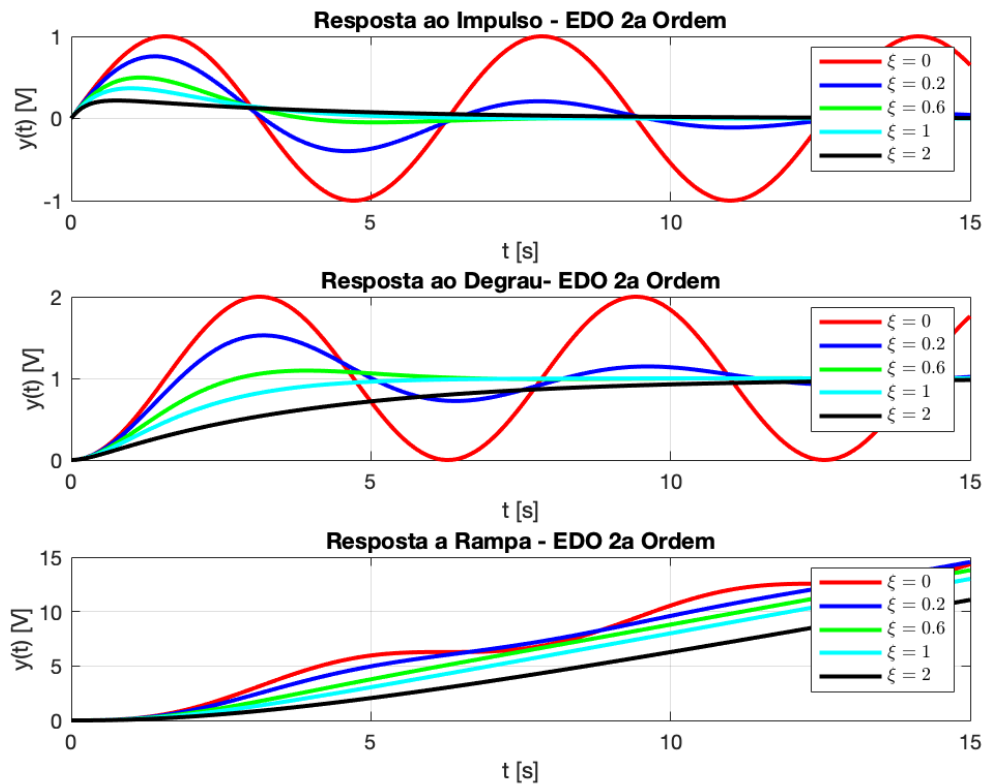
ω_n

PARÂMETROS (Sistemas de Segunda Ordem)



- O formato da resposta do Sistema dependerá dos seus parâmetros.
- Respostas do Sistema para diferentes frequências naturais de oscilação, para um mesmo ξ .

RESPOSTA DO SISTEMA (Sistema de Segunda Ordem)



■ Resposta do sistema para diferentes fatores de amortecimento, ξ

■ Tipos:

- $\xi = 0$ (**NÃO AMORTECIDO**)
- $0 < \xi < 1$ (**SUB AMORTECIDO**)
- $\xi = 1$ (**CRITICAMENTE AMORTECIDO**)
- $\xi > 1$ (**SUPER AMORTECIDO**)

RESPOSTA AO DEGRAU (Sistema de Segunda Ordem)

■ Sistema Não Amortecido: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \right\} = 1 - \cos(\omega_n t)$

■ Sistema Sub Amortecido: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \right]$

■ Sistema Criticamente Amortecido: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right\} = 1 - e^{-\omega_n t} [\omega_n t + 1]$

■ Sistema Super Amortecido: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}))(s + \omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}))} \right\}$
 $= 1 + \frac{1}{2(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t})$

RESPOSTA AO DEGRAU (Sistema de Segunda Ordem)

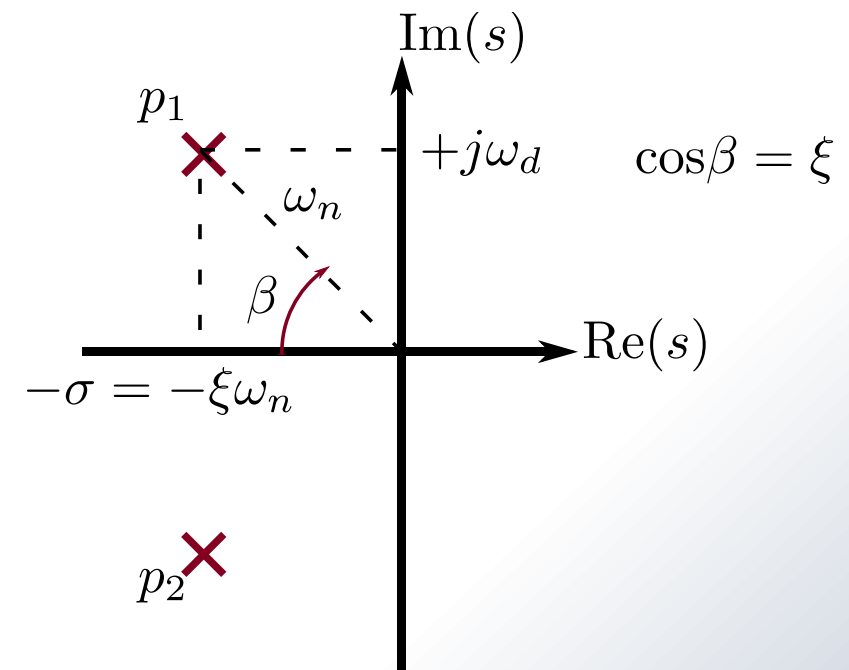
- Para o caso de um sistema sub amortecido, $0 < \xi < 1$ temos **raízes complexas conjugadas**

- Parâmetros graficamente obtidos:

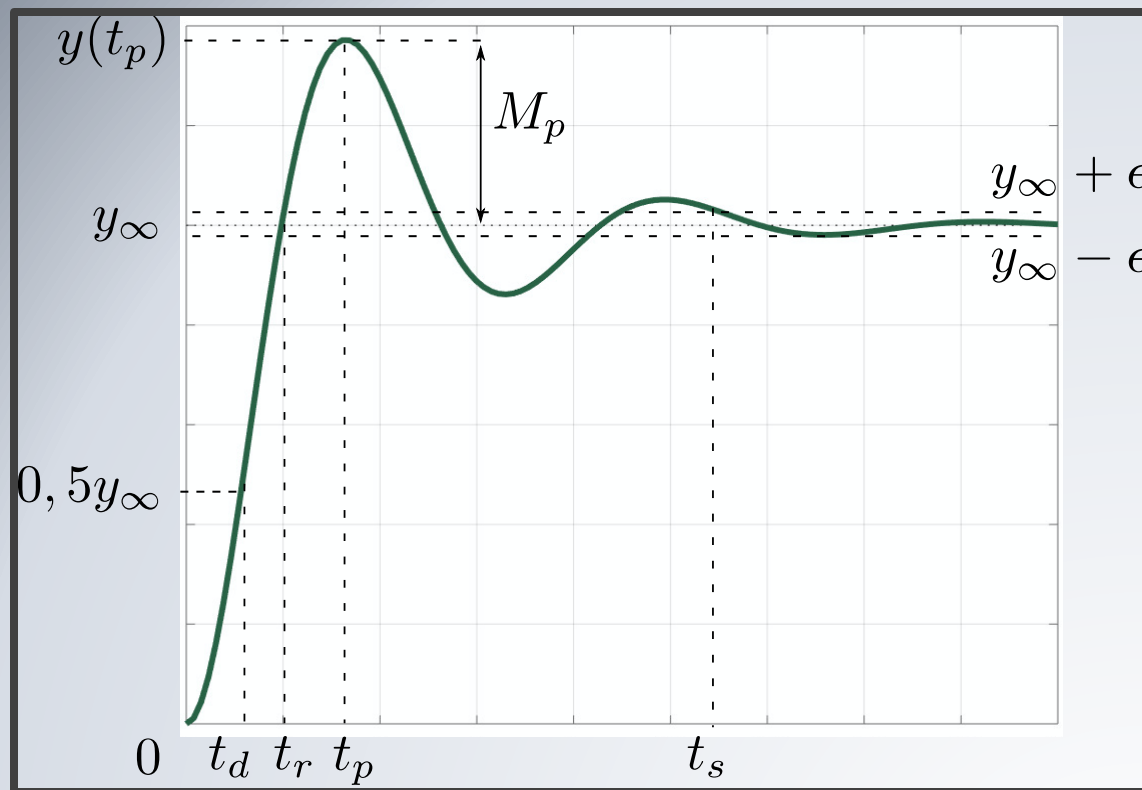
- ω_n é a distância do polo à origem
- ξ corresponde ao $\cos(\beta)$
- $\xi\omega_n$ é a parte real, σ , do polo

- Por isso, alternativamente, podemos escrever

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \beta)$$



CARACTERÍSTICAS DA RESPOSTA (Sistema de Segunda Ordem)



- y_∞ é o **valor de regime** da resposta $y(t)$
- t_p é o **tempo de pico** em que a resposta atinge seu valor máximo
- t_d é o **tempo de atraso** que demora para o sistema chegar a 50% do seu valor de regime
- t_r é o **tempo de subida** que o sistema leva para sair de 0 a y_∞ (Alternativamente, 5%-95% ou 10%-90%)
- t_s é o **tempo de acomodação** que a resposta $y(t)$ leva para entrar na região $y_\infty \pm \epsilon$, em que $\epsilon = 2\%, 5\%$, tipicamente
- M_p é o valor do **máximo sobressinal** que a resposta $y(t)$ alcançará

CARACTERÍSTICAS DA RESPOSTA (Sistema de Segunda Ordem)

■ TEMPO DE ATRASO: $0,5y_{\infty} = y(t_d)$

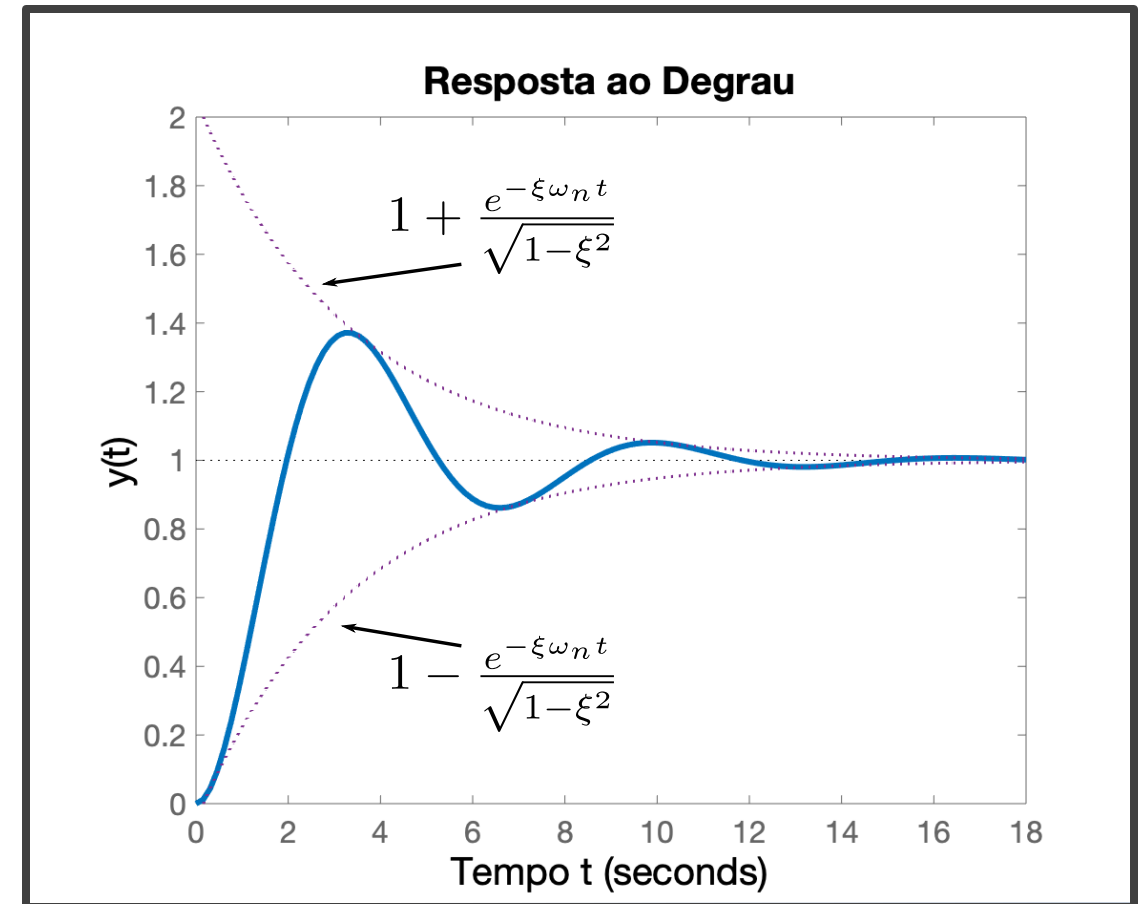
■ TEMPO DE SUBIDA (0%-100%): $t_r = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{\omega_d}$

■ TEMPO DE PICO: $\frac{dy(t_p)}{dt} = 0$

■ MÁXIMO SOBRESSINAL: $M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$

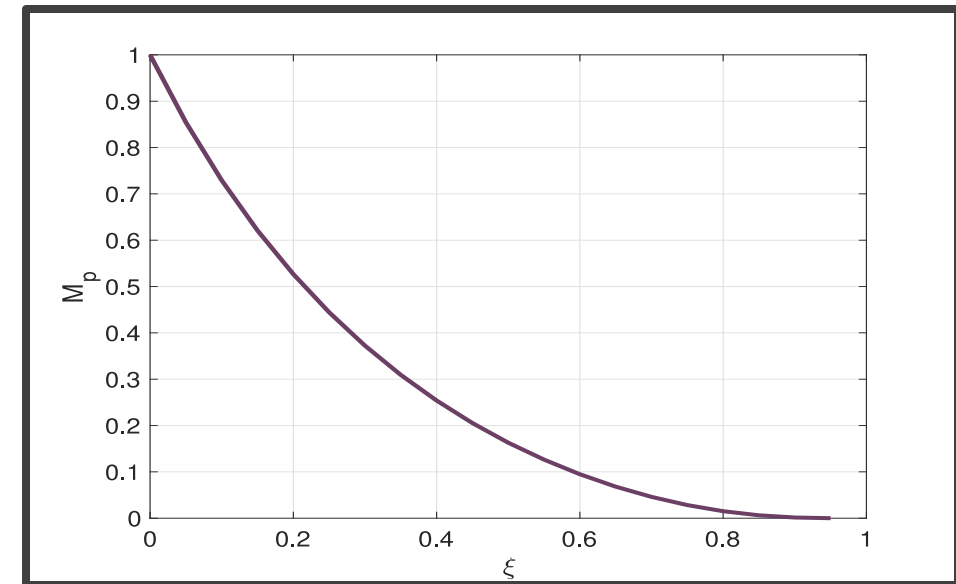
■ TEMPO DE ACOMODAÇÃO: $t_s = \frac{\ln \epsilon}{\xi\omega_n}$

■ ERRO EM REGIME: $e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t))$



REQUISITOS DE DESEMPENHO (Sistemas de Segunda Ordem)

- Quando projetamos um sistema, as especificações para estas características da resposta temporal são conhecidas são ditos **REQUISITOS OU CRITÉRIO DE DESEMPENHO** para o projeto.
- Estes requisitos estabelecem **LIMITANTES** para o projeto.
- Exemplo: Desejamos um projeto com máximo sobressinal (overshoot) de 20%.



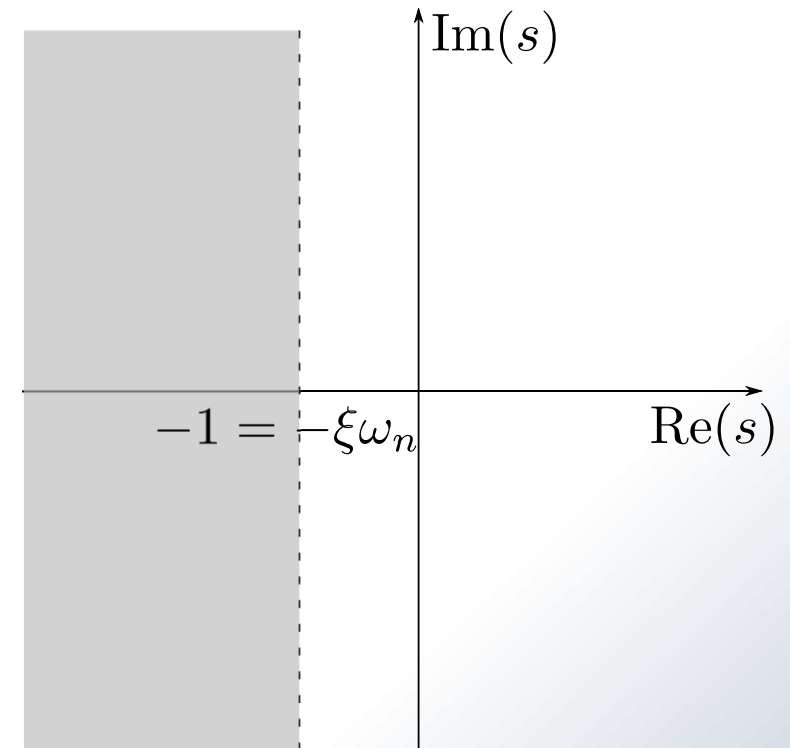
$$0,2 \leq M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi \geq 0,44$$

REQUISITOS DE DESEMPENHO (Sistemas de Segunda Ordem)

- Se além disso definirmos que $t_s \leq 4$ [s], para $\epsilon = 2\%$, então

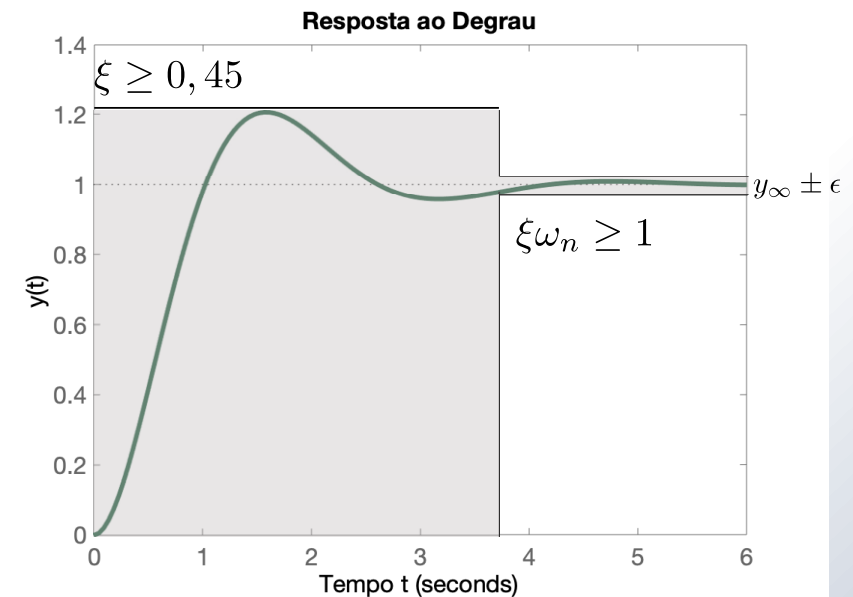
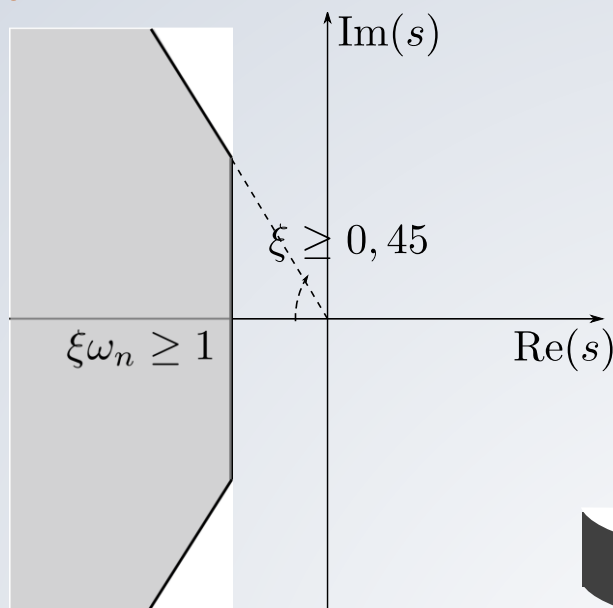
$$t_s = -\frac{\ln 0,02}{\xi \omega_n} \leq 4 \Rightarrow \xi \omega_n \geq 1$$

- No plano complexo, estamos definindo



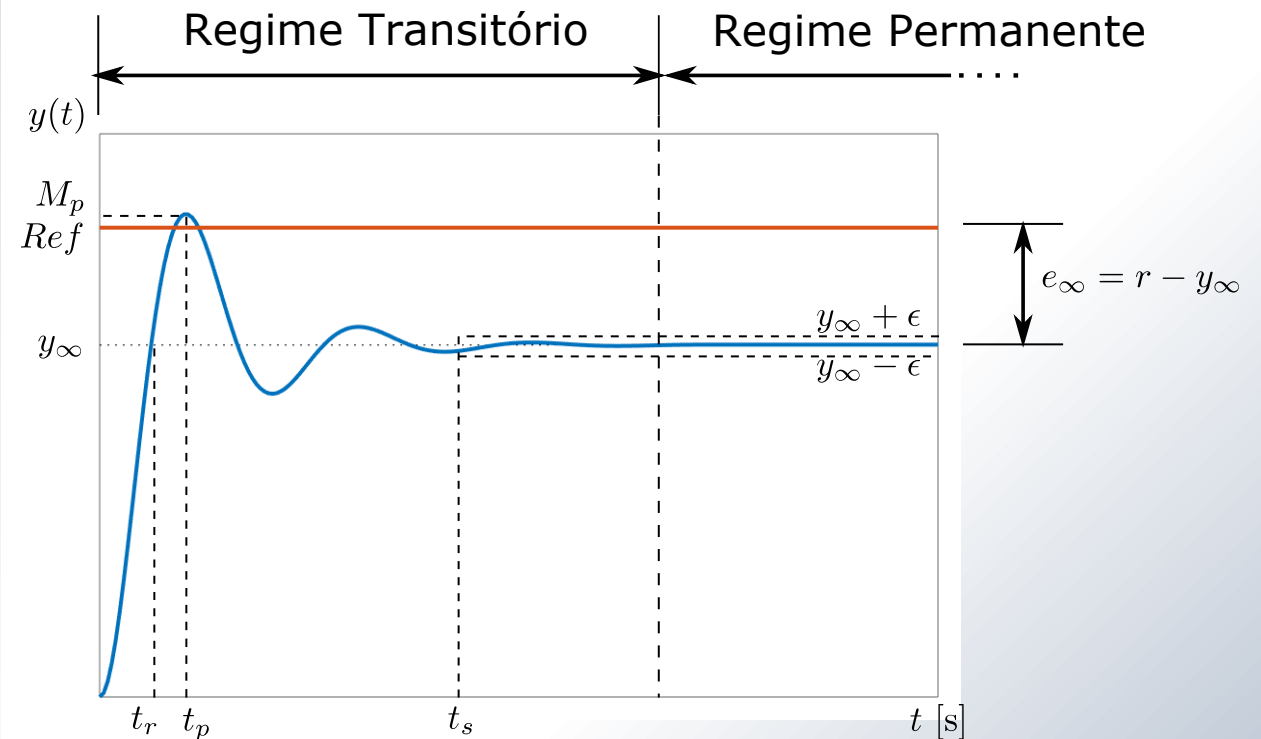
REQUISITOS DE DESEMPENHO (Sistemas de Segunda Ordem)

- Estas duas condições delimitam uma região no plano complexo $Re(s) \times Im(s)$ e no gráfico $y(t) \times t$



REQUISITOS DE DESEMPENHO (Sistemas de Segunda Ordem)

- Alguns requisitos de projeto especificam o **REGIME TRANSITÓRIO** da resposta do sistema ao sinal aplicado e outros, o seu **REGIME PERMANENTE**.



MATERIAL ADICIONAL

■ Leituras:

- Leitura Complementar 01 (Funções de Transferência. Transformadas de Laplace. Diagrama de Blocos.)
- Leitura Complementar 05 (Estabilidade de Sistemas Dinâmicos)

■ Vídeos:

- 01: Diagrama de Blocos
- 02: Função de Transferência de Malha Fechada

PRÓXIMA AULA

- Critério de Routh-Hurwitz (Revisitado)
- Controladores PID

