

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 27/12/2024.

EES22 CONTROLE CLÁSSICO I

Lugar Geométrico das Raízes. Sensibilidade. Efeito de
Polos e Zeros Adisiconais.



ASSUNTOS

- Lugar geométrico das raízes
- Realimentação positiva
- Tipo do sistema
- Sensibilidade
- Efeito de polos e zeros adicionais



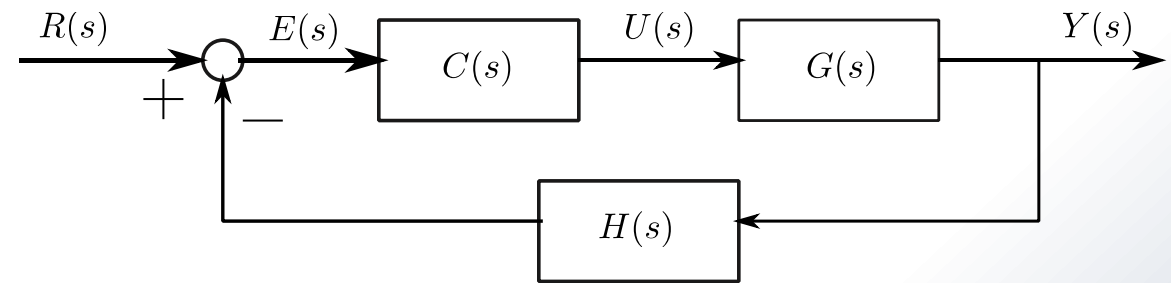
SERVOMECANISMO DE POSIÇÃO

- Seja um sistema realimentado segundo a figura ao lado. Desejamos analisar a estabilidade dos polos de

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}$$

- Vamos considerar que a nossa planta é um servomecanismo de posição com

$$G(s) = \frac{11,5}{s(s + 2)}; \quad C(s) = \kappa; \quad H(s) = \frac{1}{s + 1}$$



SERVOMECANISMO DE POSIÇÃO

■ Assim,

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} = \frac{\kappa \frac{11,5}{s(s+2)}}{1 + \kappa \frac{11,5}{s(s+1)(s+2)}}$$

■ Devemos avaliar

$$1 + H(s)C(s)G(s) = 1 + \kappa \underbrace{\frac{11,5}{s(s+1)(s+2)}}_{\bar{G}(s)} = 0 \Rightarrow 1 + \kappa \bar{G}(s) = 0$$

SERVOMECANISMO DE POSIÇÃO

■ Aplicando ROUTH-HURWITZ, temos a seguinte análise para a escolha de κ

$\kappa \leq 0 \quad \Rightarrow \text{Sistema } \textbf{INSTÁVEL}$

$0 < \kappa < \frac{12}{23} \quad \Rightarrow \text{Sistema } \textbf{ESTÁVEL}$

$\kappa \geq 12/23 \quad \Rightarrow \text{Sistema } \textbf{INSTÁVEL}$

SERVOMECANISMO DE POSIÇÃO

■ Vamos tomar então 3 diferentes valores de $\kappa = \{0,2; 0,4; 0,6\}$

$$\kappa = 0,2$$

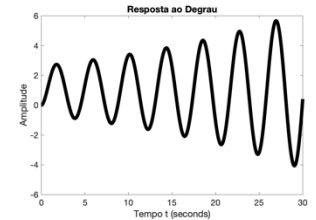
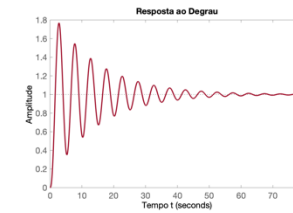
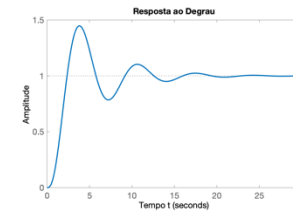
- $p_1 = -2,57$
- $p_2 = -0,215 + 0,9213j$
- $p_3 = -0,215 - 0,9213j$

$$\kappa = 0,4$$

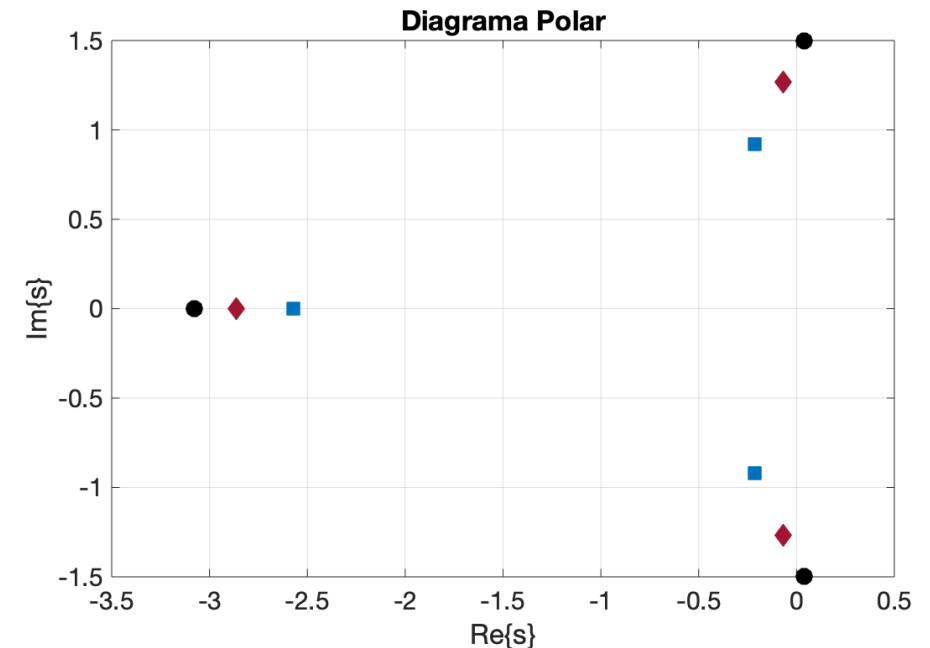
- $p_1 = -2,8627$
- $p_2 = -0,0687 + 1,2658j$
- $p_3 = -0,0687 - 1,2658j$

$$\kappa = 0,6$$

- $p_1 = -3,0784$
- $p_2 = 0,0392 + 1,4966j$
- $p_3 = 0,0392 - 1,4966j$



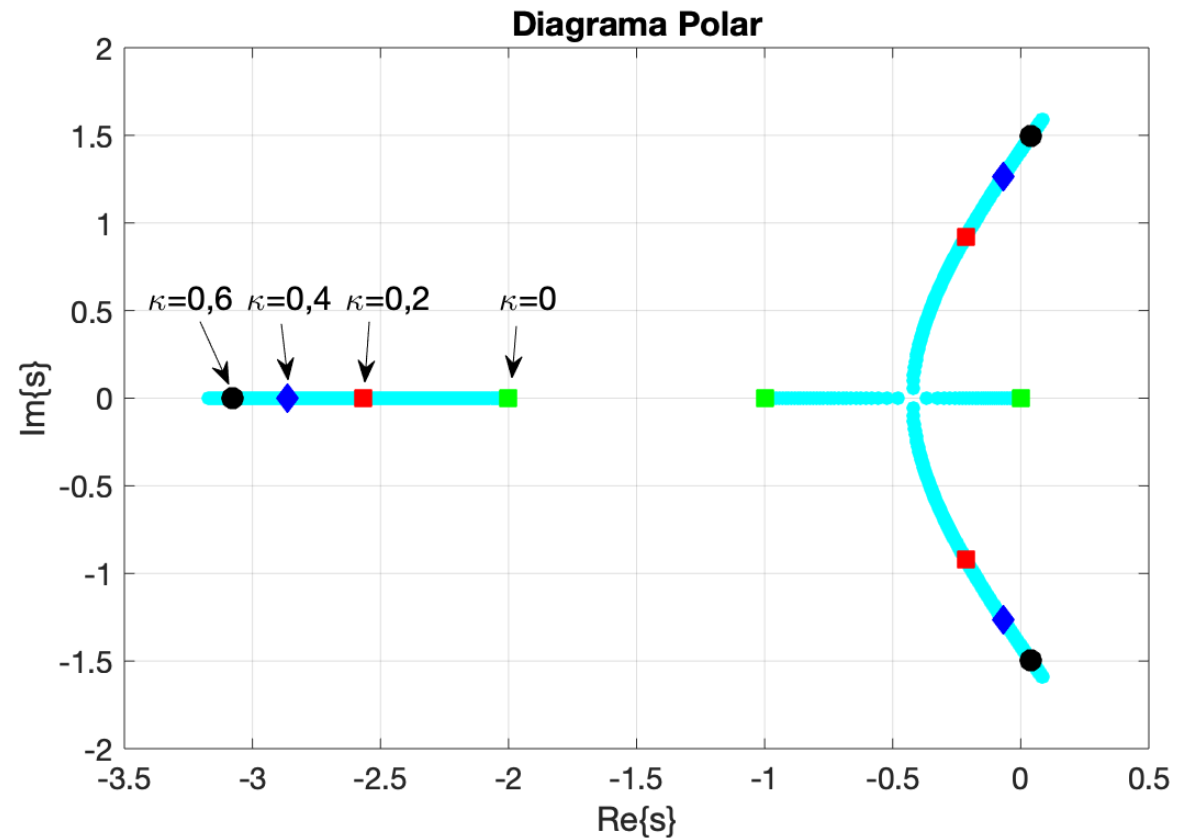
$$\frac{12}{23} = 0,52 \quad \uparrow$$



SERVOMECANISMO DE POSIÇÃO

■ Melhorando o gráfico:

$$\kappa = \{0 ; 0,01 ; 0,02 ; \dots ; 0,70\}$$



LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

O LGR é o mapeamento de $1 + \kappa \bar{G}(s) = 0$ para quando variamos o parâmetro $\kappa \geq 0$.

REGRAS PARA CONSTRUÇÃO DO LGR

- Análise da equação característica:

$$1 + \kappa \bar{G}(s) = 0 \Rightarrow \bar{G}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\kappa}$$

- O polinômio numerador:

$$N(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

- O polinômio denominador:

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$$

- Assim, teremos $\bar{G}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i| e^{j\psi_i}}{\prod_{i=1}^n |s - p_i| e^{j\phi_i}}$

REGRAS PARA CONSTRUÇÃO DO LGR

CONDIÇÃO DE MÓDULO

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{\kappa}$$

CONDIÇÃO DE FASE

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^n \phi_i = (2K + 1)\pi, K \in \mathbb{N}$$

REGRAS PARA CONSTRUÇÃO DO LGR

REGRA 1: m ramos do LGR começam nos polos de $\bar{G}(s)$ e terminam em seus m zeros, com $n \geq m$.

REGRA 2: $n - m$ ramos do LGR tendem para ∞ de forma assintótica a $n - m$ retas, sendo

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad \theta_K = \frac{2K - 1}{n - m} \pi, K = 1, 2, \dots, n - m$$

σ é o coeficiente linear e θ_K , o coeficiente angular das assíntotas.

REGRA 3: Todos os pontos do eixo real À ESQUERDA de uma quantidade ÍMPAR de polos e zeros pertencem ao LGR.

REGRAS PARA CONSTRUÇÃO DO LGR

REGRA 4: O LGR é SIMÉTRICO em relação ao EIXO REAL. O cruzamento de seus ramos com o eixo imaginário pode ser obtido por Routh-Hurwitz.

REGRA 5: O CRUZAMENTO DE RAMOS do LGR pode ser obtido fazendo

$$D(s)'N(s) - N(s)'D(s) = 0$$

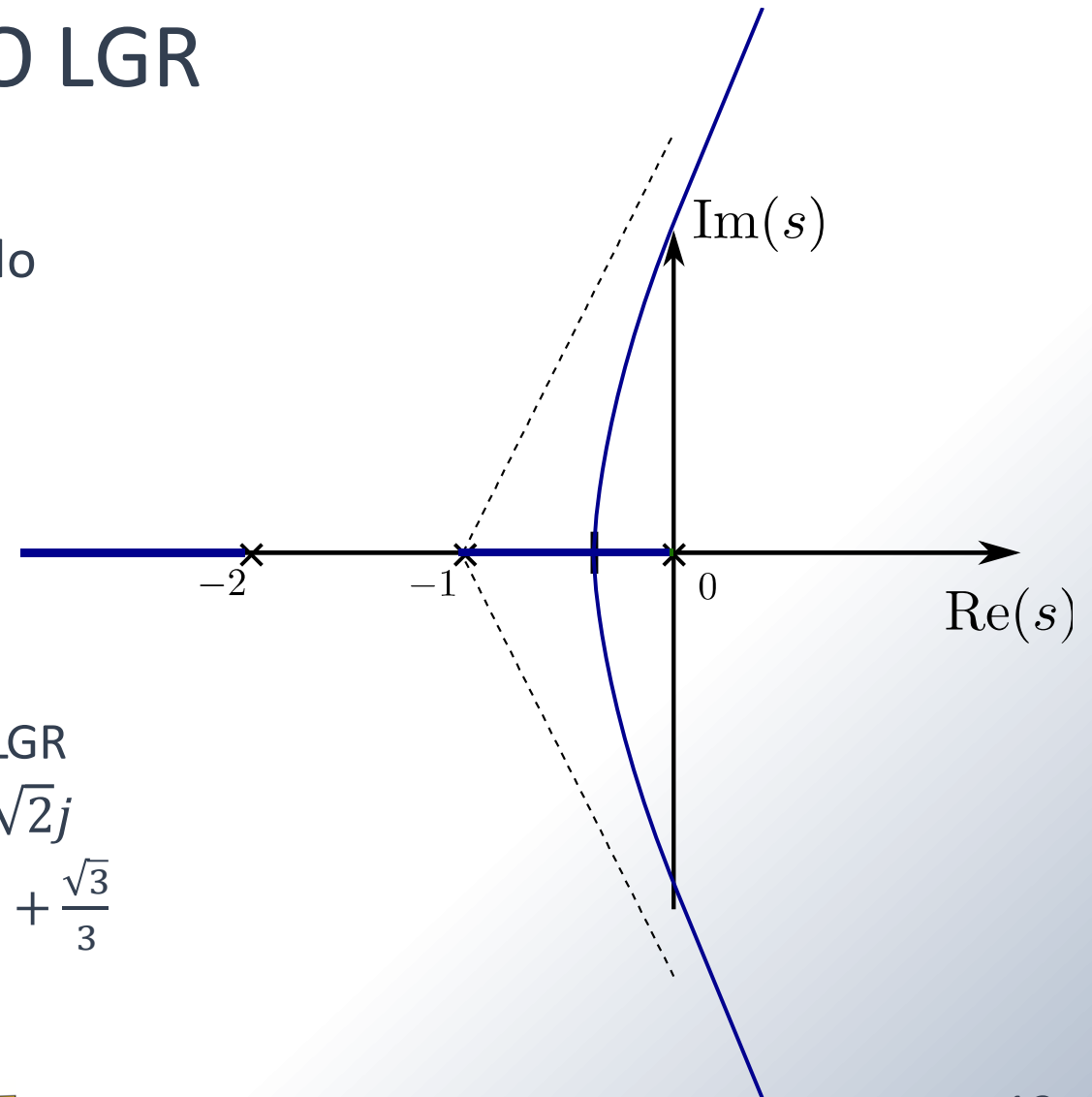
REGRA 6: ANGULOS DE SAÍDA E CHEGADA do LGR podem ser determinados através da CONDIÇÃO DE ÂNGULO.

REGRAS PARA CONSTRUÇÃO DO LGR

■ Vamos aplicar as regras de construção no exemplo anterior:

$$\overline{G}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

- R1: 3 polos $s = 0; s = -1; s = -2$.
- R2: 3 assíntotas: $\sigma = -1, \theta_K = \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{6}\right\}$
- R3: $\Re(s) < -2$ e $0 > \Re(s) > -1$ pertencem ao LGR
- R4: O cruzamento ocorre em $\kappa = 12/23$ e $s = \pm\sqrt{2}j$
- R5: O cruzamento entre ramos ocorre em $s = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
- R6: O ângulo de saída dos polos é 0 e π .



EXERCÍCIOS SOBRE LGR

■ Esboce o LGR para as seguintes equações características

$$1. \quad 1 + \frac{\kappa(s+1)}{s(s+2)} = 0$$

$$2. \quad 1 + \frac{\kappa(s+2)}{s^2+4s+13} = 0$$

$$3. \quad 1 + \frac{\kappa(s+4)(s+3)}{(s+1)(s+2)} = 0$$

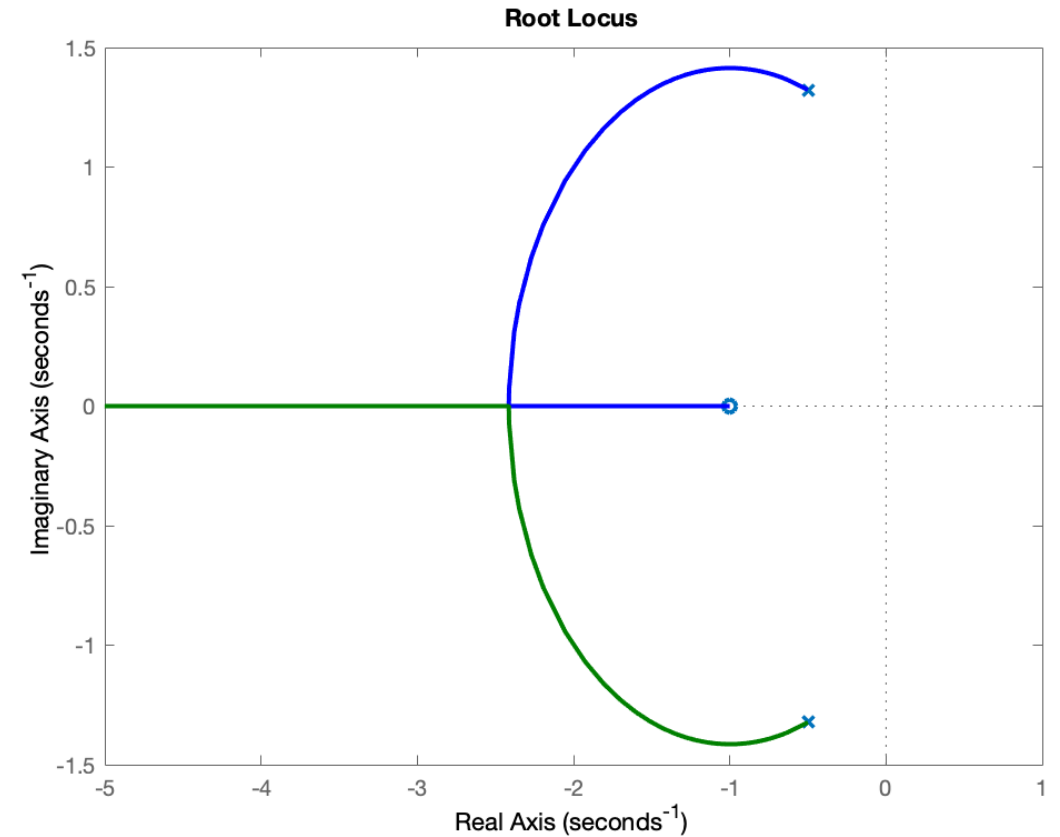
LGR GENERALIZADO

- Determine o valor da constante p que faz com que o coeficiente de amortecimento de malha fechada seja de 0,45.

$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)(s + p) + 2}$$

Neste caso, reescrevemos:

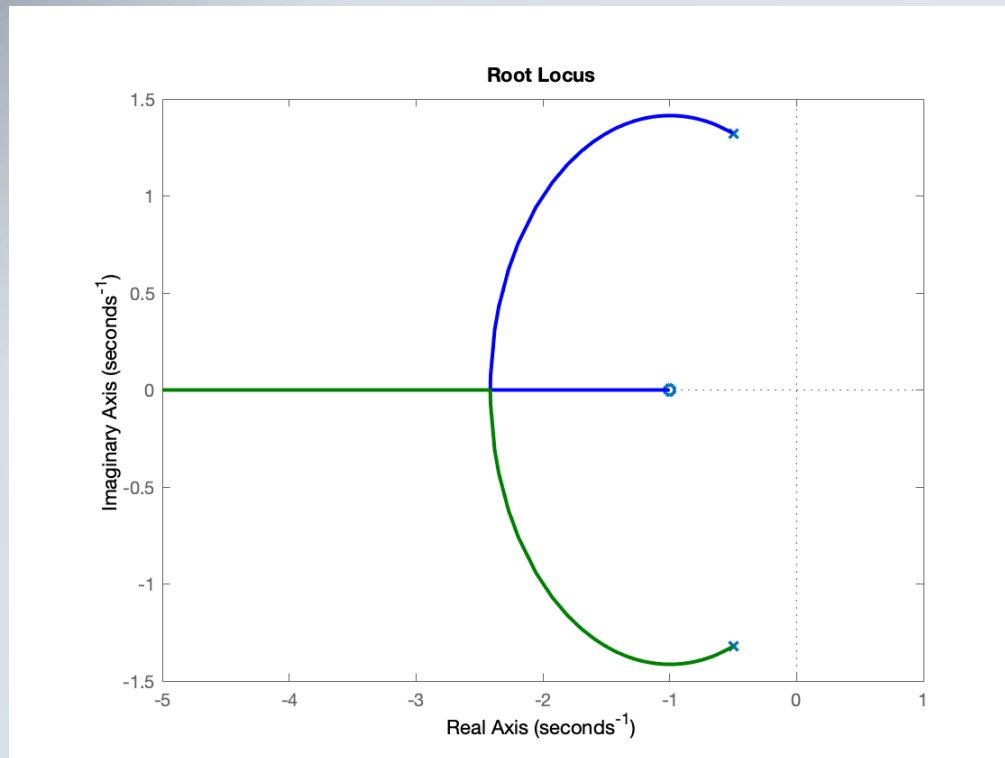
$$1 + p \frac{s + 1}{s^2 + s + 2} = 0$$



LGR GENERALIZADO

- R1: $z = -1; p = -0.5 \pm \sqrt{7}/2j$
- R2: 1 assíntota em $\sigma = 0$ e $\theta_K = \pi$
- R3: pontos de $Im(s) = 0$ à esquerda do zero, pertencem ao LGR
- R4: Routh-Hurwitz, não há cruzamento com o eixo imaginário
- R5: Cruzamento de ramos em: $-1 - \sqrt{2}$
- R6: ângulo de saída: $\alpha = 160^\circ$

LGR GENERALIZADO



■ Para este sistema, deseja-se determinar p que atenda ao seguinte requisito de projeto:

■ Maior tempo de estabilização possível.

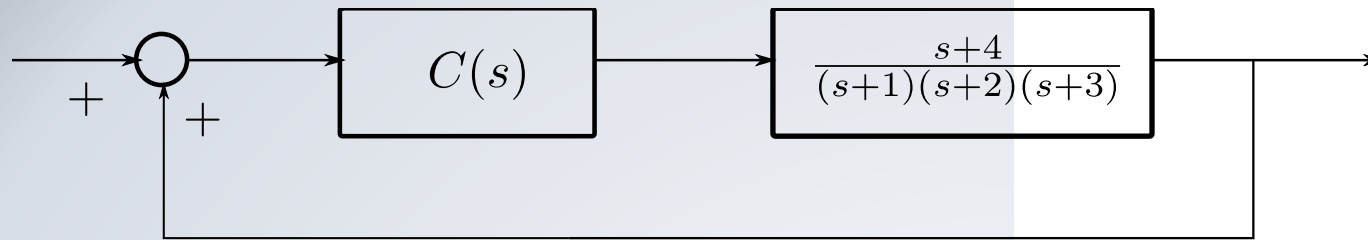
Encontro dos ramos.

■ Para $\xi = 0.7071$

$$s^2 + (1 + p)s + (2 + p) = 0$$
$$p = \sqrt{3}$$

REALIMENTAÇÃO POSITIVA

- Desejamos estudar a estabilidade e projetar um controlador adequado para a seguinte malha de controle:



A função de transferência resultante, para $C(s) = \kappa$, é

$$F(s) = \frac{\kappa(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3) - \kappa(s + 4)}$$

São utilizados, por exemplo, em

Projeto de Osciladores

Aumento do ganho

Tende a instabilizar o sistema

REALIMENTAÇÃO POSITIVA

- A equação característica é dada por

$$1 - \frac{\kappa(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0 \Rightarrow \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{\kappa}$$

- Neste caso, é evidente que

Condição de módulo: INALTERADA!

Condição de fase:

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^m \phi_i = (2K)\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

REALIMENTAÇÃO POSITIVA

■ Alteram-se somente às regras relacionadas à condição de fase. São elas:

REGRA 2: $n - m$ assíntotas possuem

- COEFICIENTE LINEAR: $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$
- COEFICIENTE ANGULAR: $\theta_K = \frac{2K\pi}{n - m}, K = 1, 2, \dots, n - m$

REGRA 3: Pertencem ao LGR pontos do eixo $\Re(s)$ que estão à esquerda de um número par de polos e zeros.

REGRA 6: Os ângulos de partida dos polos de $\overline{G}(s)$ e de chegada nos zeros de $\overline{G}(s)$ são obtidos a partir da condição de fase.

REALIMENTAÇÃO POSITIVA

■ Equação característica: $1 - \frac{\kappa(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$

$$s^3 + 6s^2 + (11 - \kappa)s + 6 - 4\kappa = 0$$

- R1: $p_1 = -1; p_2 = -2; p_3 = -3; z_1 = -4$

- R2: $\sigma = -1; \theta_K = \pi; 2\pi$

- R3: $s^3 \begin{vmatrix} 1 & 11 - \kappa \end{vmatrix}$

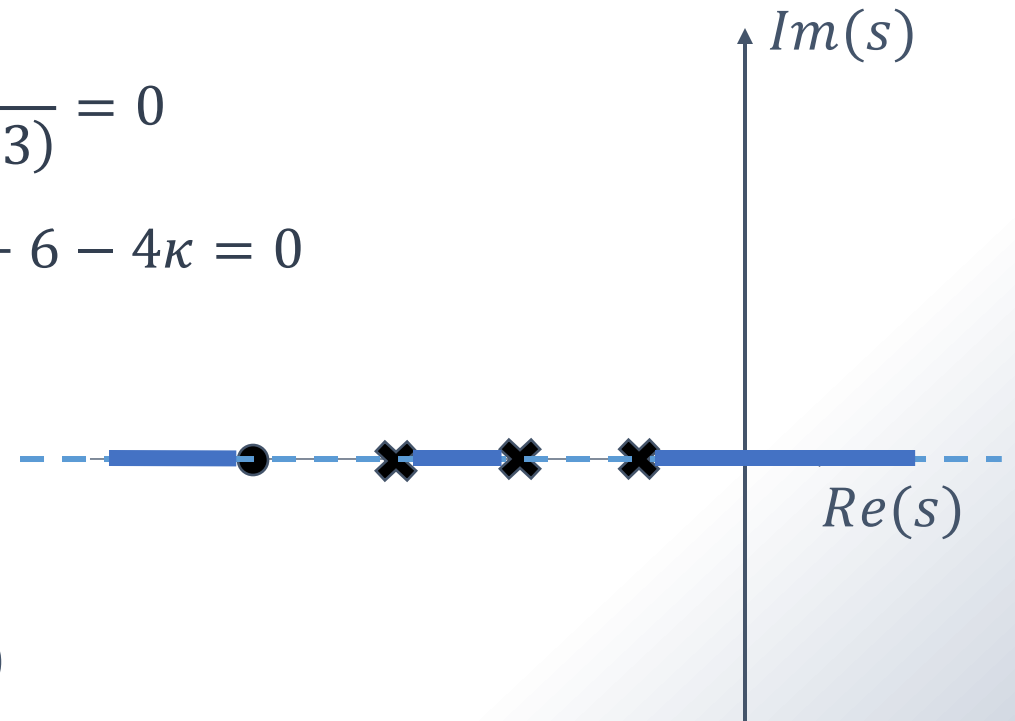
- R4: $s^2 \begin{vmatrix} 6 & 6 - 4\kappa \end{vmatrix}$

$$s \begin{vmatrix} 60 - 2\kappa \end{vmatrix}$$

$$1 \begin{vmatrix} 6 - 4\kappa \end{vmatrix}$$

$$\kappa < \frac{3}{2}; \kappa < 30$$

$\kappa = 3/2$ faz o LGR cruzar o eixo $Im(s)$



REALIMENTAÇÃO POSITIVA

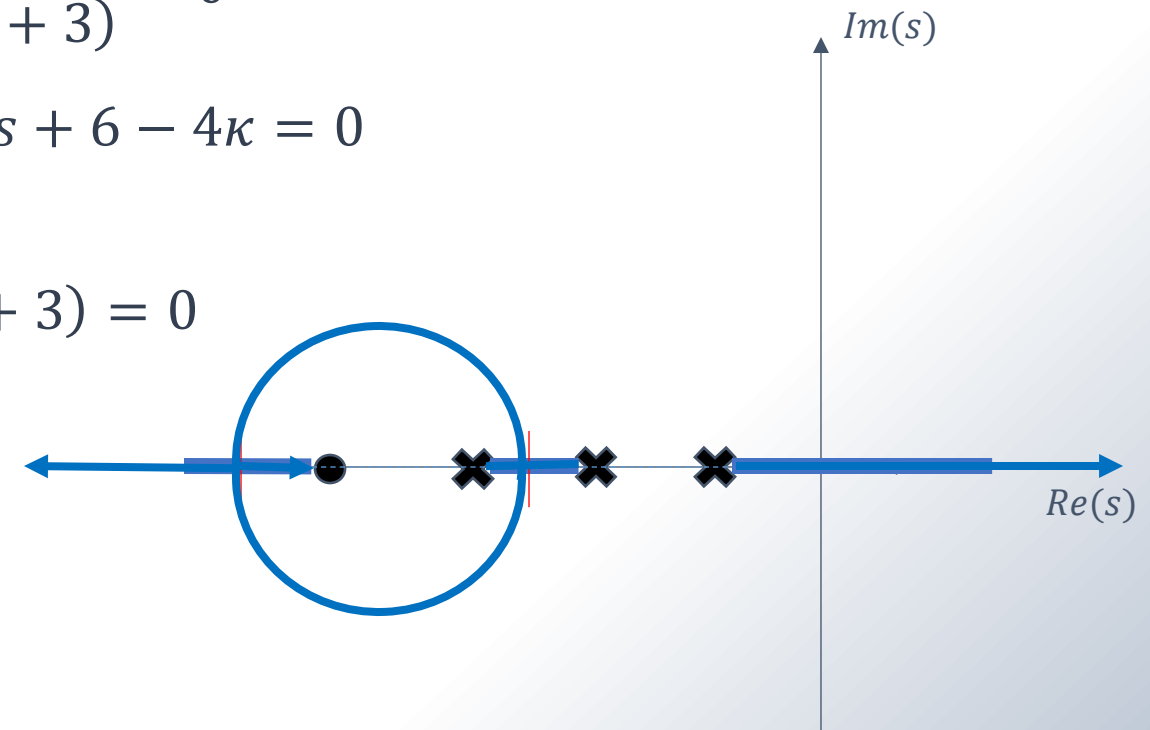
■ Equação característica: $1 - \frac{\kappa(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$

$$s^3 + 6s^2 + (11 - \kappa)s + 6 - 4\kappa = 0$$

- R5 : $D(s)'N(s) - N(s)'D(s) = 0 \rightarrow$
 $(3s^2 + 2s + 11)(s+4) - (s^2 + 3s + 2)(s+3) = 0$

$$2s^3 + 18s^2 + 48s + 38 = 0 \Rightarrow$$
$$s_1 = -4.8794;$$
$$s_2 = -2.6527; s_3 = -1.4679$$

- R6 : Ângulos de saída e chega: 0° e 180°



REALIMENTAÇÃO POSITIVA

- Note que a malha de controle instabiliza o sistema, que em malha aberta é estável.
- Assim, para $0 < \kappa < 3/2$ tem-se que o sistema é ESTÁVEL.
- MATLAB (rlocus, sisotool)
 - Como utilizar o MATLAB para realimentação positiva.
 - Qual os limites para o tempo de estabilização?
 - O sistema possui overshoot significativo para qualquer $K > 0$? Porque?

TIPO DO SISTEMA

- Um sistema dinâmico a tempo contínuo com k polos na origem, $p_i = 0$, com multiplicidade k , é dito ser um **SISTEMA DO TIPO k** .
- Analogamente, uma FT com k polos na origem é dita ser uma FT do tipo k .
- O tipo do sistema está diretamente relacionado com o **erro em regime permanente**. De fato,

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$$

$$Y(s) = F(s)R(s)$$

sendo,

$F(s)$ a função de transferência (FT) de malha fechada (MF)

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, a saída do sistema

$R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$, o sinal de referência

ERRO EM REGIME PERMANENTE

■ Para um sistema estável, $F(s)$ de tipo 0, é fácil ver que

$$\begin{aligned} r(t) = \delta(t) \Rightarrow e_{\infty} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - F(s)R(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)(1 - F(s)) = 0 \end{aligned}$$

■ Para outras entradas do tipo $R(s) = 1/s^k$, $k = 1, 2, \dots$, como o sistema se comportará?

■ Seja uma FT de MF (estável) do tipo

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}, C(s)G(s) = \frac{T(s)}{s^{\ell}}$$

$T(s)$ do tipo 0.

ERRO EM REGIME PERMANENTE

■ De uma forma geral esta análise pode ser reescrita como

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) \frac{1}{s^k} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{1 + K_0}, & k = 1 \\ \frac{1}{K_{k-1}}, & k \geq 2 \end{cases}$$

sendo

$$K_{k-1} = \lim_{s \rightarrow 0} s^{k-1} C(s)G(s) = \begin{cases} \pm \infty, & 1 \leq k \leq \ell \\ \text{valor finito}, & k = \ell + 1 \\ 0, & k \geq \ell + 2 \end{cases}$$

CONSTANTES DE INTERESSE:

$K_0 = K_p \rightarrow$ **CONSTANTE DE POSIÇÃO**

$K_1 = K_v \rightarrow$ **CONSTANTE DE VELOCIDADE**

$K_2 = K_a \rightarrow$ **CONSTANTE DE ACELERAÇÃO**

SENSIBILIDADE DE SISTEMAS

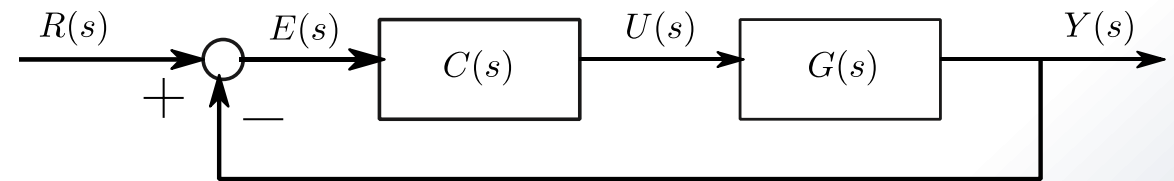
■ Realimentação Negativa → Aumento da

ROBUSTEZ DO SISTEMA.

■ Quando projetamos um determinado sistema de malha fechada, **como a resposta deste sistema se comporta para variações do parâmetro projetado?** Para responder a esta pergunta é necessário avaliarmos a sensibilidade do sistema.

■ Para analisar este requisito de desempenho do sistema, vamos considerar o seguinte sistema em MF.

Em que está pautada esta **AFIRMAÇÃO?**



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s)$$

SENSIBILIDADE DE SISTEMAS

■ **SENSIBILIDADE** é a razão entre a variação percentual de uma função pela variação percentual de um parâmetro.

■ Assim, a sensibilidade do sistema a variações na planta é, por definição,

$$S(s) = \frac{\Delta Y(s)/Y(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \xrightarrow{\text{pequenas variações}} S(s) = \frac{\partial Y(s)/Y(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{\partial \ln Y(s)}{\partial \ln G(s)}$$

■ Sendo o sistema linear uma variação $G(s) + \Delta G(s)$ produzirá uma variação na saída de $\Delta Y(s) = \Delta G(s)U(s)$

■ Assim, para o sistema em malha aberta, teremos

$$S(s) = 1$$

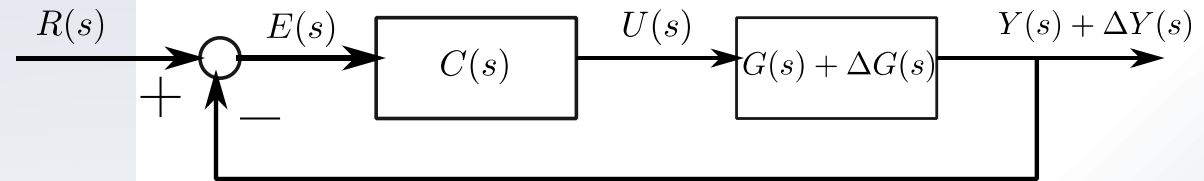
Variações na planta são diretamente sentidas no sinal de saída da planta em MA.

SENSIBILIDADE DE SISTEMAS

- Para o sistema em MF, para uma variação $G(s) + \Delta G(s)$, sendo $\Delta G(s)$ pequeno, teremos

$$\Delta Y(s) \approx \frac{C(s)\Delta G(s)}{[1 + C(s)G(s)]^2} R(s)$$

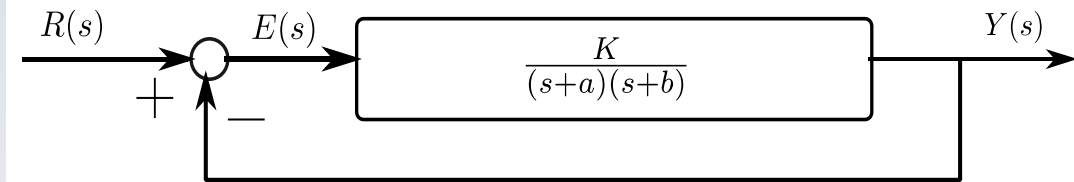
$$\mathcal{S}(s) = \frac{\partial F(s)}{\partial G(s)} \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$



- **A sensibilidade do sistema em MF para variações na planta pode ser alterada com o projeto de um CONTROLADOR ADEQUADO.**
- E se desejarmos estudar a sensibilidade do sistema em relação a um **parâmetro α** qualquer da planta ou do controlador?

PROJETO USANDO SENSIBILIDADE

■ Seja o sistema



com FT de MF

$$F(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b) + K}$$

■ A sensibilidade do do erro em regime para uma entrada degrau, para este sistema, em função do parâmetro a é

Qual valor de K devemos escolher?

$$e_{\infty} = \frac{ab}{ab + K} \Rightarrow \mathcal{S}(s) = \frac{a}{e_{\infty}} \frac{\partial e_{\infty}}{\partial a} = \frac{ab + K}{b} \frac{(ab + K)b - ab^2}{(ab + K)^2} = \frac{K}{ab + K}$$

EFEITO DE POLOS E ZEROS ADICIONAIS

- Os requisitos de projeto estudados são **válidos** para sistemas de **PRIMEIRA e SEGUNDA ORDEM NO FORMATO PADRÃO DA FT.**
- Para sistemas com polos e zeros adicionais estes requisitos **servem apenas como diretriz para ajustes** no projeto.

EFEITO DE ZEROS ADICIONAIS

■ Os zeros na FT são responsáveis por atribuir pesos aos polos, ou seja, aos termos exponenciais da resposta do sistema a determinada entrada.

■ Exemplo: Seja a função de transferência com dois polos

$$G(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{s+6}{(s+2)(s+3)} = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3}$$

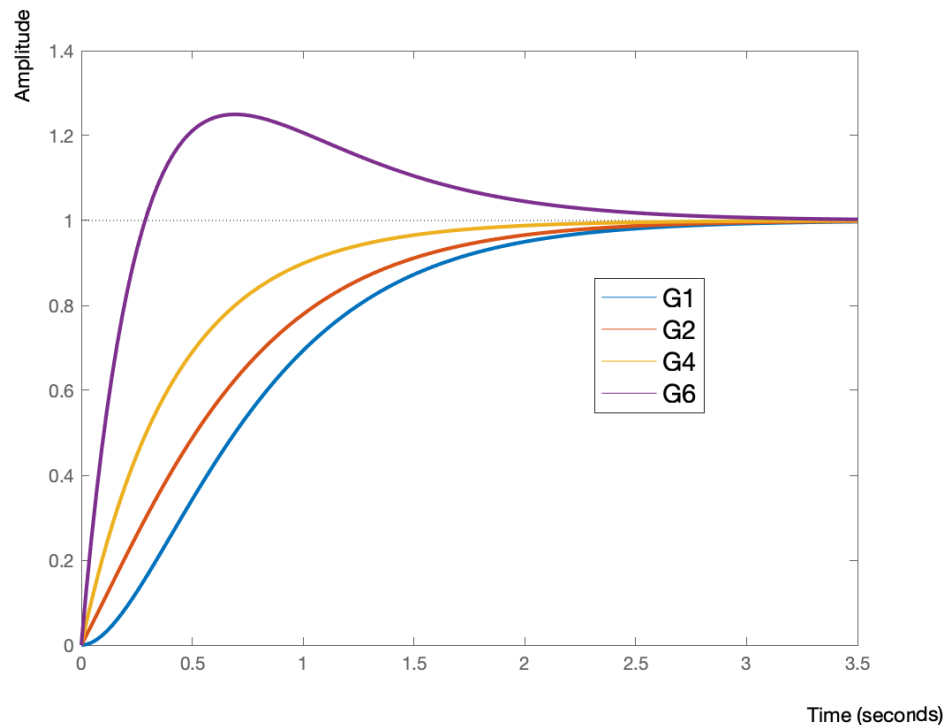
$$G(s) = \frac{(s+1,8)}{0,3(s+2)(s+3)} = -\frac{0,67}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{12(s+2,5)}{5(s+2)(s+3)} = \frac{1,2}{s+2} + \frac{1,2}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{2(s+2,7)}{0,9(s+2)(s+3)} = \frac{1,55}{s+2} + \frac{0,67}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{6(s+1)}{(s+2)(s+3)} = -\frac{6}{s+2} + \frac{12}{s+3}$$

EFEITO DE ZEROS ADICIONAIS



$$G1(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

$$G2(s) = \frac{s+6}{(s+2)(s+3)} = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3}$$

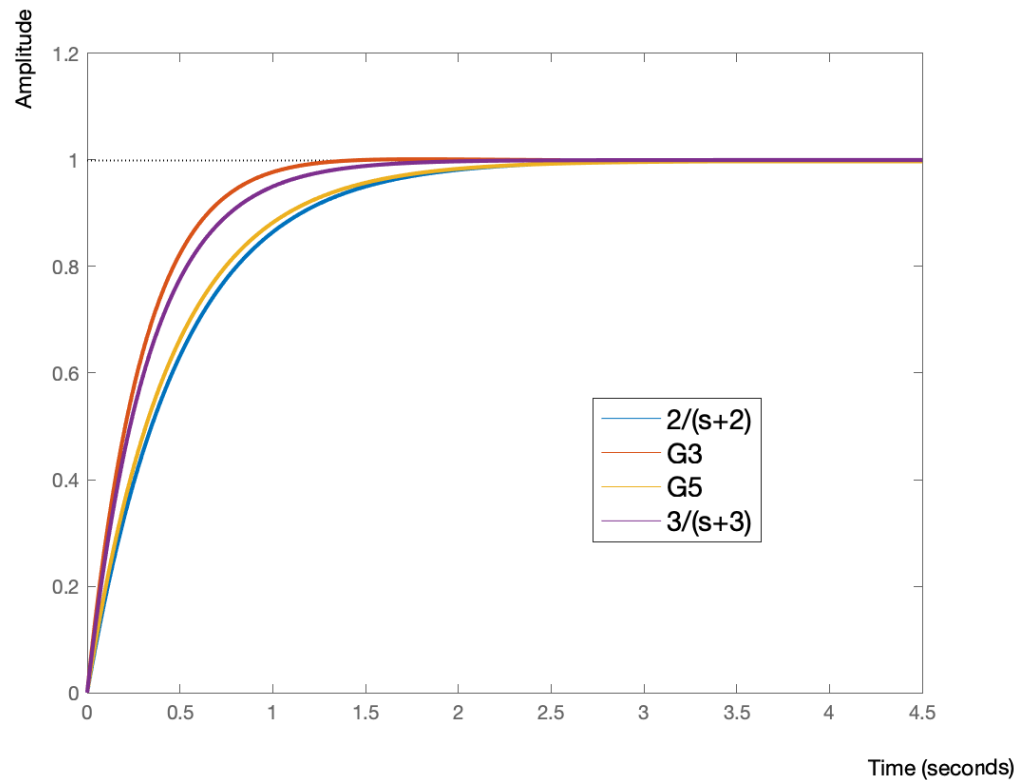
$$G3(s) = \frac{(s+1,8)}{0,3(s+2)(s+3)} = -\frac{0,67}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$G4(s) = \frac{12(s+2,5)}{5(s+2)(s+3)} = \frac{1,2}{s+2} + \frac{1,2}{s+3}$$

$$G5(s) = \frac{2(s+2,7)}{0,9(s+2)(s+3)} = \frac{1,55}{s+2} + \frac{0,67}{s+3}$$

$$G6(s) = \frac{6(s+1)}{(s+2)(s+3)} = -\frac{6}{s+2} + \frac{12}{s+3}$$

EFEITO DE ZEROS ADICIONAIS



$$G1(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

$$G2(s) = \frac{s+6}{(s+2)(s+3)} = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3}$$

$$G3(s) = \frac{(s+1,8)}{0,3(s+2)(s+3)} = -\frac{0,67}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$G4(s) = \frac{12(s+2,5)}{5(s+2)(s+3)} = \frac{1,2}{s+2} + \frac{1,2}{s+3}$$

$$G5(s) = \frac{2(s+2,7)}{0,9(s+2)(s+3)} = \frac{1,55}{s+2} + \frac{0,67}{s+3}$$

$$G6(s) = \frac{6(s+1)}{(s+2)(s+3)} = -\frac{6}{s+2} + \frac{12}{s+3}$$

CANCELAMENTO DE POLOS E ZEROS

- Em alguns casos é possível reduzir a FT para FT mais simples. Para isso utiliza-se o cancelamento de polos e zeros.
- LEMBRANDO: FT de sistemas reais são aproximações! Neste sentido nenhum cancelamento entre POLOS e ZEROS é exato!
- O cancelamento é baseado no resíduo de cada polo.
- Exemplo:

$$F_1(s) = \frac{s + 4}{(s + 5)(s^2 + 2s + 2)}; F_2(s) = \frac{s + 5,1}{(s + 5)(s^2 + 2s + 2)}$$

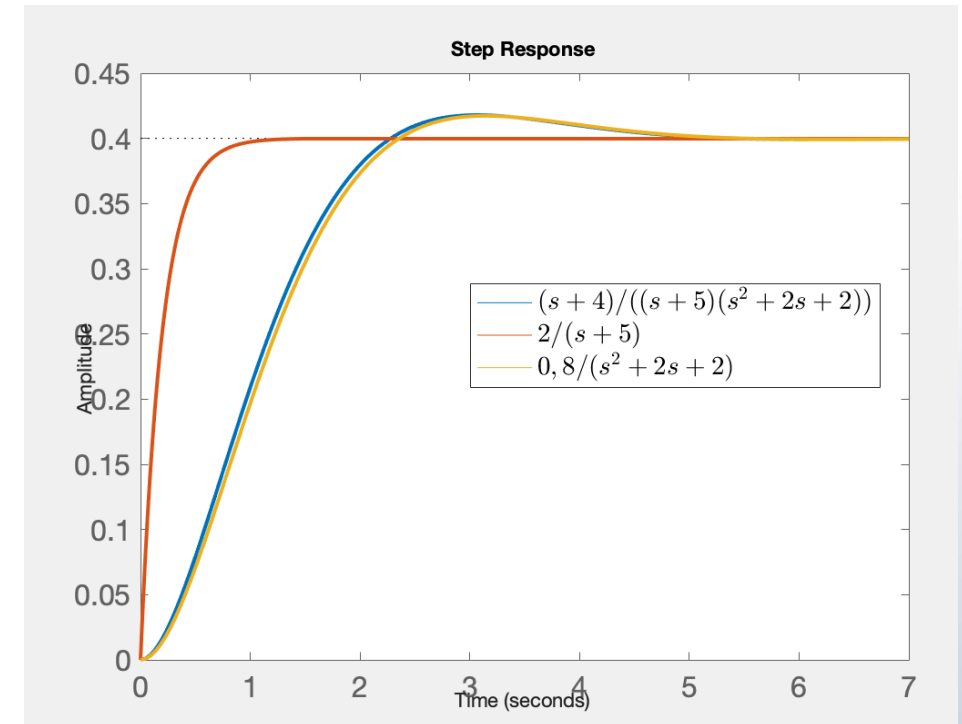
CANCELAMENTO DE POLOS E ZEROS

■ A expansão em frações parciais gera

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+4}{(s+5)(s^2+2s+2)} \\ &= \frac{-1/17}{s+5} + \frac{(0,5+6,5j)/17}{s+1+j} + \frac{(0,5-6,5j)/17}{s+1-j} \end{aligned}$$

$$F_{ap1}(s) = \frac{2}{s+5}; \quad F_{ap2}(s) = \frac{0,8}{s^2+2s+2}$$

■ Note que o módulo dos resíduos deve ser considerado.



MATERIAL ADICIONAL

■ Leituras:

- Leitura Complementar 15 (Lugar Geométrico das Raízes)
- Leitura Complementar 17 (LGR e Sistemas com Realimentação Positiva)
- Leitura Complementar 18 (LGR e sistemas com Atraso)
- Leitura Complementar 04 (Sensibilidade de Sistemas Dinâmicos a Variações de Parâmetros)
- Leitura Complementar 02 (Sistemas de Ordem Superior. Análise de Zeros e Polos Adicionais.)

■ Vídeo:

- 05: Regras para o LGR

PRÓXIMA AULA

- Lugar geométrico das raízes

