

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 27/12/2024.

EES22 CONTROLE CLÁSSICO I

Lugar Geométrico das Raízes. .



ASSUNTOS

- Projeto usando Lugar geométrico das raízes
- Controladores de Avanço/Atraso
- Controladores em Cascata



PROJETO NO LGR

■ Uma grande utilidade do LGR é o seu uso no **PROJETO** de controladores.

■ Para isso é **IMPORTANTE**:

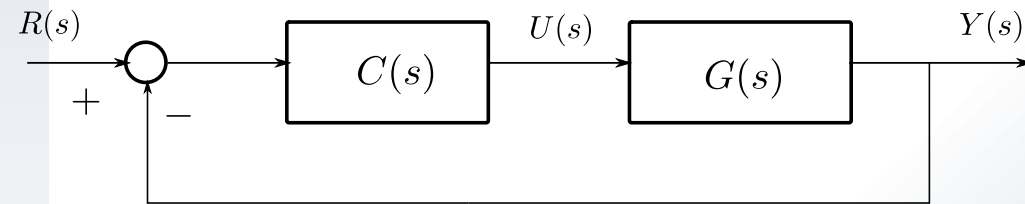
1. CONHECERMOS AS REGRAS QUE DEFINEM O **TRAÇADO DO LGR**
2. CONHECERMOS COMO DETERMINAR AS CARACTERÍSTICAS DE SISTEMAS DE **PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM**
3. CONHECERMOS QUAL O EFEITO DE **POLOS E ZEROS ADICIONAIS** AO SISTEMA
4. CONHECERMOS AS PRINCIPAIS ESTRUTURAS DE **MALHA FECHADA** E SUAS CARACTERÍSTICAS
5. CONHECERMOS AS PRINCIPAIS ESTRUTURAS DE **CONTROLADORES**, BEM COMO SUAS CARACTERÍSTICAS

PROJETO UTILIZANDO O LGR

- Seja o processo

$$G(s) = \frac{20}{(s + 1)(s^2 + 8s + 20)}$$

com a seguinte malha de controle:



- Deseja-se projetar um **controlador do tipo** $C(s) = \kappa$, que atenda o requisito de:
 - Máximo overshoot $M_p \leq 5\%$, a partir do LGR.

PROJETO UTILIZANDO O LGR

■ Para este sistemas, teremos em MF

$$F(s) = \frac{20\kappa}{(s+1)(s^2+8s+20)+20\kappa}$$

■ Fazendo $\kappa' = 20\kappa$, teremos

$$F(s) = F(s) = \frac{\kappa'}{s^3 + 9s^2 + 28s + (20 + \kappa')}$$

$$\Delta(s) = s^3 + 9s^2 + 28s + (20 + \kappa') = 1 + \kappa' \frac{1}{(s+1)(s^2+8s+20)}$$

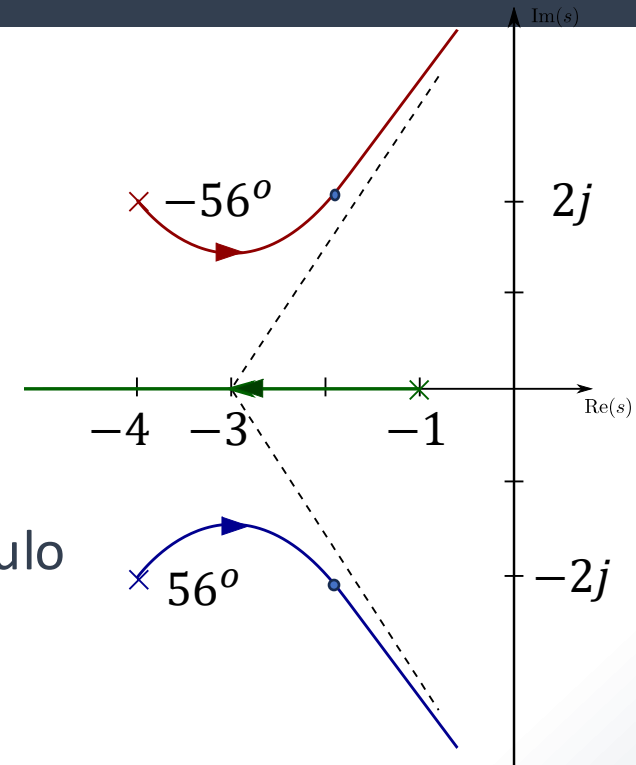
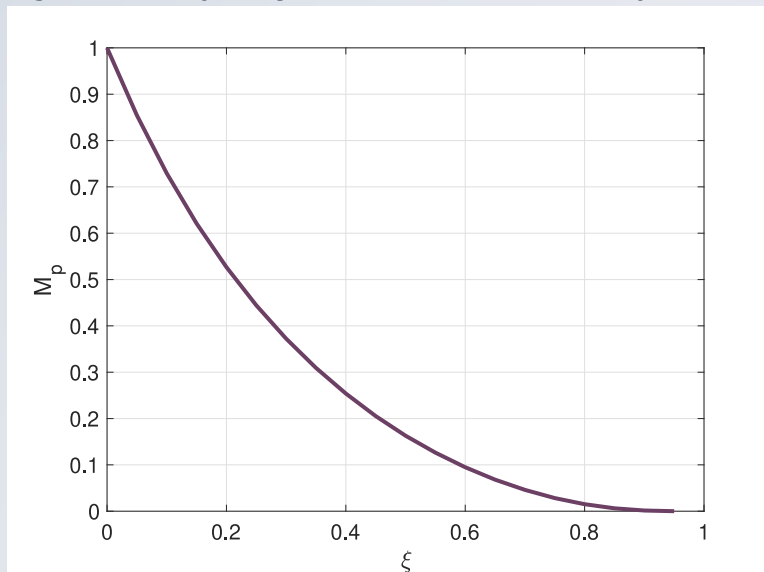
**Função de transferência
de MF**

**Equação característica da
FT de MF**

PROJETO UTILIZANDO O LGR

■ O LGR para esta equação característica é

■ A condição de projeto é obtida a partir da condição de módulo



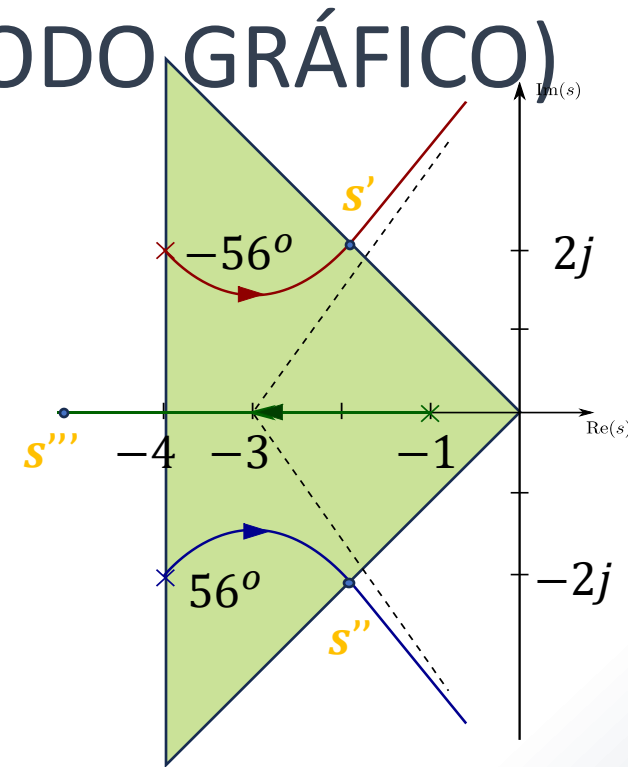
$$\xi \approx 0,7 \rightarrow \theta = 45^\circ$$

PROJETO UTILIZANDO O LGR (MÉTODO GRÁFICO)

■ Neste caso, estabelece-se a região de projeto

■ Em relação à s' : $20\kappa = \frac{1,4}{0,6} \times \frac{1,3}{0,6} \times \frac{2,9}{0,6} \Rightarrow \kappa \approx 1$

$$F(s) = \frac{20}{s^3 + 9s^2 + 28s + 40}$$



PROJETO UTILIZANDO O LGR (MÉTODO ALGÉBRICO)

■ Neste caso, devemos impor a restrição de $\xi = 0,7$. Neste caso,

$$\Delta_T(s) = (s - p_1)(s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + (-p_1 + 1,4\omega_n)s^2 + (\omega_n^2 - 1,4\omega_n p_1)s - \omega_n^2 p_1$$

■ Por outro lado, o polinômio característico da FT de MF é

$$\Delta(s) = s^3 + 9s^2 + 28s + (20 + \kappa')$$

■ Fazendo então: $\Delta_{target}(s) = \Delta(s)$, tem-se $\omega_n = 2,8$, $p_1 = -5,03$ e $\kappa' = 20,4 \Rightarrow \kappa = 1,02$
e

$$F(s) = \frac{20,4}{s^3 + 9s^2 + 28s + 40,4}$$

PROJETO UTILIZANDO O LGR (ANÁLISE)

■ Para a FT de MF obtida, é válida a aproximação de polos dominantes utilizada?

$$F(s) = \frac{20}{s^3 + 9s^2 + 28s + 40} \rightarrow p_1 = -5; p_2 = -2 + 2j; p_3 = -2 - 2j$$

$$F(s) = \frac{20}{(s + 5)(s^2 + 4s + 8)} \Rightarrow F_{ap}(s) = \frac{a}{s^2 + 4s + 8} = \frac{4}{s^2 + 4s + 8}$$

$$F(0) = F_{ap}(0) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 4$$

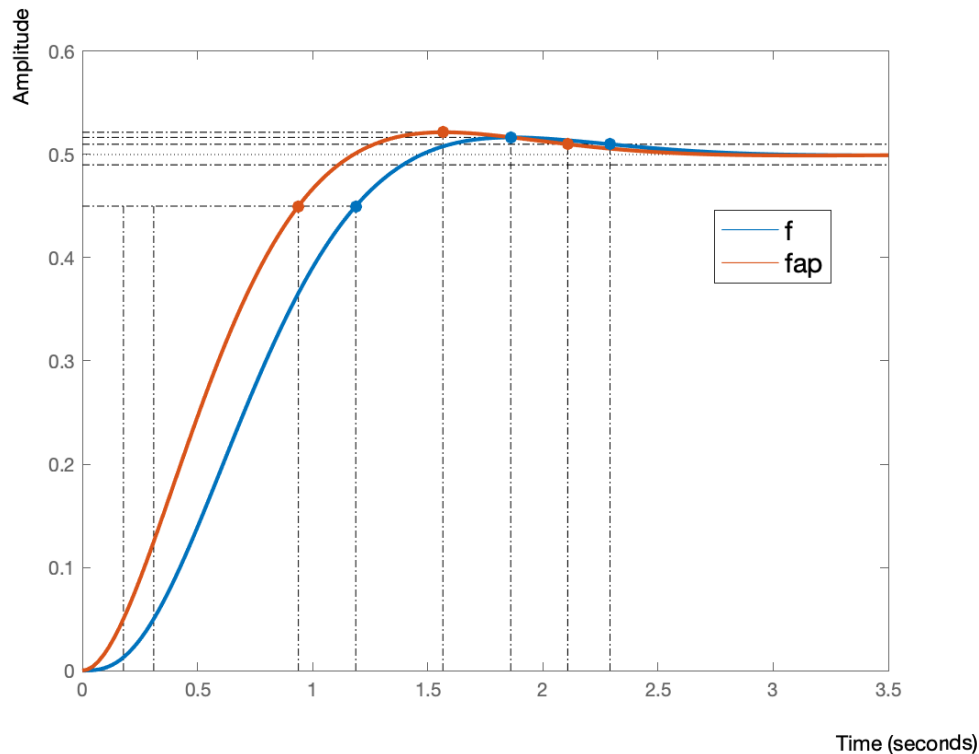
PROJETO UTILIZANDO O LGR (ANÁLISE)

Resposta ao degrau unitário:

$$\begin{aligned} f(s) &= F(s) \\ &= \frac{20}{(s+5)(s^2+4s+8)} \end{aligned}$$

$$f_{ap}(s) = F_{ap}(s) = \frac{4}{s^2+4s+8}$$

De acordo com esta análise, o projeto está adequado?

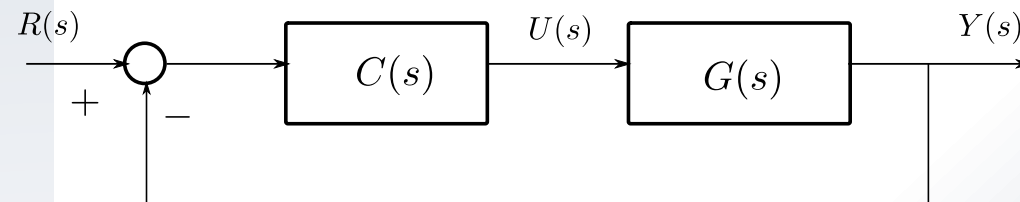


PROJETO UTILIZANDO O LGR (COMPENSADORES)

■ Seja agora o processo

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

com a seguinte malha de controle:



■ Deseja-se projetar um **controlador do tipo $C(s) = \kappa$** , que atenda os requisitos:

- Máximo overshoot **$M_p \leq 16,3\%$** , a partir do LGR.
- Tempo de acomodação **$t_r \leq 2,42 [s]$**

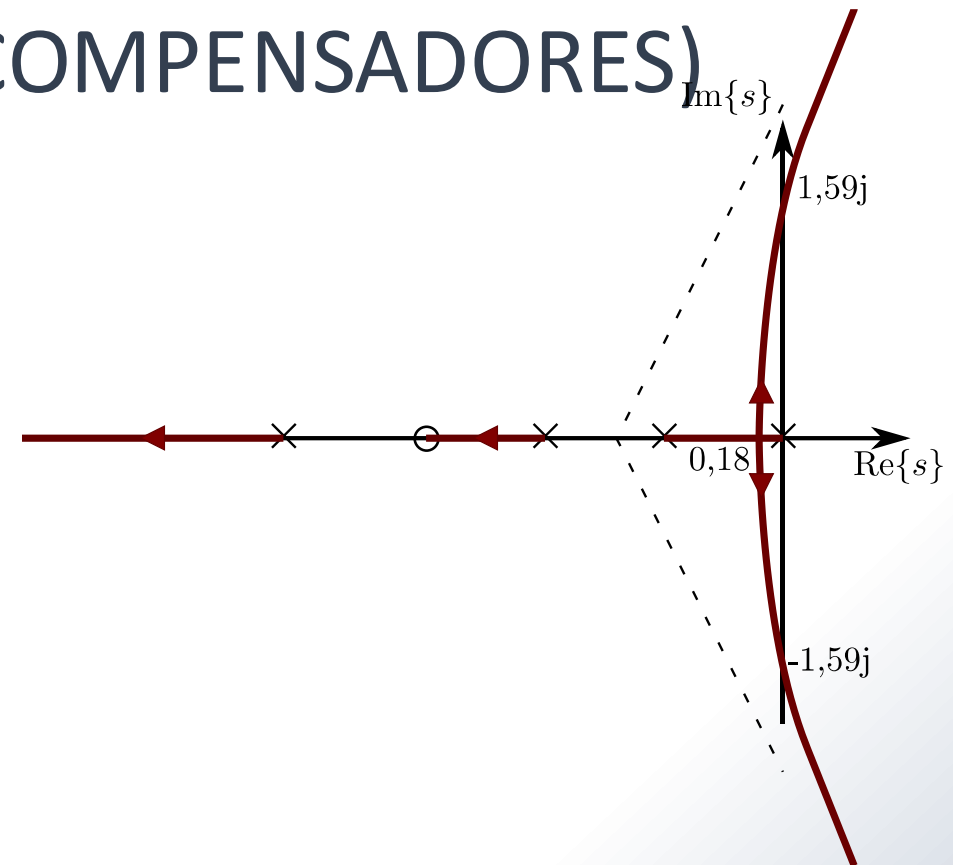
PROJETO UTILIZANDO O LGR (COMPENSADORES)

■ Para este sistema, teremos

$$F(s) = \frac{\kappa(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4) + \kappa(s+3)}$$
$$F(s) = \frac{\kappa(s+3)}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+\kappa)s + 3\kappa}$$

com equação característica:

$$\Delta(s) = 1 + \kappa \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)} = 0$$



$$M_p = 16,3\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}, \xi = 0,5$$
$$t_r = 2,42 \text{ [s]} = \frac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \omega_n \approx 1$$

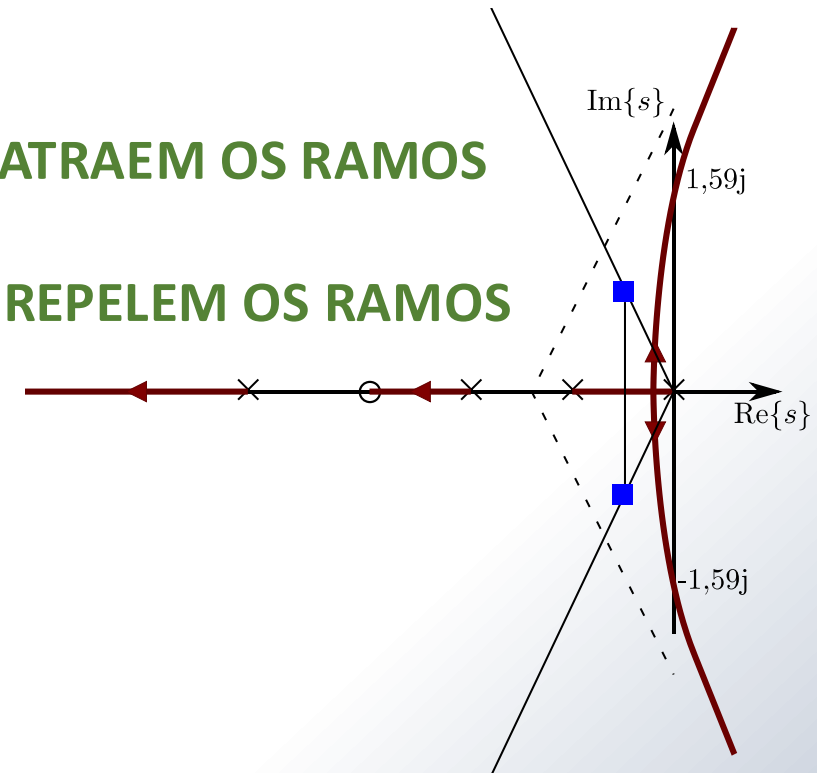
PROJETO UTILIZANDO O LGR (COMPENSADORES)

- O LGR original não passa pelo ponto desejado. **O que devemos fazer?**
- É necessário alterar o LGR original:
- Podemos adicionar um zero de forma a termos o LGR passando pelo ponto desejado.

$$\bar{G}(s) = (\lambda s + 1) \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

ZEROS ATRAEM OS RAMOS

POLOS REPELEM OS RAMOS



PROJETO UTILIZANDO O LGR (COMPENSADORES)

■ Neste caso,

$$\Delta_T(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s^2 + s + 1) = (s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2)(s^2 + s + 1)$$

$$\Delta_T(s) = s^4 + (1 - p_1 - p_2)s^3 + (1 - p_1 - p_2 + p_1p_2)s^2 + (-p_1 - p_2 + p_1p_2)s + p_1p_2$$

Assim,

$$\kappa = 2,7$$

$$\lambda = 0,4$$

$$p_1 = -3,9$$

$$p_2 = -2,1$$

$$\text{Estrutura de controle sugerida: } C(s) = \frac{2,7(0,4s+1)}{0,01s+1}$$

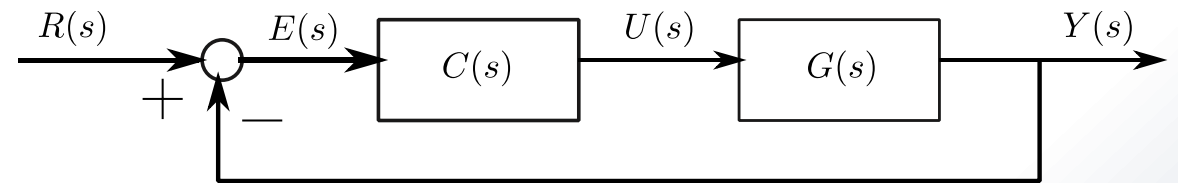
PROJETO UTILIZANDO O LGR (ZEROS ADICIONAIS)

■ Seja um sistema do tipo

$$G(s) = \frac{4}{s + 3}; \quad C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

■ Projetar um controlador PI de forma a planta em MF satisfazer

$$\xi = 0,5; \quad \omega_n = 10 \text{ rad/s}$$



PROJETO UTILIZANDO O LGR

■ A função de transferência de MF será

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{4K_P \left(s + \frac{1}{T_I} \right)}{4K_P \left(s + \frac{1}{T_I} \right) + s(s + 3)}; \quad T_I = \frac{K_P}{K_I}$$

■ Sistema com dois polos e MF

■ Equação característica: $\Delta(s) = 1 + \frac{4K_P \left(s + \frac{1}{T_I} \right)}{s(s+3)} = 0$; $\bar{G}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_I}}{s(s+3)}$; $K' = 4K_P$

PROJETO UTILIZANDO O LGR

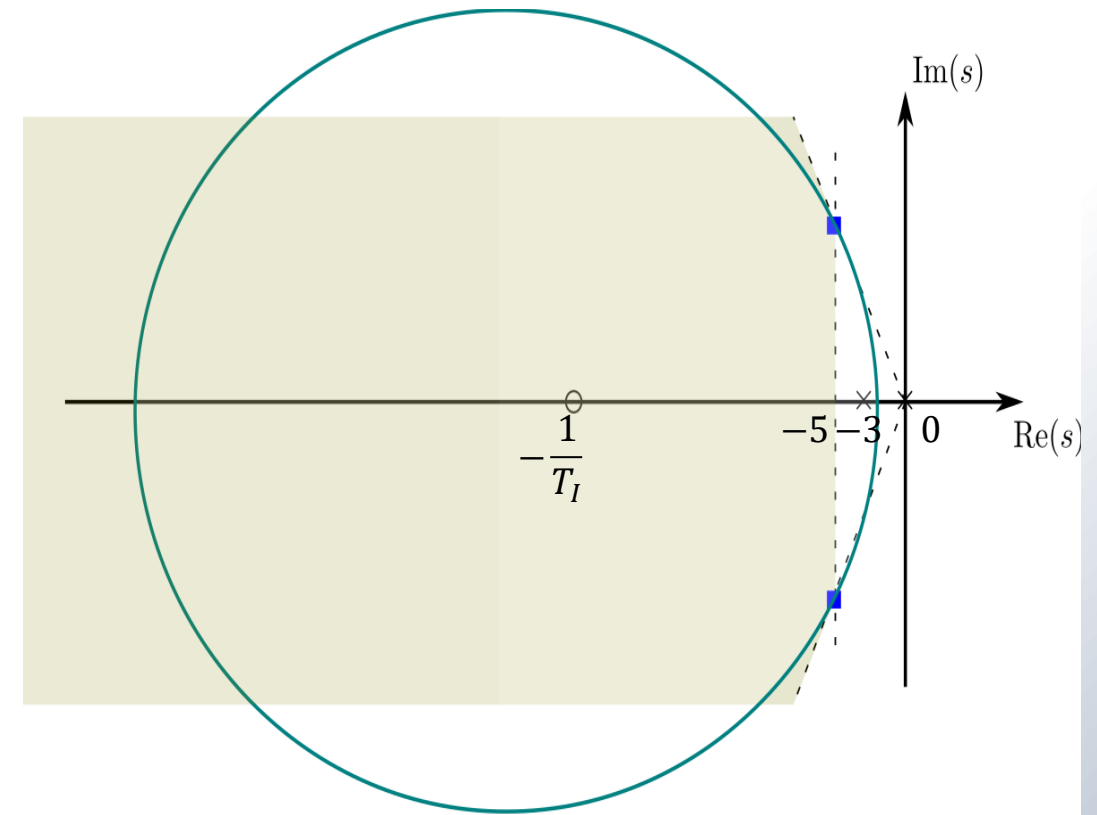
- O LGR para este sistema será da forma

$$\Delta_{target}(s) = s^2 + 10s + 100$$

$$\Delta_{real}(s) = s^2 + (3 + K')s + K' \frac{1}{T_I}$$

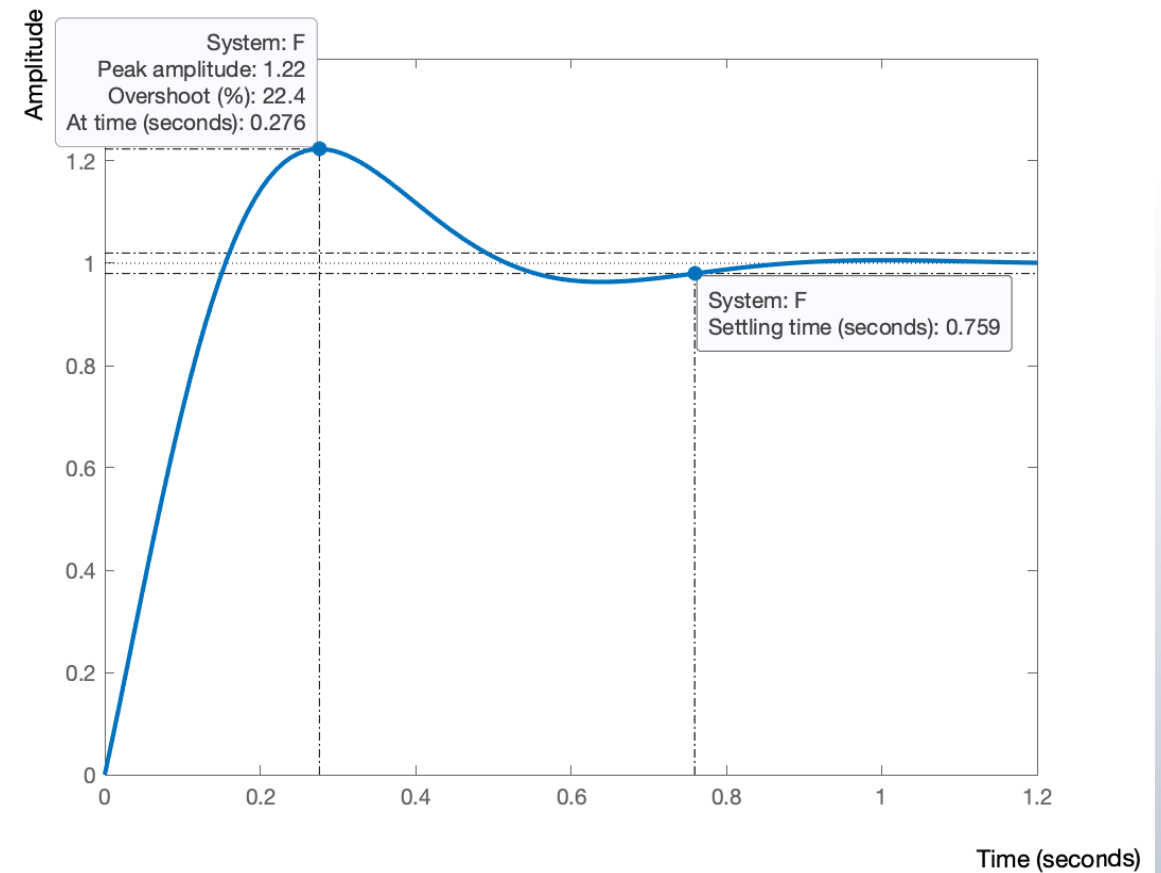
- Utilizando o método algébrico:

$$C(s) = \frac{7}{4} + \frac{25}{s}$$



PROJETO UTILIZANDO O LGR

- A resposta do sistema será →
- Porque houve esta diferença entre os valores de M_p projetado e obtido?
- Como compensar o efeito do zero?

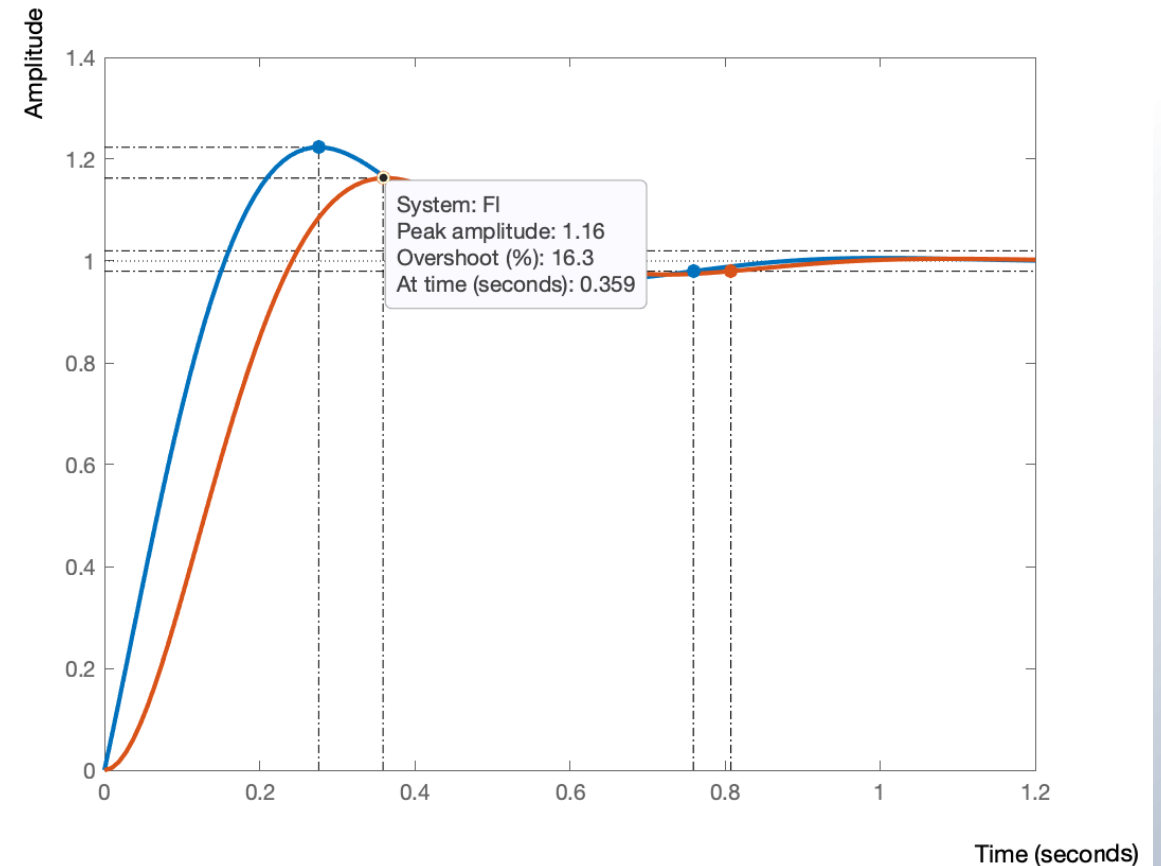


ESTRUTURA COM PRÉ-FILTRO

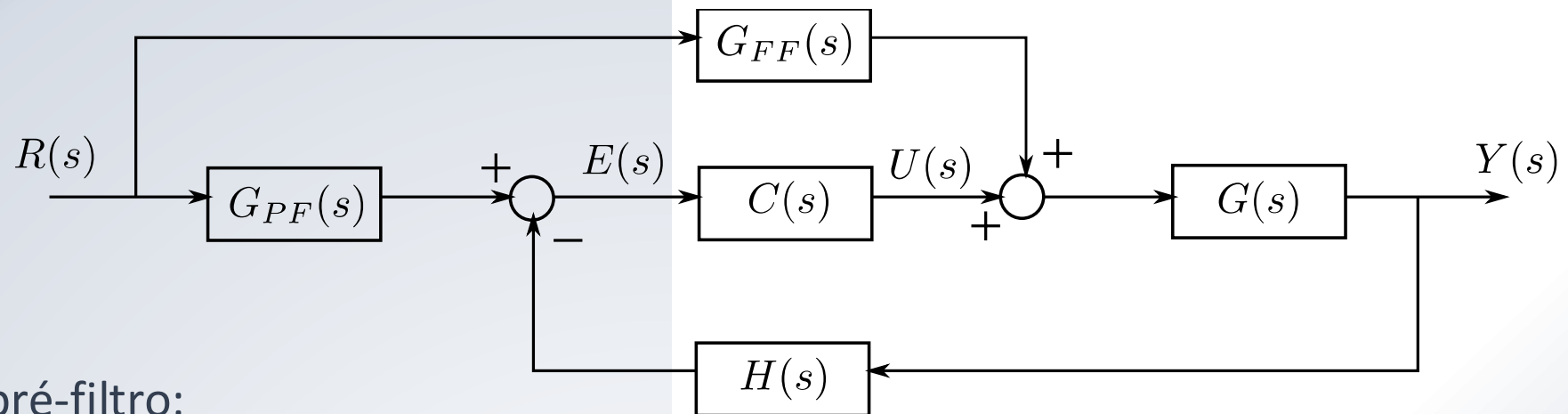
■ Estrutura de projeto com Pré-filtro

$$F'(s) = F(s) \frac{1}{T_I s + 1}; \quad F'(0) = 1$$

■ Cuidado com o cancelamento de polos e zeros!



ESTRUTURA COM PRÉ-FILTRO



- $G_{PF}(s)$ é o pré-filtro:
 - Limitar a taxa de variação de $r(t)$
 - Eliminar ruídos
 - Normalizar referências
 - “Cancelar” efeitos indesejados
- $G_{FF}(s)$ é a função de feed-forward:
 - Antecipar informações sobre $r(t)$
 - ...

CONTROLADORES DO TIPO AVANÇO E ATRASO

- Controladores de primeira ordem do tipo

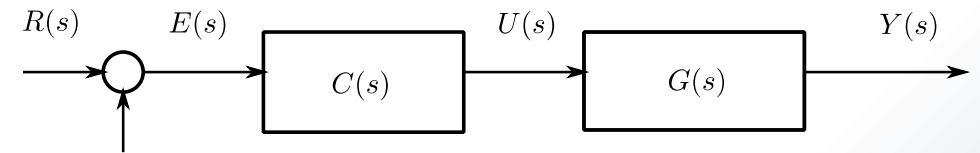
$$C(s) = \kappa \frac{s + z}{s + p}, \quad \kappa \geq 0, z \geq 0, p \geq 0$$

- Se $p > z$, CONTROLADOR DO TIPO **AVANÇO** DE FASE

- Se $z > p$, CONTROLADOR DO TIPO **ATRASO** DE FASE

CONTROLADORES DO TIPO AVANÇO E ATRASO

- A denominação refere-se a possibilidade da estrutura proposta **adicionar ou subtrair uma fase positiva** em $C(s)G(s)$.



- Note que:

$$\kappa_p + \frac{\kappa_i}{s} = \kappa \frac{s + z}{s + p}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \kappa = \kappa_p; \quad \frac{\kappa_i}{\kappa_p} = z > p = 0$$

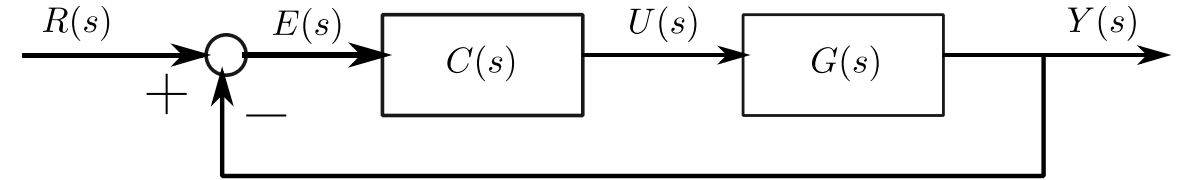
$$\kappa_p + \kappa_d s \approx \kappa \frac{s + z}{s + p}, \quad \forall \omega \ll p, \quad \kappa = \kappa_d p; \quad \frac{\kappa_p}{\kappa_d} = z \ll p$$

PROJETO DE COMPENSADOR DE AVANÇO DE FASE

- Atuam principalmente para:
 - Acelerar a resposta temporal
 - Reduzir o tempo de subida
 - Reduzir o overshoot

- Exemplo de projeto:

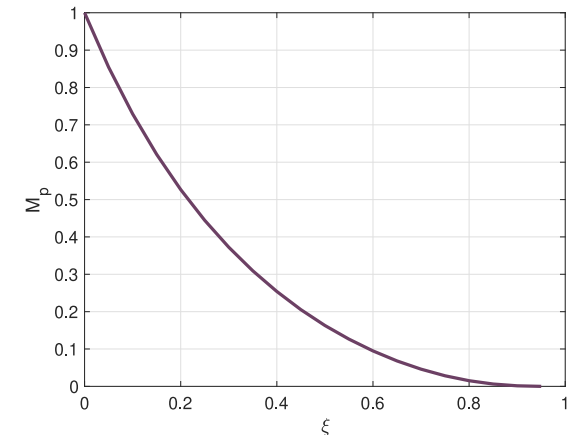
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



Requisito de Projeto:

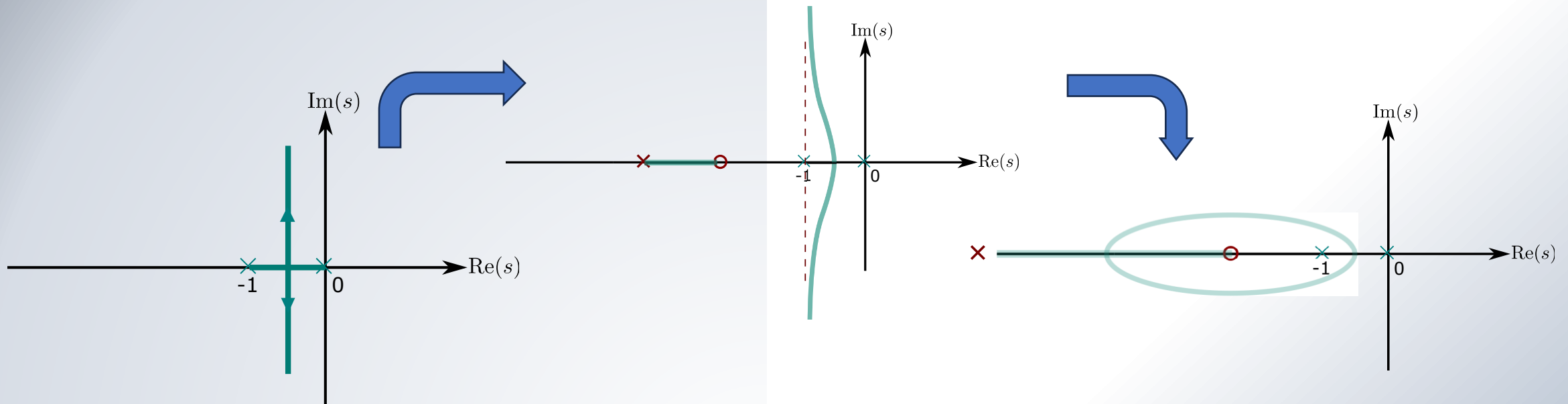
$$M_p \leq 20\% ; \xi = 0,5;$$

$$t_r \leq 0,3 \text{ s} \rightarrow \omega_n = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{t_r \sqrt{1 - \xi^2}} \geq 8,06 \text{ rad/s}$$



PROJETO DE COMPENSADOR DE AVANÇO DE FASE

- Neste caso, o LGR de $G(s)$ com um controle proporcional e a adição de um controlador do tipo avanço de fase, levam a

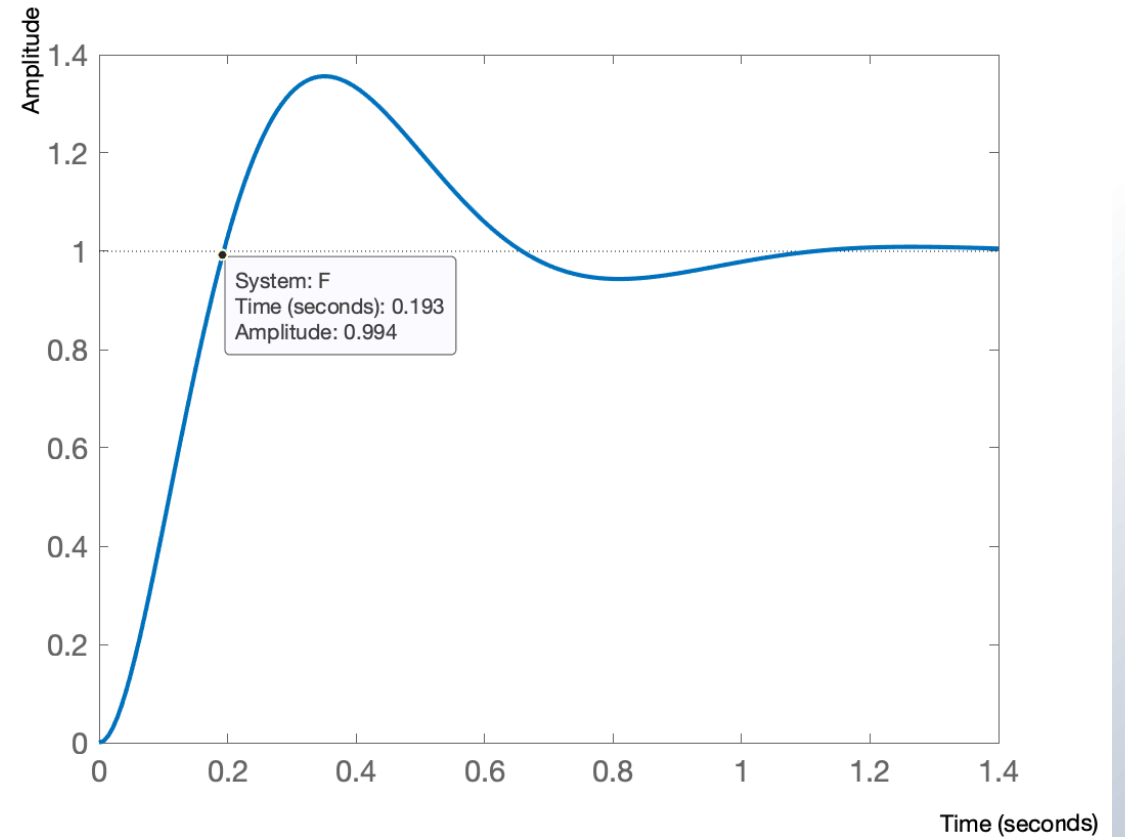


PROJETO DE COMPENSADOR DE AVANÇO DE FASE

- Utilizando o método algébrico e escolhendo $p = 20$, obtemos

$$C(s) = 148 \frac{s + 5,6}{s + 20}$$

- Um ajuste através do ganho, LGR para $\bar{G}(s) = C(s)G(s)$, não permite atender os requisitos.

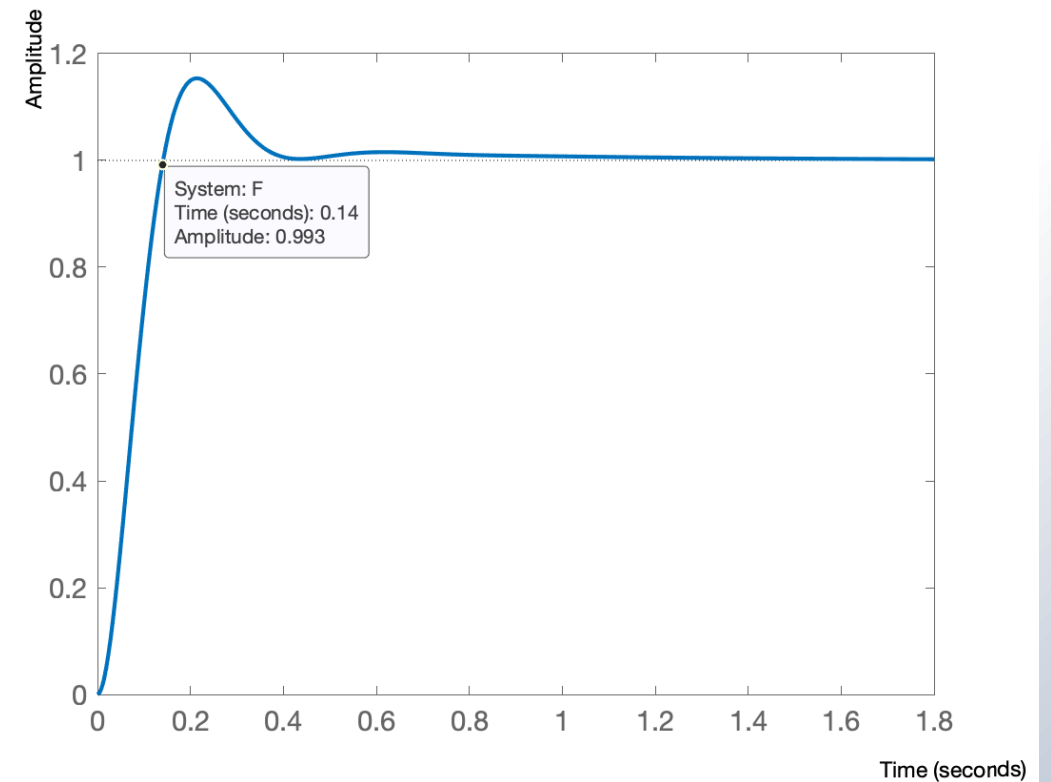


PROJETO DE COMPENSADOR DE AVANÇO DE FASE

- Neste caso, podemos ajustar os zeros e polos utilizando o `rltool(G*C)`. Um possível projeto que atende as especificações com folga é

$$C(s) = 318 \frac{s + 1,5}{s + 20}$$

- Uma alternativa ao ajuste manual é projetar vários controladores e escolher o melhor dentre eles.



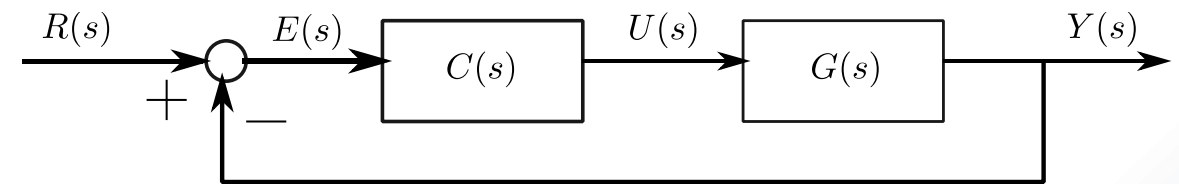
PROJETO DE COMPENSADOR DE ATRASO DE FASE

- Vamos considerar outro exemplo de Projeto. Seja a planta:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

- Neste caso, o erro em regime é:

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{1 + (s + 1)(s + 2)} \right) = 0,67$$



Requisito de Projeto:

Reduzir o erro em regime em 10 vezes



PROJETO DE COMPENSADOR DE ATRASO DE FASE

■ Neste caso, deseja-se que

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \left(1 - \frac{\kappa(s+z)}{\kappa(s+z) + (s+1)(s+2)(s+p)} \right) = 1 - \frac{\kappa z}{\kappa z + 2p} = 0,06 \rightarrow \frac{2}{2 + \frac{\kappa z}{p}} = 0,06$$

■ Portanto, $\frac{\kappa z}{p} = 31,3 \rightarrow \kappa = 15, \frac{z}{p} = 2$. Assim, se $z = 2, p = 1$. O compensador seria

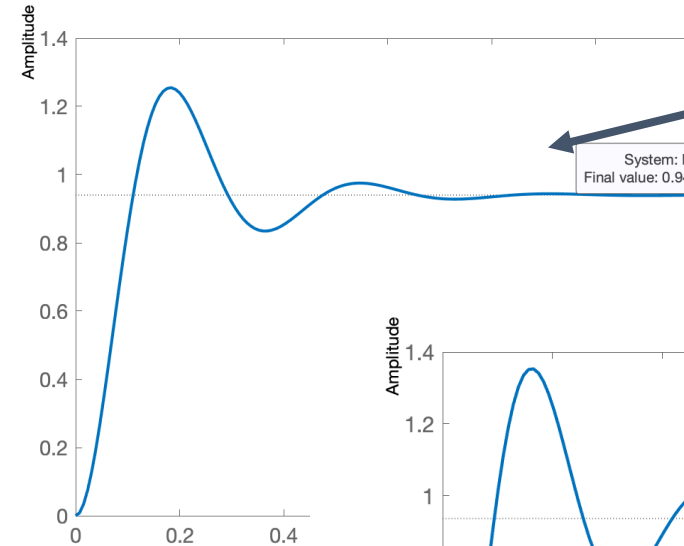
$$C(s) = 15 \frac{s+2}{s+1} \text{ (compensador de atraso de fase)}$$

PROJETO DE COMPENSADOR DE AVANÇO DE FASE

- Alternativamente, neste caso, poderíamos escolher $\kappa = 313, \frac{z}{p} = 0,1$

$$C(s) = 313 \frac{s + 1}{s + 10}$$

- A resposta ao degrau para os dois controladores estão ao lado.
- Qualquer um dos controladores neste caso seria adequado.

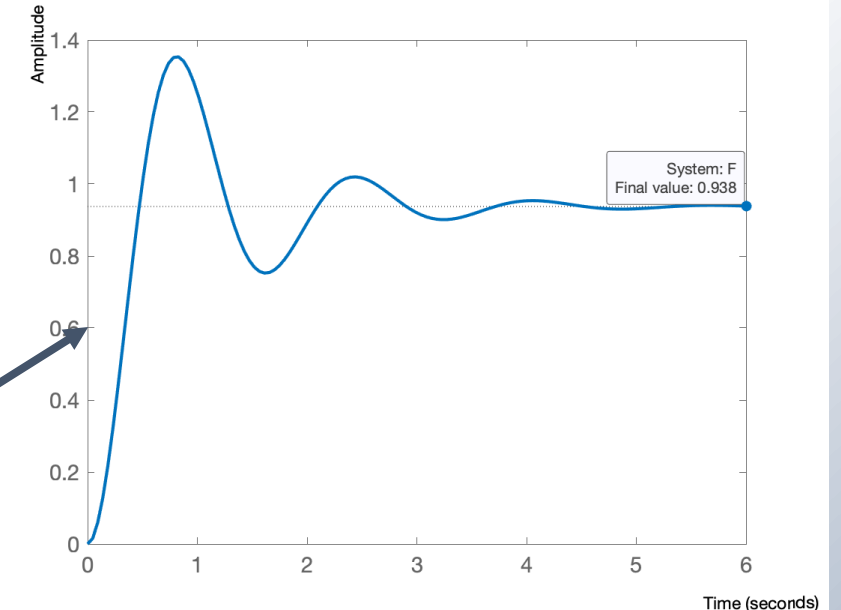


$$C(s) = 313 \frac{s + 1}{s + 10}$$

AVANÇO DE FASE

ATRASO DE FASE

$$C(s) = 15 \frac{s + 2}{s + 1}$$



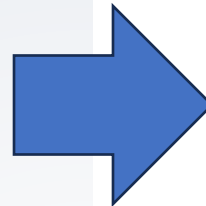
PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA

■ Seja uma planta do tipo

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

deseja-se projetar um controlador em cascata com a planta que atenda os seguintes requisitos

- $e_{\infty} = 0$, para entrada degrau
- $M_p = 16,3\% \rightarrow \xi = 0,5$
- $t_r = 1 \text{ s} \rightarrow \omega_n = 2,42 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $K_v = 10$



**Compensadores
em cascata!**

PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA

- Para atender ao erro em regime, devemos ter

$$C_1(s) = \frac{1}{s}$$

- Para atender aos requisitos de ξ e ω_n devemos realizar o projeto de um compensador de avanço com estrutura

$$C_2(s) = K \frac{s + z}{z + p}$$

dado o polinômio característico desejado $\Delta_{target}(s) = s^2 + 2,42s + 5,86$

PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA

■ Utilizando método algébrico, para $z \approx \omega_n \rightarrow z = 2$: $C_{2A}(s) = 10,7 \frac{s+2}{s+5}$

■ Utilizando cancelamento de polo e zero, $z = 1$: $C_{2B}(s) = 5,86 \frac{s+1}{s+2,42}$

■ Por fim, projeta-se um compensador para $K_v = 10$, que diz respeito ao erro em regime para entrada do tipo rampa. Assim, se $C_3(s) = \frac{s+a}{s+b}$, atraso de fase para melhorar a resposta em estado estacionário:

$$K_v = 10 = \lim_{s \rightarrow 0} s C_1(s) C_2(s) C_3(s) G(s) = C_2(0) \frac{a}{b} \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)_A = 4,17 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a}{b}\right)_B = 2,34$$

PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA

- Neste caso, considerando um compensador de atraso de fase do tipo passa-baixa em $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$

$$C_{3A}(s) = \frac{s + 0,1}{s + 0,02} \quad \text{ou} \quad C_{3B}(s) = \frac{s + 0,1}{s + 0,04}$$

- A estrutura do compensador cascata será

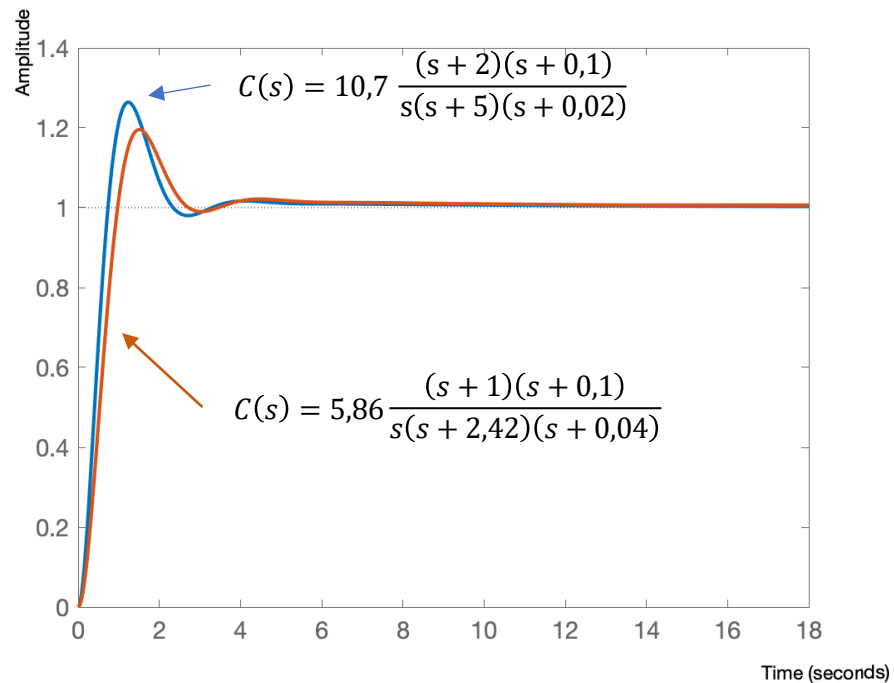
$$C(s) = C_1(s)C_2(s)C_3(s) = 10,7 \frac{(s + 2)(s + 0,1)}{s(s + 5)(s + 0,02)}$$

$$C(s) = C_1(s)C_2(s)C_3(s) = 5,86 \frac{(s + 1)(s + 0,1)}{s(s + 2,42)(s + 0,04)}$$

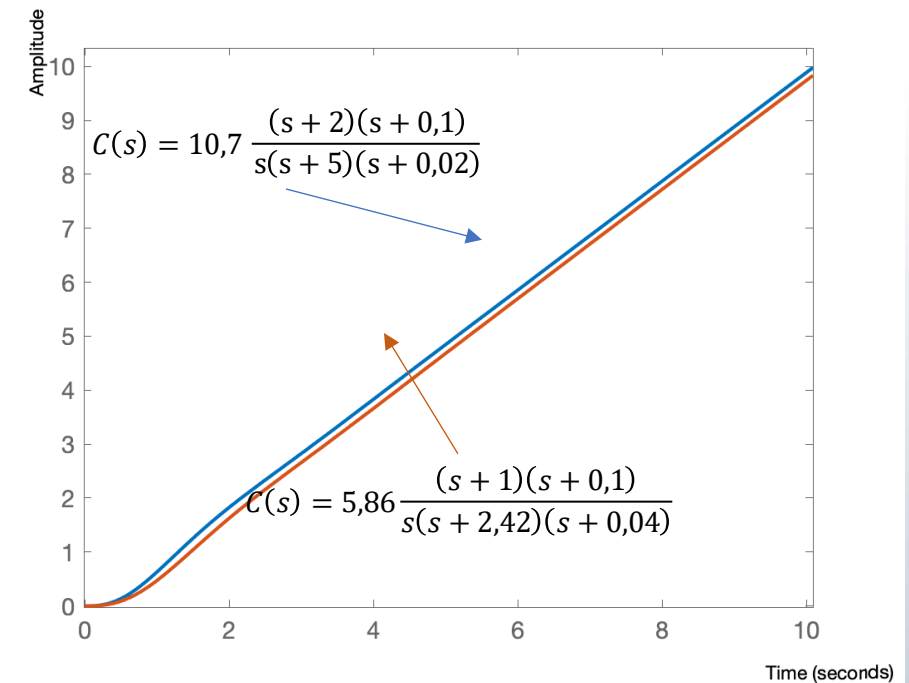
PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA

■ As respostas ao degrau e rampa para os dois projetos será

Resposta ao Degrau Unitário



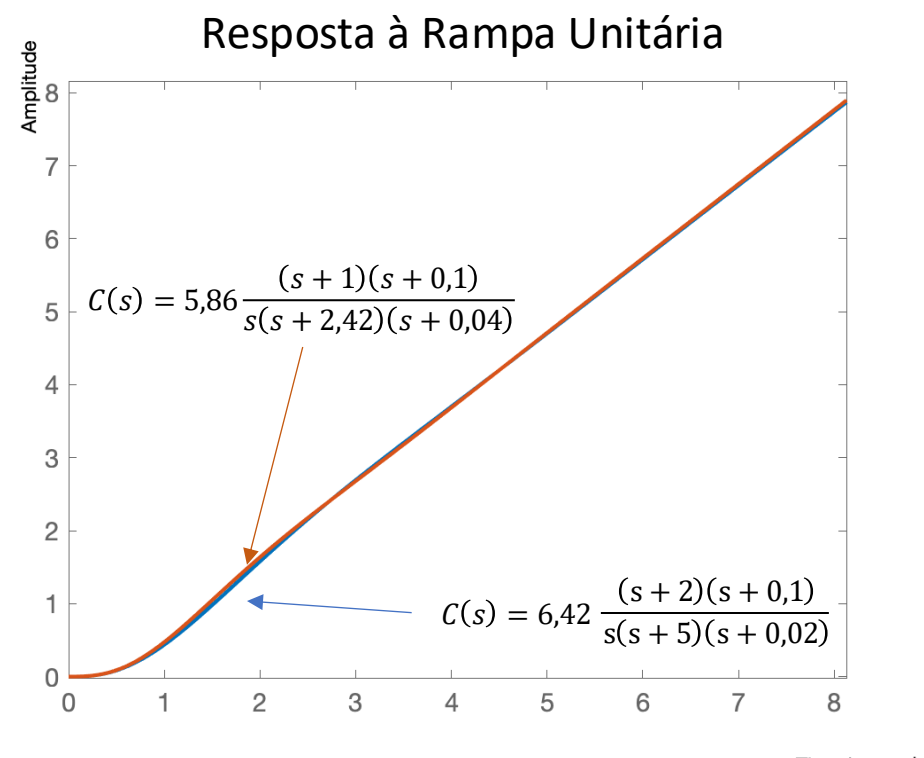
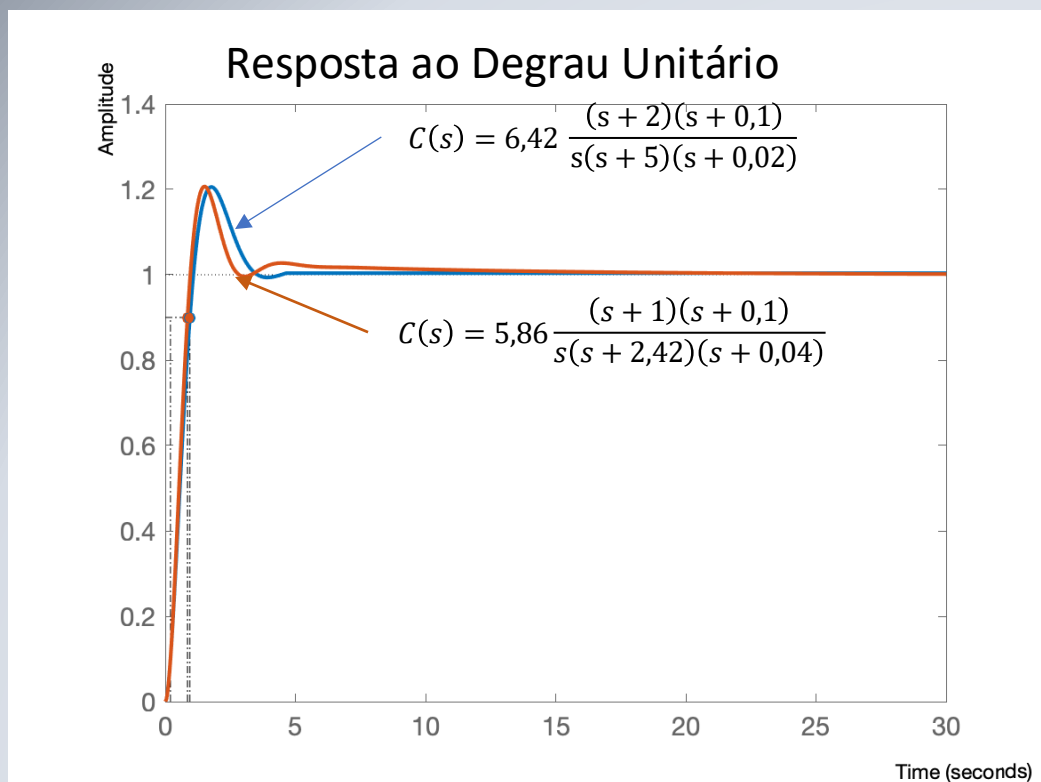
Resposta à Rampa Unitária



PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA

- Neste caso:
 - O projeto 1, possui overshoot acima do estabelecido em projeto, portanto deve-se ajustá-lo utilizando uma ferramenta computacional.
 - O projeto 2 está adequado.
- Utilizando, para o primeiro projeto, rltool(CG) obtém-se um ganho de 0,6. Assim, obtém-se as respostas ao degrau e à rampa

PROJETO DE COMPENSADORES CASCATA



PROJETO DE CONTROLADOR PARA RESPOSTA DEADBEAT

- Originalmente corresponde a projeto a tempo discreto que leva o sistema para o regime permanente com o mínimo de passos (intervalos de amostragem).
- Este conceito foi extrapolado para sistemas a tempo contínuo. Um sistema de controle possui uma resposta do tipo DEADBEAT se sua resposta ao degrau for rapidamente para o valor de regime, com um mínimo de overshoot.
- **Características de uma resposta DEADBEAT:**
 - Erro em regime permanente nulo para entrada degrau, $e_{\infty} = 0$
 - Tempos de subida e de acomodação mínimos
 - Máximo overshoot $0,1\% \leq M_p \leq 2\%$
 - Máximo undershoot de 2%

PROJETO DE CONTROLADOR PARA RESPOSTA DEADBEAT

- O procedimento para **projeto de uma resposta deadbeat** corresponde a:
 - **Normalizar** a FT de MF utilizando compensadores e pré-filtro, quando necessário
 - **Aplicar os valores tabelados** para projeto

PROJETO DE CONTROLADOR PARA RESPOSTA DEADBEAT

■ Considerando uma FT de MF do tipo

$$F(s) = \frac{\omega_n^3}{\bar{s}^3 + \alpha\omega_n\bar{s}^2 + \beta\omega_n^2\bar{s} + \omega_n^3} = \frac{1}{s^3 + \alpha s^2 + \beta s + 1}$$

(por exemplo para grau 3), as seguintes escolhas de α e β levam a um controlador do tipo deadbeat:

$$\alpha = 1,90 \text{ e } \beta = 2,20$$

TABELA PARA PROJETO PARA RESPOSTA DEADBEAT

ORDEM	Coeficientes de D(s)					M_p (%)	U_p (%)	t_r (10 – 90)	t_r (0 – 100)	t_s (2%)
	α	β	γ	δ	ϵ					
2	1,82					0,10	0,00	3,47	6,58	4,82
3	1,90	2,20				1,65	1,36	3,48	4,32	4,04
4	2,20	3,50	2,80			0,89	0,95	4,16	5,29	4,81
5	2,70	4,90	5,40	3,40		1,29	0,37	4,84	5,73	5,43
6	3,15	6,50	8,70	7,55	4,05	1,63	0,94	5,49	6,31	6,04

PROJETO DE CONTROLADOR PARA RESPSOTA DEADBEAT

■ Como exemplo, considere a planta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

o projeto de um controlador para resposta deadbeat, neste caso, deve compensar a dinâmica da planta, por isso, podemos utilizar um compensador

$$C(s) = K \frac{s+z}{s+p}$$

PROJETO DE CONTROLADOR PARA RESPOSTA DEADBEAT

- Este compensador gera uma FT de MF da forma

$$F(s) = \frac{K(s + z)}{s^3 + (p + 1)s^2 + (p + K)s + Kz}$$

- Para normalizar a FT de MF, devemos utilizar um pré-filtro, por exemplo da forma

$$G_F(s) = \frac{z}{s + z} \rightarrow$$
$$F(S) = \frac{Kz}{s^3 + (p + 1)s^2 + (p + K)s + Kz} = \frac{Kz}{s^3 + (p + 1)s^2 + (p + K)s + Kz}$$

PROJETO DE CONTROLADOR PARA RESPSOTA DEADBEAT

■ De acordo com a tabela

$$\alpha = 1,90 ; \beta = 2,20$$

$$1 + p = 1,90\omega_n, K + p = 2,20\omega_n^2, Kz = \omega_n^3$$

■ Para a escolha $\omega_n^2 = 2rad/s$, tem-se $p = 2,84 ; z = 1,34; K = 6,14$.

MATERIAL ADICIONAL

■ Leituras:

- Leitura Complementar 15 (Lugar Geométrico das Raízes)
- Leitura Complementar 03 (Tipos de Controladores)



PRÓXIMA AULA

- Lugar geométrico das raízes

