

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 27/12/2024.

EES22 CONTROLE CLÁSSICO I

Critério de Routh-Hurwitz. Controladores PID. Projeto
de Controladores PID. Ziegler-Nichols.



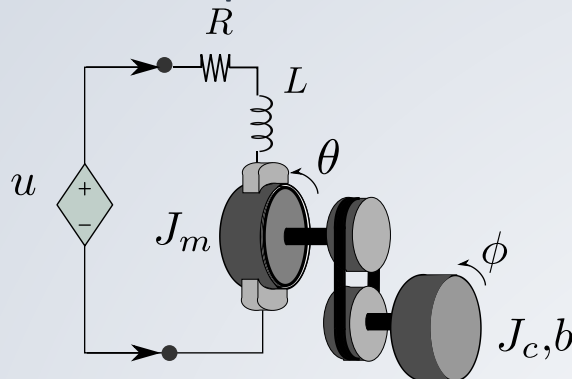
ASSUNTOS

- Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz (Revisitado)
- Controladores PID
- Projeto de controladores PID
- Sintonia de PID utilizando Ziegler-Nichols



PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

- Seja o sistema de um motor de corrente contínua (exemplo adaptado do Livro de Geromel e Korogui, 2011) representado por



- c é uma constante que relaciona os raios das polias conectadas à carga e ao motor.

- Parte elétrica:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u - K \frac{d\theta}{dt}$$

em que há um acoplamento com a parte mecânica através da velocidade angular do rotor

- Parte mecânica

$$(J_c + J_m c^2) \frac{d^2 \phi}{dt^2} + b \frac{d\phi}{dt} = c K i$$

em que há um acoplamento mecânico através da corrente que circula no motor.

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

- K é uma constante de proporcionalidade, R e L são respectivamente os valores da resistência e indutância do circuito elétrico do motor.
- No domínio da frequência

$$\begin{aligned}(Ls + R)I(s) + cK\Phi(s)s &= U(s) \\ [(J_c + J_m c^2)s + b]\Phi(s)s &= cKI(s)\end{aligned}$$

- Chamando $\Phi(s)s = W(s)$ a velocidade angular da carga e eliminando a corrente das duas equações

$$G(s) = \frac{W(s)}{U(s)} \frac{cK}{[(J_c + J_m c^2)s + b](Ls + R) + c^2 K^2}$$

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

- A equação característica do sistema do motor é dada por

$$[(J_c + J_m c^2)s + b](Ls + R) + c^2 K^2 = 0$$

- Sendo todos os coeficientes positivos, o sistema dinâmico em estudo é sempre **ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL**, para quaisquer valores dos seus parâmetros.
- O valor de $w(t)$ **regime permanente** para uma entrada degrau $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U/s\}$ (tensão aplicada ao motor) qualquer é dado por

$$w_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) = \frac{cK}{Rb + c^2 K^2} U$$

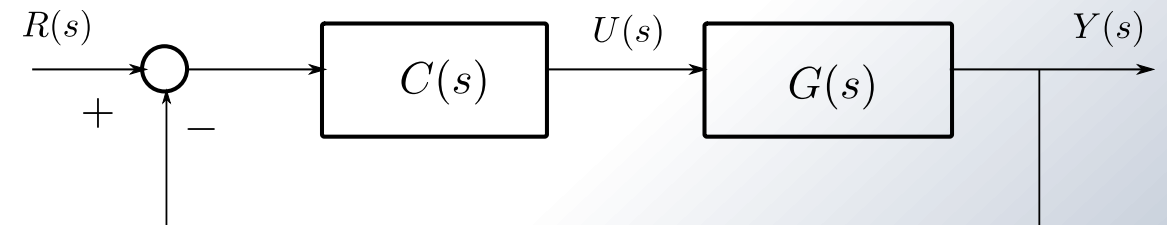


PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

■ Para um modelo de motor específico obtemos o seguinte modelo em TF

$$G(s) = \frac{1}{14s^2 + 15s + 2}$$

■ Aplicando-se uma estrutura de controle padrão do tipo



■ Sendo $Y(s) = W(s)$ e $C(s) = K_p$

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

■ Tem-se que a função de transferência de MF é

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

e, portanto,

$$F(s) = \frac{K_p}{14s^2 + 15s + (2 + K_p)}$$

■ Neste caso, teremos que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2+K_p}{14}}, \quad \text{e} \quad \xi^2 = \frac{225/4}{28+14K_p}$$

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

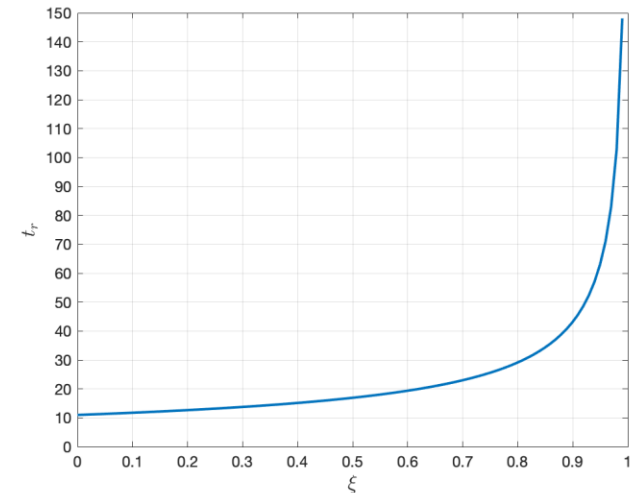
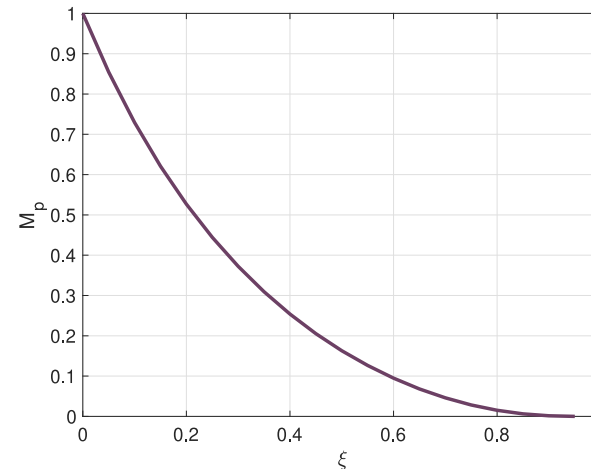
■ Novamente, para $M_p \leq 0.1$, devemos ter

$$\xi \geq 0.6 \Rightarrow K_p \leq 9,16 \quad (K_p = 9)$$

■ Vamos avaliar outros parâmetros deste projeto

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 3,14 \text{ [s]}$$

$$t_{s2\%} = \frac{4}{\xi \omega_n} = 7,47 \text{ [s]}$$



Para um dado ω_n , o valor dos tempos de acomodação e de subida aumentam com ξ .

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

■ A resposta em regime permanente para uma referência degrau será

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_p}{s(14s^2 + 15s + (2 + K_p))} = \frac{K_p}{2 + K_p} = 0,82$$

Alguma escolha de K_p reduziria o erro em regime? E o que ocorreria com o sobressinal?

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

■ Como garantir erro em regime nulo?

■ Neste caso, é preciso tornar o sistema de Tipo 1, ou seja, com um polo em zero. Isso implica em adotarmos na estrutura anterior um controlador do tipo Integrador:

$$C(s) = \frac{K_i}{s}$$

■ Assim,

$$F(s) = \frac{K_i}{s(14s^2 + 15s + 2) + K_i}$$

Neste caso, desde que o sistema resultante seja estável, teremos

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_i}{s(14s^2 + 15s + 2) + K_i} = 1$$

Como projetar K_i ?

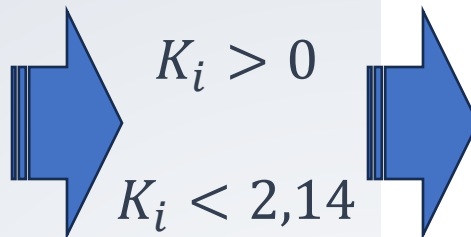
Como garantir a estabilidade?

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Utilizando Requisitos de Desempenho)

■ Utilizando o critério de RH:

$$F(s) = \frac{K_i}{s(14s^2 + 15s + 2) + K_i}$$

s^3	14	2
s^2	15	K_i
s	$30 - 14K_i$	
1	K_i	



- $K_i = 2 \Rightarrow F_a(s) = \frac{0,13}{s^2 + 0,008s + 0,13}$

$$t_s = \frac{4}{0,004} = 1000 \text{ [s]}$$

- $K_i = 0,05 \Rightarrow F_a(s) = \frac{0,03}{s + 0,03}$

$$t_s = \frac{4}{0,03} \approx 133 \text{ [s]}$$

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

- O critério de Routh-Hurwitz é baseado na construção da tabela de Routh.
- A quantidade de polos no SPD corresponde ao número de inversões de sinal na primeira coluna.
- Casos especiais de elemento nulo devem ser avaliados
 - **Linha inteira** se anula: a linha anterior da tabela é divisor do polinômio original.
 - **Apenas um elemento** se anula: substitui-se $0 \rightarrow \delta$ e procede-se com a tabela. A análise final é realizada fazendo o limite de $\delta \rightarrow 0$.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

- Dados os sistemas em malha fechada, verificar a estabilidade do sistema e, caso seja instável, quantos polos encontram-se no SPD do plano complexo.

$$F(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

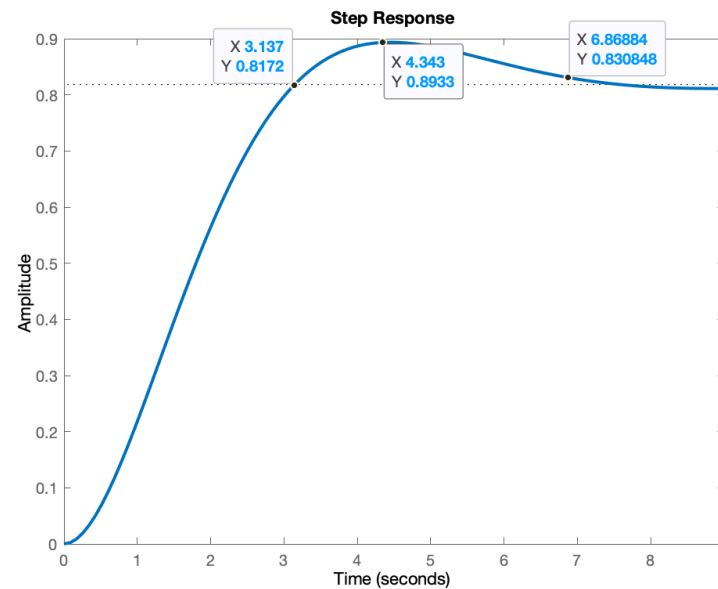
$$F(s) = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$$

$$F(s) = \frac{8}{s^3 + s^2 + 2s + 8}$$

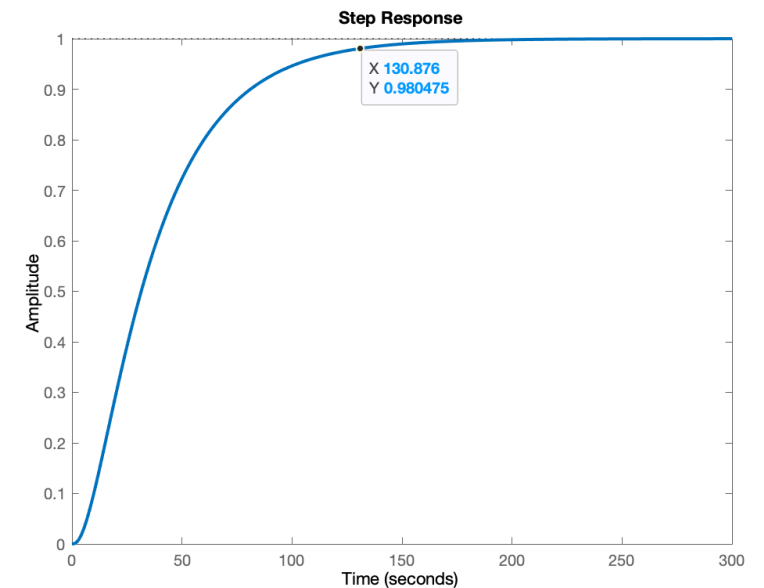
Resolução
(Quadro Negro)

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Revisitado)

- Os projetos de controle para o motor CC
 - Controlador proporcional
 - Controlador integral



$$C(s) = 9$$

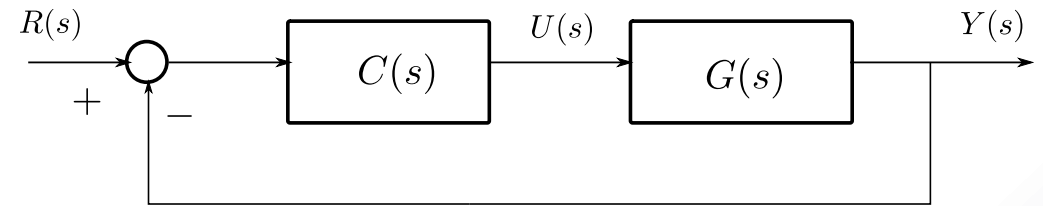


$$C(s) = 0.05/s$$

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Revisitado)

■ Considerando um controlador PI (2 parâmetros):

$$F(s) = \frac{K_p s + K_i}{s(14s^2 + 15s + 2) + K_p s + K_i}$$



■ O critério de Routh-Hurwitz leva a

s^3	14	$2 + K_p$
s^2	15	K_i
s	$\frac{30 + 15K_p - 14K_i}{15}$	
1	K_i	



$$\begin{aligned} K_i &> 0 \\ K_p &> \frac{14}{15} K_i - 2 \end{aligned}$$



$$K_i = 1$$

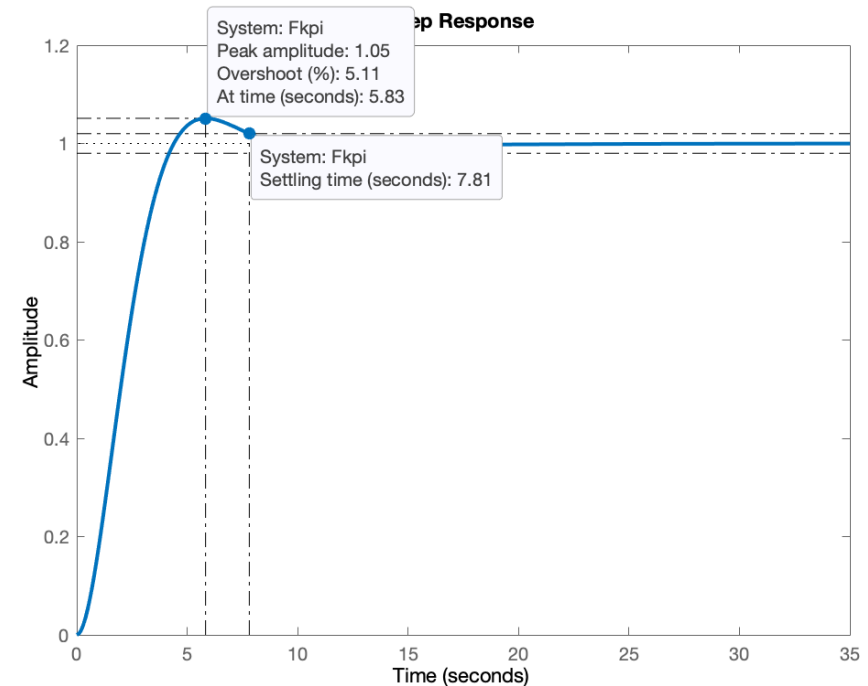
$$K_p = 7$$

$$F(s) = \frac{7s + 1}{14s^3 + 15s^2 + 9s + 1}$$

Ajuste Manual – pode ser bastante demorado!

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Revisitado)

- Para a escolha de $K_p=7$ e $K_i=1$
 - Estrutura de um controlador PI.
 - É possível atingir os requisitos desejados!
 - Como **arbitrar** os melhores valores para os parâmetros?



PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Revisitado)

- Podemos igualar a equação característica a um polinômio desejado através de uma alocação de polos considerando os **REQUISITOS DESEJADOS (método algébrico)**.

$$\Delta_T(s) = (s + p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = s \left(s^2 + \frac{15}{14}s + \frac{2}{14} \right) + \frac{K_p}{14}s + \frac{K_i}{14}$$

Neste caso,

- $p + 2\xi\omega_n = \frac{15}{14}$
- $2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = \frac{2}{14} + \frac{K_p}{14}$
- $p\omega_n^2 = \frac{K_i}{14}$



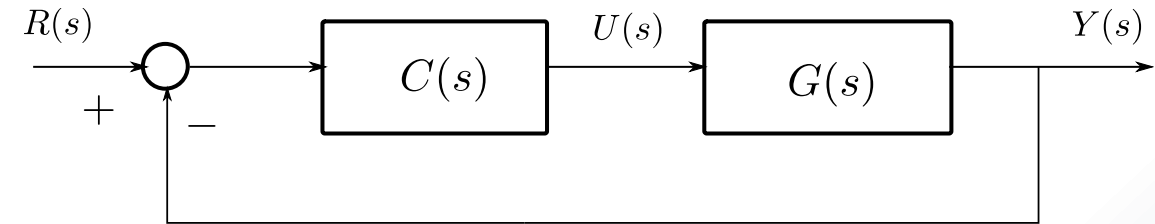
(Sistema Possível e Indeterminado)

Boas escolhas:

- Cancelar polos indesejados (**CUIDADO!**)
- Alocar o terceiro polo afastado da origem (**CUIDADO!**)
- ...

PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Revisitado)

- Considere agora um controlador do tipo PID



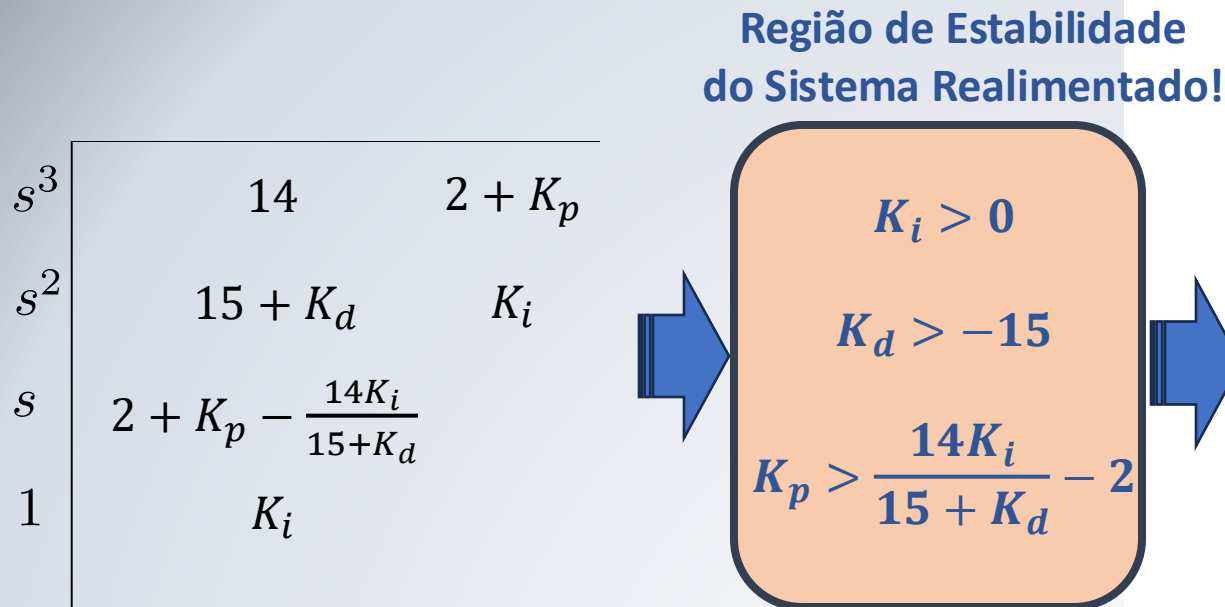
$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

- A função de transferência de malha fechada (estrutura padrão) é

$$F(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{14s^3 + (15 + K_d)s^2 + (2 + K_p)s + K_i}$$

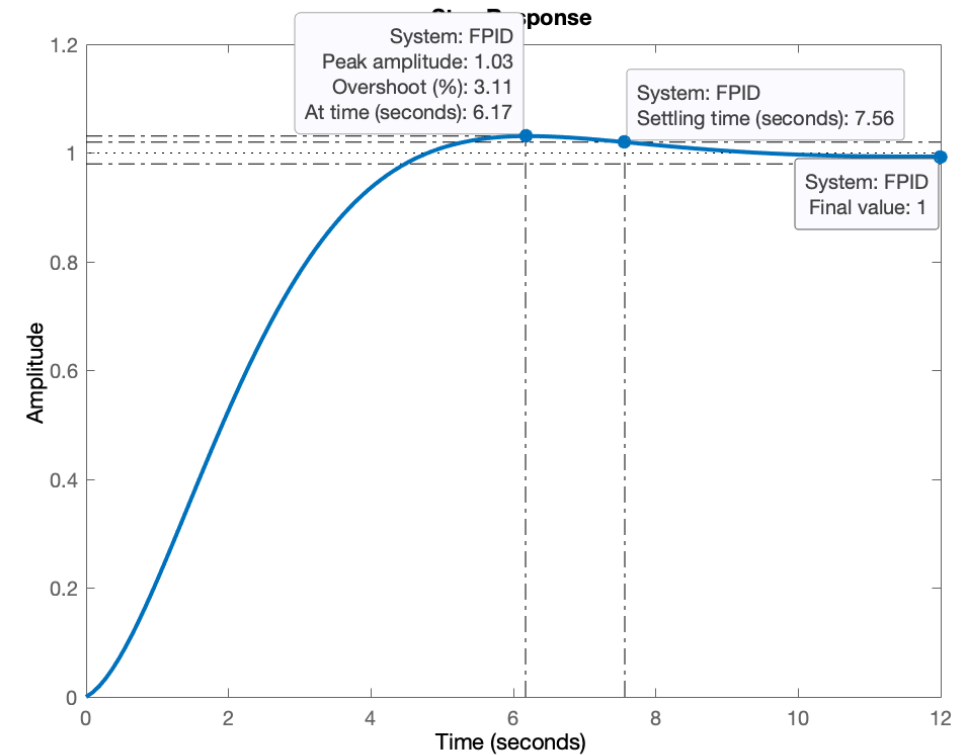
PROJETO DE CONTROLE PARA MOTOR CC (Revisitado)

■ Analise de estabilidade no caso do motor CC



Ajuste Manual – pode ser bastante demorado!

$$K_p = 7, \quad K_i = 1, \quad K_d = 1$$



CONTROLADORES PID

■ Este tipo de estrutura é bastante **útil na indústria, em geral:**

■ **Controlador Proporcional (P):** $C(s) = K_p$

■ São de fácil implementação.

■ **Controlador Proporcional- Integral (PI):** $C(s) = K_p + K_i/s$

■ Reduzem o erro em regime;

■ Tornam o sistema robusto a perturbações de baixa frequência;

■ Aumentam o tempo de estabilização.

Melhora o regime permanente

■ **Controlador Proporcional-Derivativo (PD):** $C(s) = K_p + K_d s/(Ts + 1)$

■ Suaviza variações bruscas no sinal de erro;

■ Aumentam o erro em regime;

■ Reduzem o tempo de estabilização.

Melhora o regime transitório



CONTROLADORES PID

- Controladores de 3 termos (Proporcional-Integral-Derivativo), têm sua FT na forma

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

- Esta FT é NÃO-CAUSAL e, portanto, **NÃO-REALIZÁVEL!!!!!!**

- **Uma simples correção, torna-a causal e realizável!**

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{Ts + 1}, \quad T > 0, \quad T \downarrow \downarrow$$

- **Há várias formas de sintonizar controladores PID (além da alocação de polos).** Duas delas serão vistas mais adiante.

PROJETO DE CONTROLADORES PID

■ Estrutura realizável do controlador PID

$$C(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(s + \alpha)}$$

ou

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{Ts + 1}$$

em que $|\alpha| \gg |Re\{\lambda_i\}|$, λ_i cada um dos polos de MF, ou $|T| \ll \frac{1}{|Re\{\lambda_i\}|}$. $\{\alpha, T\} > 0$.

■ α (ou $1/T$) é um polo afastado de $F(s)$.

PROJETO DE CONTROLADORES PID

■ Estrutura dos controladores PID

$$U(s) = \left[K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right] E(s)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t)$$

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right)$$

K_p - ganho proporcional

K_i - ganho integral

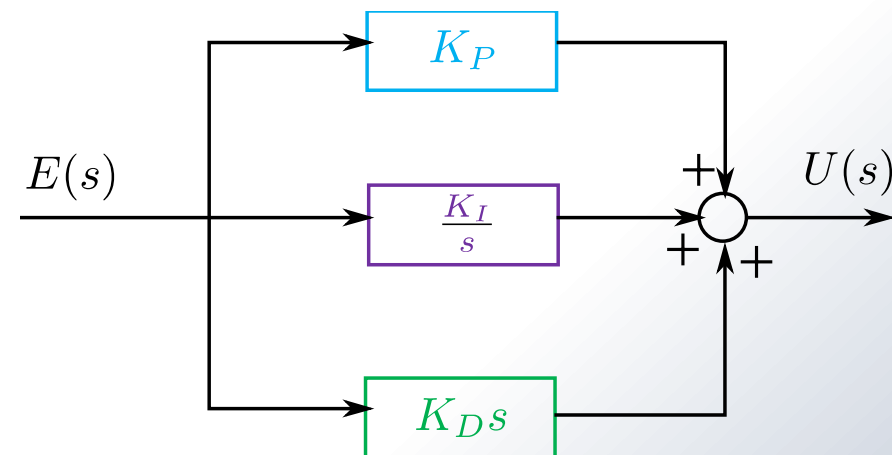
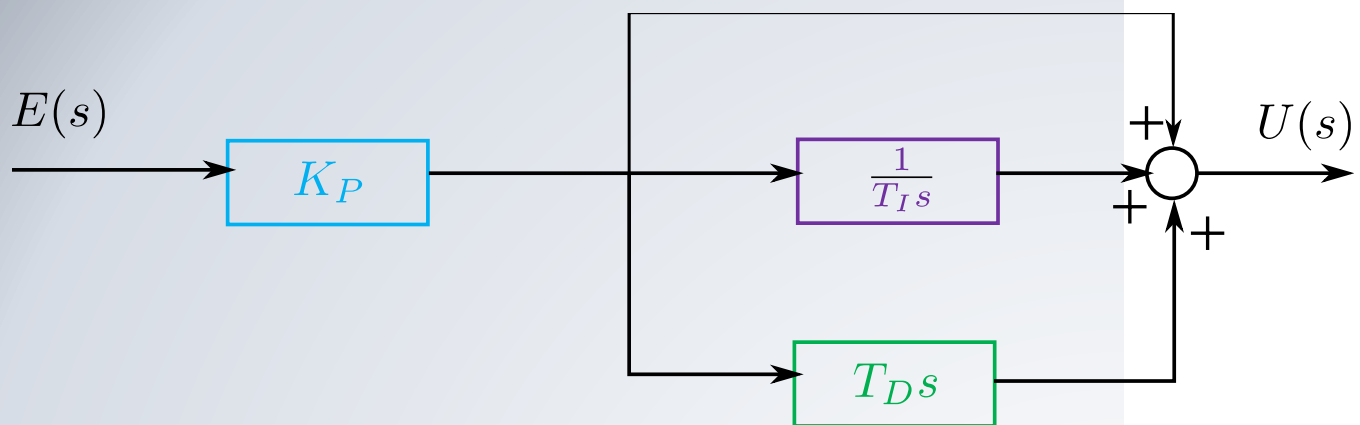
K_d - ganho derivativo

T_i - tempo integral

T_d - tempo derivativo

CONTROLADORES PID

■ Possíveis estruturas para os controladores PID



SINTONIA DE PID UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE POLOS

- O ajuste dos três termos (K_p, K_i, K_d) pode ser realizada utilizando o método algébrico.
- Para estas estruturas pode-se trabalhar com até 3 especificações de projeto.
- Exemplo: Projete um controlador PID para que a planta $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ siga um degrau unitário com erro nulo e tenha $(M_p = 16,3\% \rightarrow \xi = 0,5)$ e $(\omega_n = 2rad/s \rightarrow t_r = 1,2 s)$.

Vamos adotar uma malha de controle padrão e $C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s(s+\alpha)}$. Neste caso temos **5 incógnitas** $(K_p, K_i, K_d, p_1, p_2)$ e **4 equações**.

SINTONIA DE PID UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE POLOS

■ Vamos arbitrar $\alpha = 100$. Assim,

$$(K_d s^2 + K_p s + K_i) + s(s + 100)(s^2 + 3s + 2) = (s + p_1)(s + p_2)(s^2 + 1,2s + 1,44)$$

o que gera as equações:

$$103 = 1,2 + p_1 + p_2 \rightarrow p_1 + p_2 = 101,8$$

$$K_d + 302 = 1,2(p_1 + p_2) + p_1 p_2$$

$$K_p + 200 = 1,44(p_1 + p_2) + 1,2p_1 p_2$$

$$K_i = 1,44p_1 p_2$$

$$\text{Arbitrando } K_i = 360 \rightarrow K_d = 70,16 ; K_p = 246,592 \rightarrow C(s) = \frac{70,16s^2 + 246,592s + 360}{s(s+100)}.$$

SINTONIA DE PID UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE POLOS

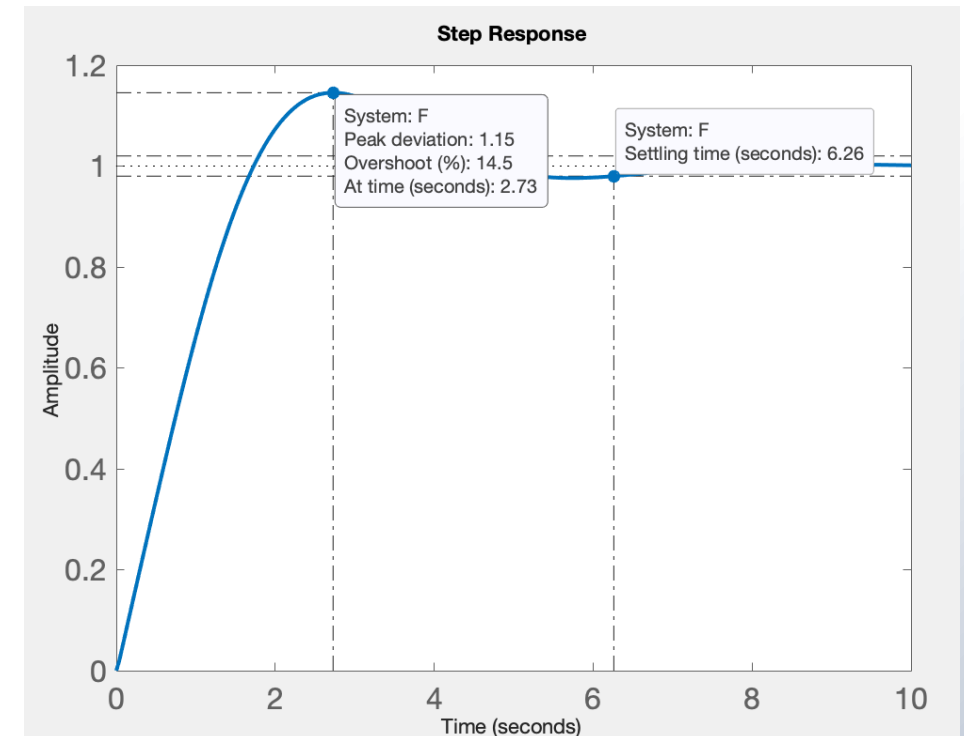
■ O controlador projetado é

$$C(s) = \frac{70,16s^2 + 246,592s + 360}{s(s + 100)}$$

■ Porque os requisitos não foram alcançados?

■ **É necessário realizar ajustes!!!**

■ Sugestões para um projeto melhor?

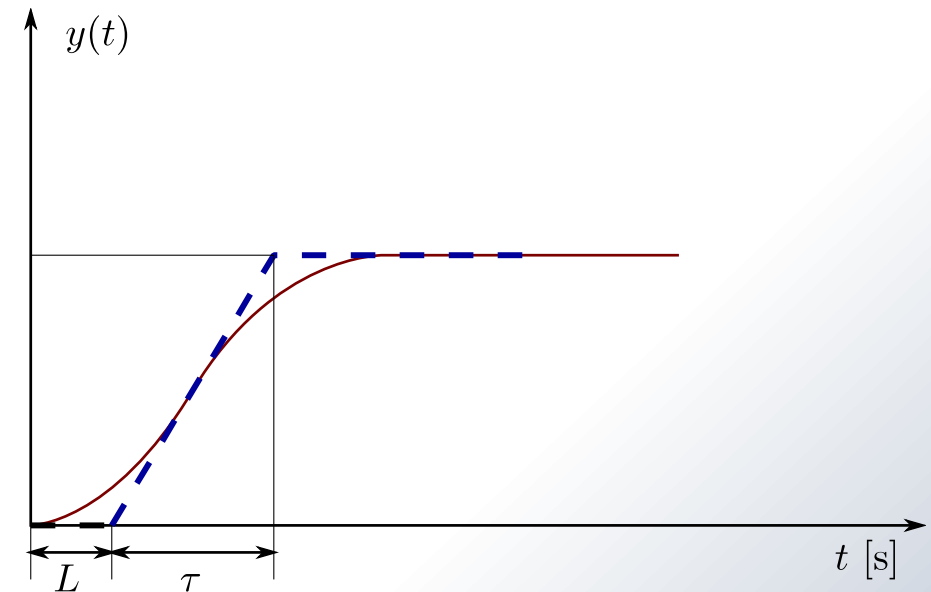


SINTONIA DE PID UTILIZANDO ZIEGLER-NICHOLS

- Método procedural de sintonia de controladores do tipo PID.
- Embora este método, ou variações melhoradas, não garantam que os requisitos sejam atendidos, a facilidade do ajuste deu visibilidade na indústria para os controladores de 3 termos.
- Os parâmetros K_p , K_i , K_d são determinados em função das características da dinâmica do processo.

SINTONIA DE PID UTILIZANDO ZIEGLER-NICHOLS

- Método baseado na resposta ao degrau do processo em MA.
- Aplica-se um **degrau unitário** no processo e verifica-se a saída do sistema.
- Aplicado a sistemas BIBO estáveis (sem polos na origem) sem polos complexo conjugados.
- Deve-se obter os parâmetros L e τ a partir da máxima inclinação da resposta ao degrau. L corresponde ao atraso no tempo. τ corresponde à constante de tempo de 0-100%.



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

SINTONIA DE PID UTILIZANDO ZIEGLER-NICHOLS

■ Método baseado na resposta ao degrau:

CONTROLADOR	K_P	K_I	K_D
P	τ/L		
PI	$0,9\tau/L$	$L/3$	
PID	$1,2\tau/L$	$2L$	$L/2$

■ Deve-se ter em mente que estes valores correspondem ao projeto inicial do controlador pretendido.

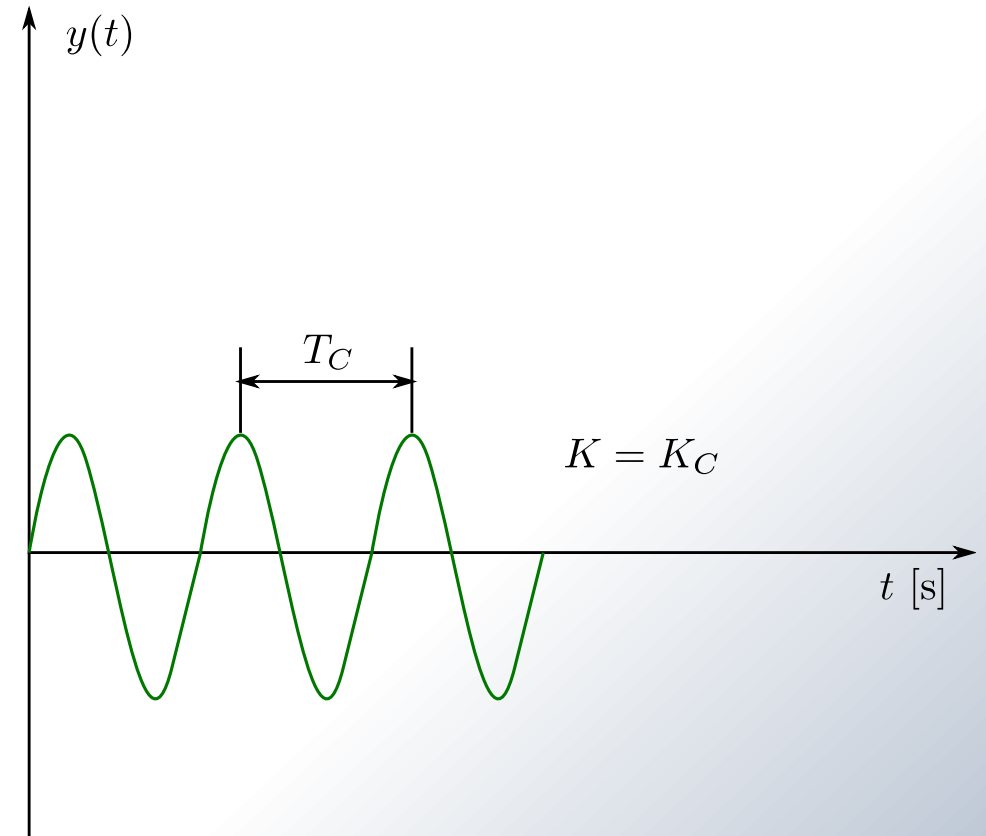
SINTONIA DE PID UTILIZANDO COHEN-COON

■ Para o mesmo ensaio degrau, e parâmetros L e τ , obtém-se os termos do PID segundo

CONTROLADOR	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{\tau}{L} + \frac{1}{3}$		
PI	$0,9\frac{\tau}{L} + \frac{1}{12}$	$3L \frac{\left(10 + \frac{L}{\tau}\right)}{9 + \frac{20L}{\tau}}$	
PD	$1,25\frac{\tau}{L} + \frac{1}{6}$		$2L \frac{3 - \frac{L}{\tau}}{11 + 2\frac{L}{\tau}}$
PID	$\frac{3\tau}{4L} + \frac{1}{4}$	$L \frac{32 + 6\frac{L}{\tau}}{13 + 8\frac{L}{\tau}}$	$4L \frac{1}{11 + 2\frac{L}{\tau}}$

SINTONIA DE PID UTILIZANDO ZIEGLER-NICHOLS

- Método baseado na resposta oscilatória do sistema.
 - Aplica-se um degrau na entrada do sistema em MALHA FECHADA com um controlador PROPORCIONAL. **Deve-se variar K_P** até que a resposta seja **oscilatória com amplitude constante**.
 - Deve-se obter os parâmetros K_C correspondente ao ganho que gerou a resposta oscilatória e T_C o período de oscilação.



SINTONIA DE PID UTILIZANDO ZIEGLER-NICHOLS

- Método baseado na resposta oscilatória do sistema:

CONTROLADOR	K_P	K_I	K_D
P	$0,5K_C$		
PI	$0,45K_C$	$T_C/1,2$	
PID	$0,6K_C$	$0,5T_C$	$0,125T_C$

- Novamente, deve-se ter em mente que estes valores correspondem ao projeto inicial do controlador pretendido.

EXEMPLO DE SINTONIA DE PID

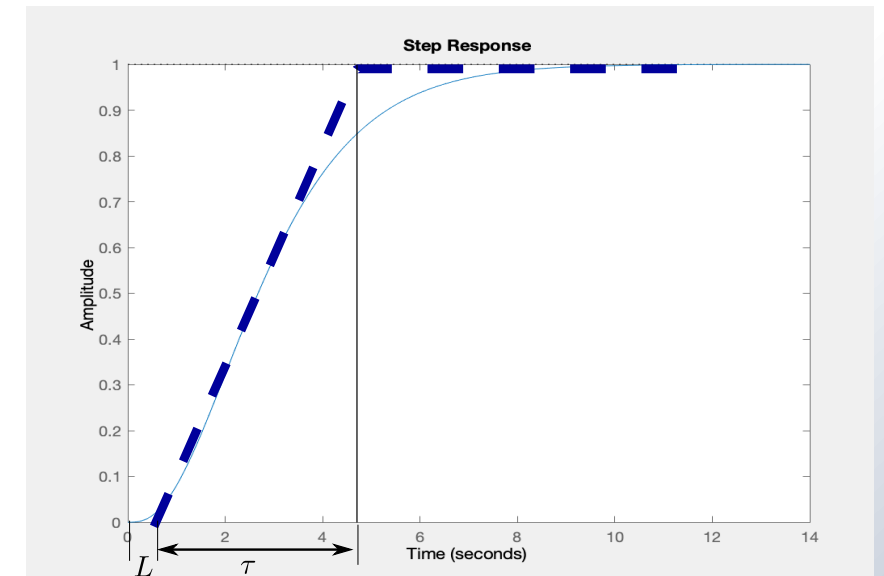
■ Para o processo

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

Teremos os valores de $L = 0,5$ e $\tau \approx 4$.

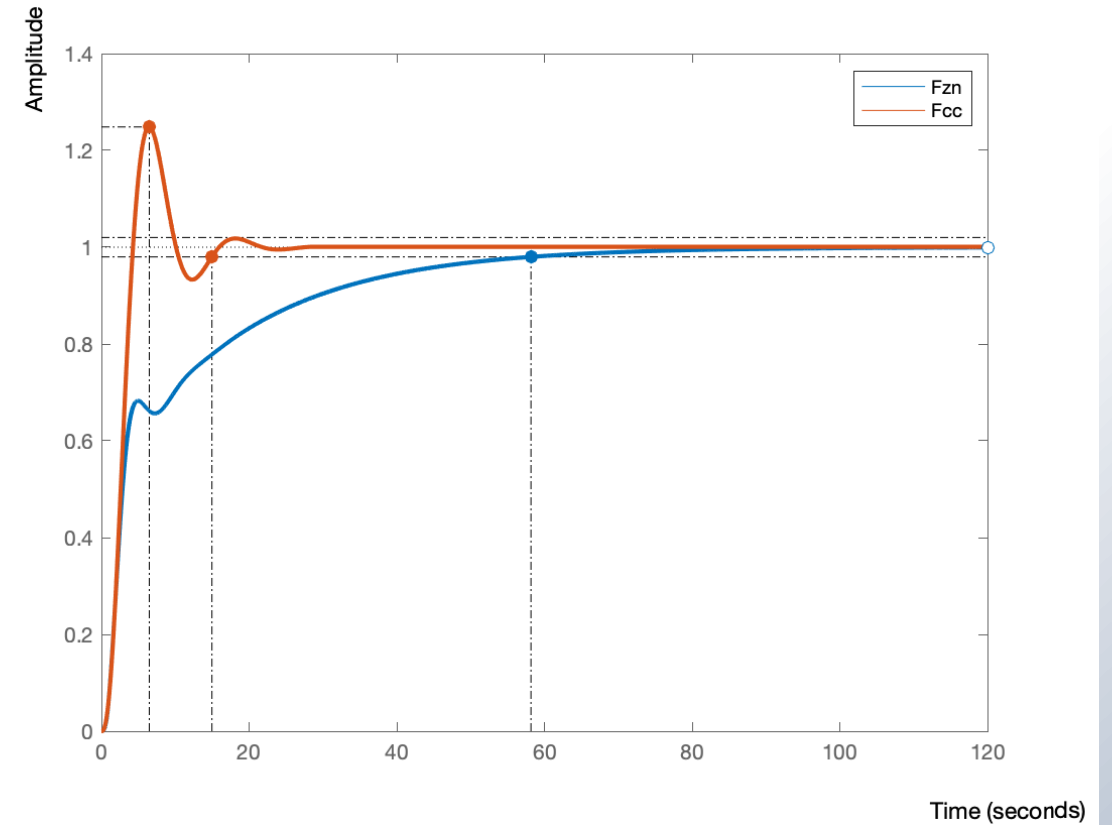
$$C_{ZN}(s) = \frac{0,25s^2 + 9,6s + 1}{s(s + 10)}$$

$$C_{CC}(s) = \frac{1,11s^2 + 6,25s + 5,34}{s(s + 10)}$$



EXEMPLO DE SINTONIA DE PID

- Para o sistema considerado as respostas em malha fechada são apresentadas ao lado.

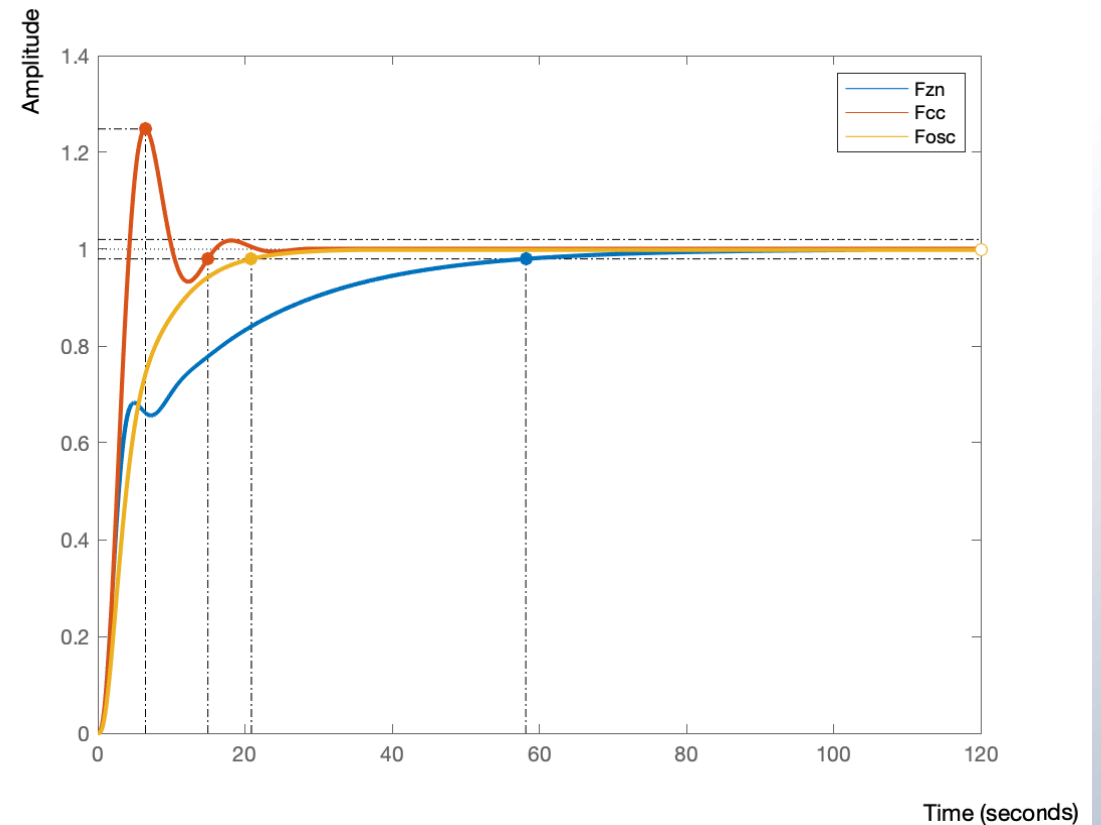


EXEMPLO DE SINTONIA DE PID

- Para o caso da resposta oscilatória, devemos considerar o sistema realimentado e controlado por um único ganho.

$$K_c = 8; T_c = 3,63$$

$$C_{osc} = \frac{1,11s^2 + 4,8s + 0,45}{s(s + 10)}$$



CONTROLADORES PID

■ Controladores PID

■ Controladores P

■ Controladores PI

■ Controladores PD

■ Controladores PID

FÁCIL IMPLEMENTAÇÃO

Tornam o sistema **ROBUSTO A PERTURBAÇÕES DE BAIXA FREQUENCIA**

REDUZEM o ERRO em regime

AUMENTAM O TEMPO de estabilização

SUAVIZAM VARIAÇÕES BRUSCAS no sinal de erro

REDUZEM O TEMPO de estabilização

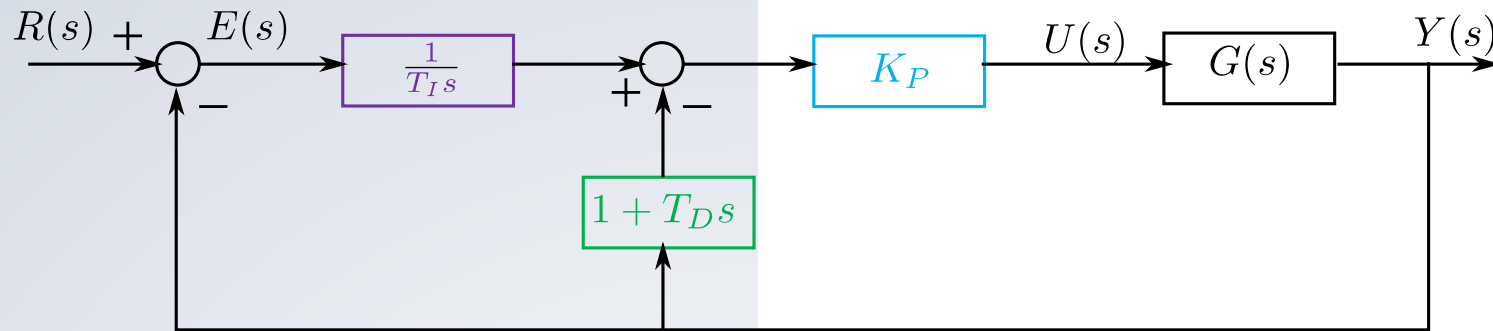
AUMENTAM o ERRO em regime

SINTONIA NÃO TRIVIAL com métodos de tentativa e erro

REDUZEM O ERRO em regime, **SUAVIZANDO** variações bruscas

CONTROLADORES PID

■ Para sinais de referência com variações bruscas, adota-se a estrutura

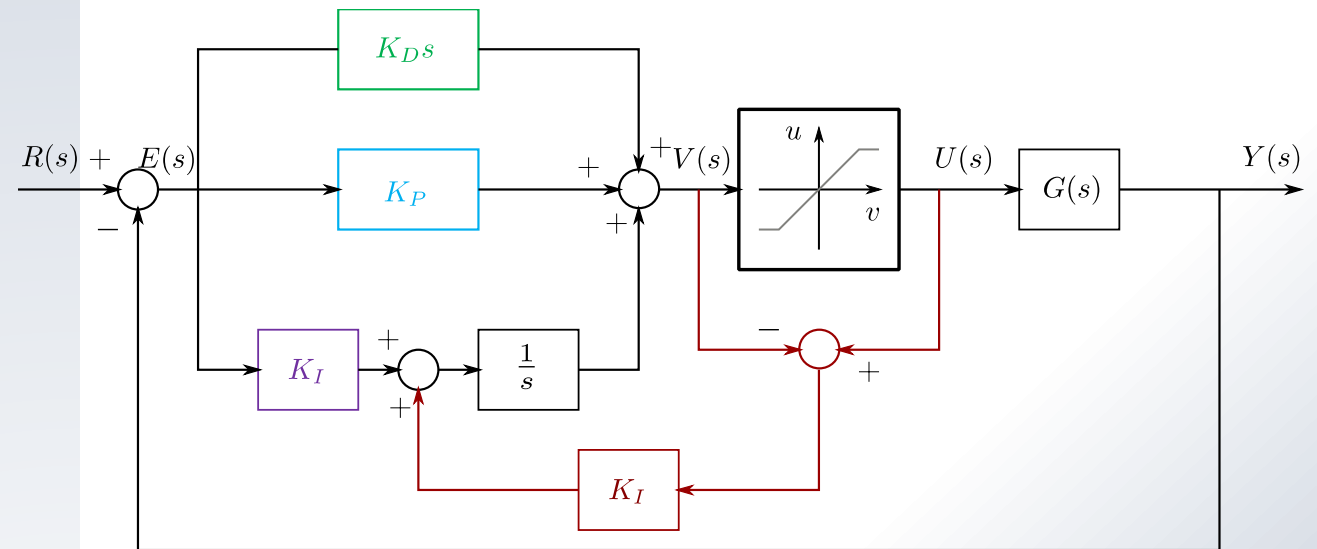


$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \underbrace{\frac{1}{1 + T_I s + T_I T_D s^2}}_{\text{PRÉ-FILTRO}} \frac{K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) G(s)}{1 + K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) G(s)}$$

PRÉ-FILTRO

ANTI-WINDUP

- Integradores na malha de controle podem provocar saturação do atuador caso exista erro residual no sinal de erro por longos períodos.
- Este potencial problema é conhecido como *windup*, que pode ser eliminado
 - utilizando-se um sinal adicional na entrada do integrador ou
 - interrompendo a ação integral quando o controlador atinge o limiar de saturação.



MATERIAL ADICIONAL

■ Leituras:

- Leitura Complementar 03 (Tipos de Controladores)
- Leitura Complementar 06 (Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz)

■ Vídeos:

- 03: Estabilidade de Sistemas Dinâmicos
- 04: Critério de Routh-Hurwitz

PRÓXIMA AULA

- Lugar geométrico das raízes

