

Prof. Gabriela W. Gabriel  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991  
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br  
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 27/12/2024.

# EES22 CONTROLE CLÁSSICO I

Sinais e Modelagem. Resposta em Frequência.  
Diagrama de Bode. Projeto Utilizando o Diagrama de  
Bode.



# ASSUNTOS

- Tipos de sinais
- Modelagem de sistemas (resposta transitória)
- Resposta em frequência
- Modelagem de sistemas (resposta em frequência)
- Diagrama de Bode
- Requisitos de desempenho no domínio da frequência
- Margens de estabilidade
- Projeto utilizando o Diagrama de Bode



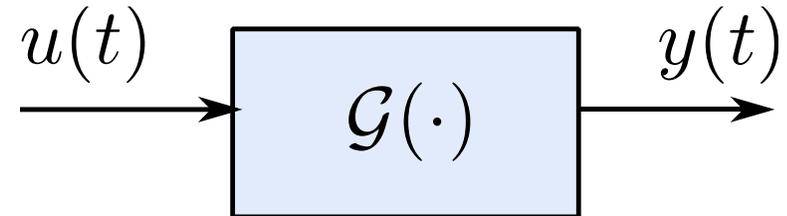
# SINAIS EM SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

- Sistemas físicos podem ser descritos pela relação entre suas entradas e saídas

$$y(t) = \mathcal{G}(u(t))$$



$$Y(s) = G(s)U(s)$$



Sistemas lineares e invariantes no tempo modificam de forma conhecida sinais de entrada conhecidos.

# SINAIS EM SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

- Tipos de sinais de entrada
  - Sinais a tempo contínuo X Sinais a tempo discreto
  - Sinais periódico X Sinais aperiódicos
  - Sinais determinísticos X Sinais estocásticos
- Alguns sinais são de especial importância para os sistemas de controle, em especial os sinais senoidais, impulso e degrau e sinais estocásticos em estado estacionário (operação normal) e ruído pseudo-aleatório.



# SINAIS EM SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

## ■ Degrau e impulso

- Resposta transitória para boas condições de relação sinal ruído
- Adequado para sistemas simples
- Polos e zeros calculados a partir das curvas e parâmetros obtidos da identificação

## ■ Resposta em frequência

- Resposta em frequência para boas condições de relação sinal ruído
- Adequado para sistemas simples e complexos
- Polos e zeros são os próprios parâmetros obtidos da identificação



# SINAIS EM SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

- Sinais estocásticos em estado estacionário
  - Obtidos a partir da operação normal do sistema
  - Em alguns casos permitem modelar apenas parte do sistema
  - Em condições de operação normal (em regime) pouca variação ocorre no sistema, levando uma qualidade ruim dos dados de identificação
- Ruído pseudo-aleatório
  - Construídos a partir de sinais binários – PRBS (pseudorandom binary signal)
  - Indicados para a identificação de sistemas para a maioria dos casos
  - Permitem filtrar dados com ruído relativamente altos
  - Assemelham-se ao ruído branco o que permite excitar uma grande faixa de frequências



# MODELO A PARTIR DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

- Admitindo-se a resposta do tipo

$$y(t) = y_{\infty} + Ae^{(-\alpha t)} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + \dots$$

- Isolando-se o polo mais lento

$$y(t) - y_{\infty} = Ae^{-\alpha t}$$
$$\log_{10}(y(t) - y_{\infty}) = \log_{10} A - \log_{10} e \alpha t$$

**Equação de uma reta**

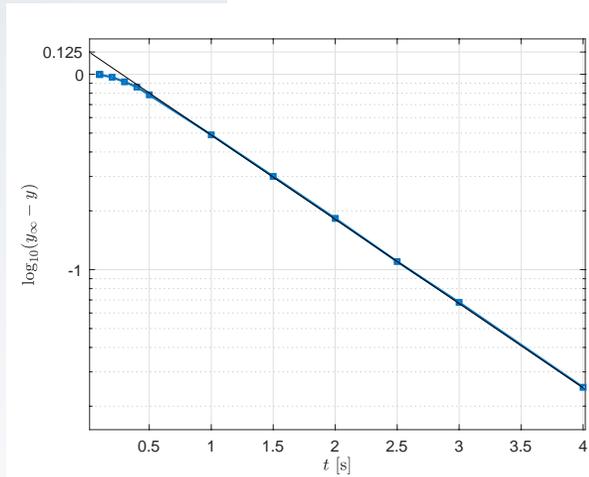
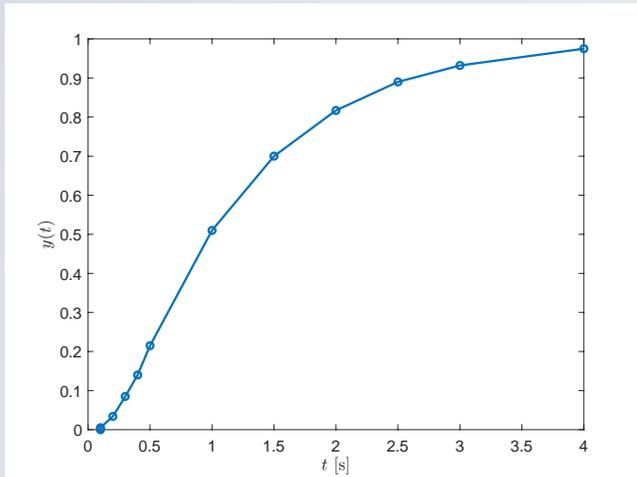
- Procedimento:

1. Define-se a curva  $\log_{10}(y(t) - y_{\infty})$ . Calcula-se  $A$  e  $\alpha$  com dados aproximados.
2. Define-se a curva  $\log_{10}(y(t) - y_{\infty} - Ae^{-\alpha t})$ . Calcula-se  $B$  e  $\beta$  com dados aproximados.
3. ...
4. Até que a curva resultante seja precisa.

# MODELO A PARTIR DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

## Exemplo:

- Sejam os dados experimentais obtidos na tabela ao lado.
- O gráfico de  $y(t)$  e  $\log_{10}(y - y_{\infty})$  correspondem a



$t$	$y(t)$
0,1	0,000
0,1	0,005
0,2	0,034
0,3	0,085
0,4	0,140
0,5	0,215
1,0	0,510
1,5	0,700
2,0	0,817
2,5	0,890
3,0	0,932
4,0	0,975
$\infty$	1,000

# MODELO A PARTIR DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

■ A curva encontrada é

$$\begin{aligned}\log_{10} |A| &= 0,125 \\ A &= -1,33; \quad 0,4343\alpha = \frac{1,602 - 1,167}{1} \\ \alpha &\approx 1 \rightarrow 1,33e^{-t}\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1,33}{s+1} = \frac{2,33s + 1,33}{s(s+1)} = 2,33 \frac{s + 0,57}{s(s+1)}$$

■ Para a aproximação melhor, deve-se prosseguir com a análise de  $y(t) - (y_{\infty} + Ae^{\alpha t})$

# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

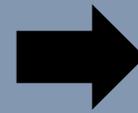
■ Seja uma entrada do tipo

$$u(t) = \sin \omega t = \frac{1}{-2j} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2j} e^{j\omega t}$$

■ Assim, sendo o sistema LIT estável

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

Para  $t > 0$  suficientemente grande,  
e  $G(s)$  sem modos naturais em  $\pm j\omega$



$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega}$$

# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

- Os coeficientes são calculados através de frações parciais com

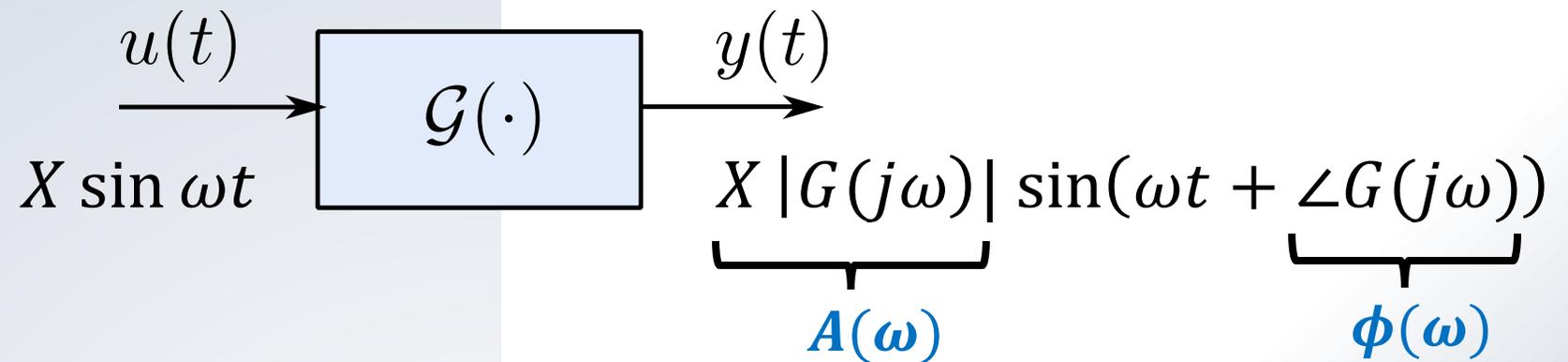
$$a = G(-j\omega) \frac{1}{-2j}; \quad \bar{a} = G(j\omega) \frac{1}{2j}$$

Fazendo o sistema  $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$  e  $G(-j\omega) = A(\omega)e^{-j\phi(\omega)}$ , teremos

$$y(t) = A(\omega) \left[ \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \right] = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

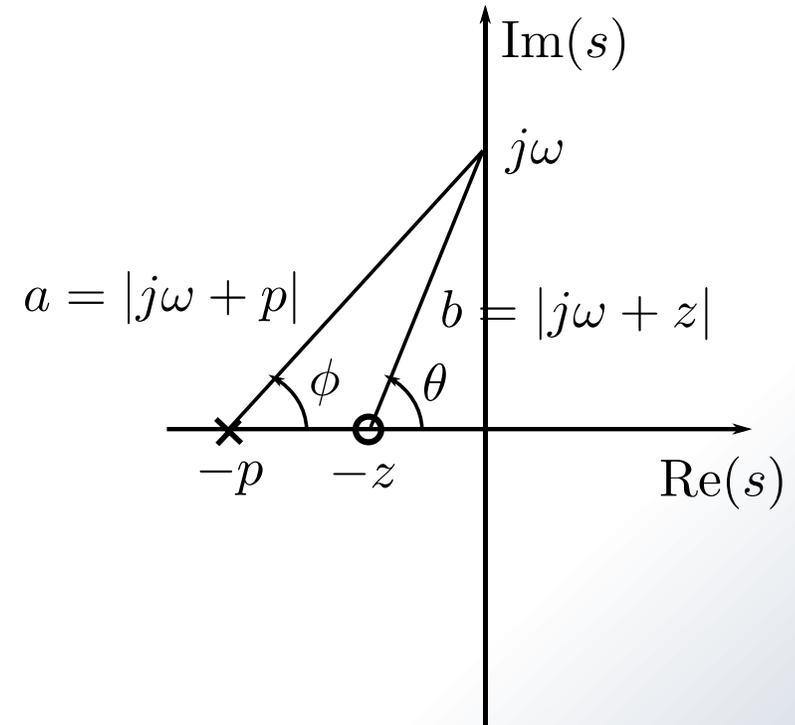
■ Assim,



■ Como consequência, a depender do sistema  $G(s)$  a resposta a um sinal senoidal de frequência e amplitude conhecidos irá variar em **fase** e **amplitude**!

# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

- Se tomarmos diferentes pontos sobre o eixo imaginário e calcularmos, para cada  $\omega$  os valores de fase e módulo para determinado sistema, podemos verificar um comportamento característico que define o sistema LIT pelo qual o sinal passa atravessa.



# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

■ Como exemplo, seja o sistema

$$G(s) = \frac{s + 2}{s + 4}$$

■ Para uma entrada do tipo  $u(t) = \sin \omega t$ , teremos que

<i>Frequência</i> $\omega$	$A(\omega)$	$\phi(\omega)$
0,1	0,5	$\sim 0$
...	...	...
10	1	$\sim 0$

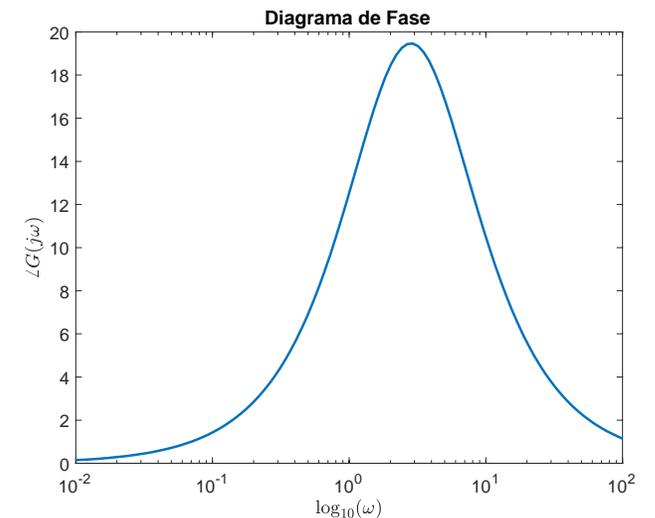
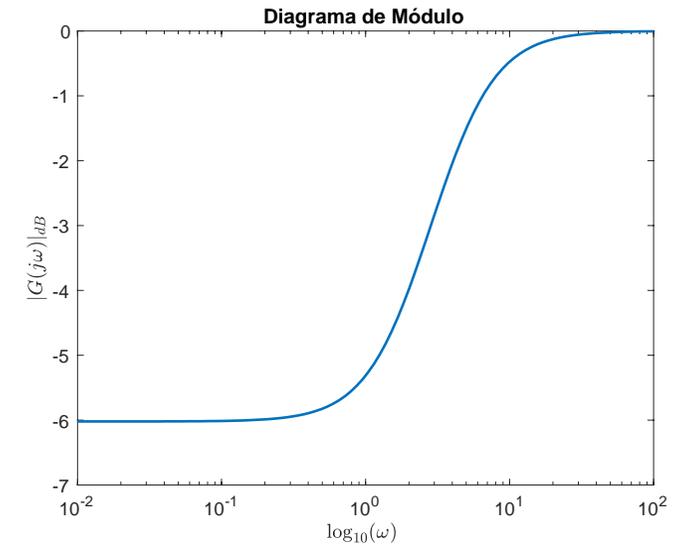
<i>Frequência</i> $\omega$	$A(\omega)$	$\phi(\omega)$
1	0,54	$12,5^\circ$
3	0,72	$19,5^\circ$
5	0,80	$16,9^\circ$



# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

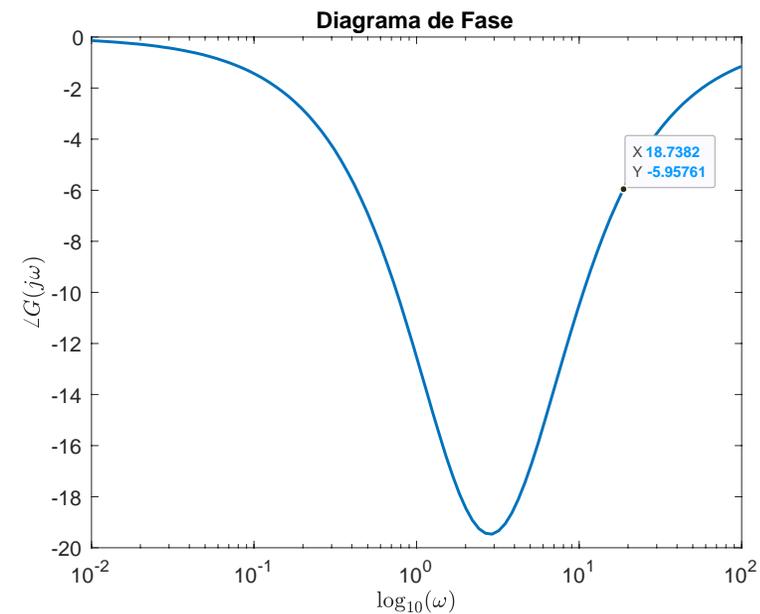
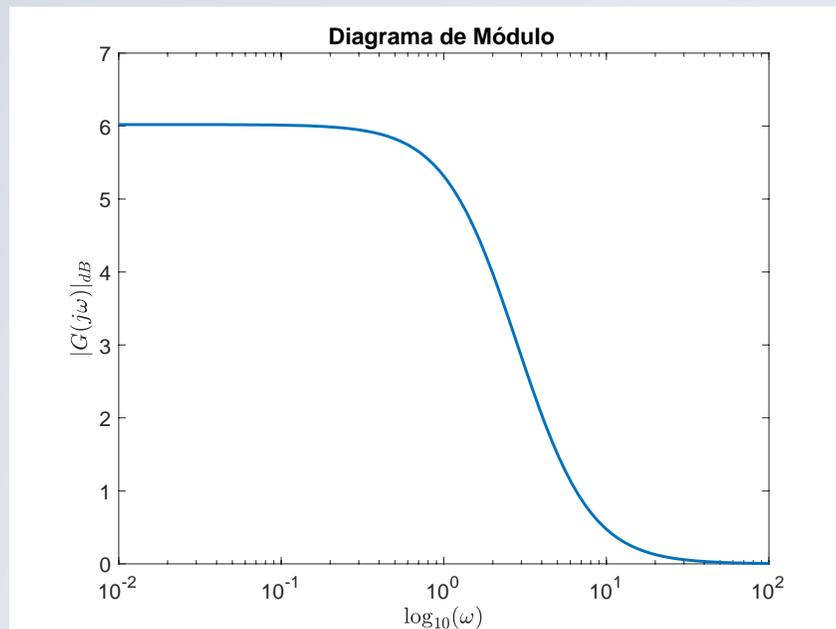
- Mais precisamente, construímos a tabela para diferentes valores entre  $\omega = 0,01$  e  $\omega = 100$ . Teremos

```
>> omega = logspace(-2,2,100);  
>> j=sqrt(-1);  
>> for i=1:length(omega)  
    A(i)=20*log10(abs((j*omega(i)+2)/(j*omega(i)+4)));  
    phi(i) = 180*phase ((j*omega(i)+2)/(j*omega(i)+4))/pi;  
end  
>> semilogx(omega,phi);  
>> lsemilogx(omega,A);
```



# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

- Observe que se consideramos o sistema  $G(s) = \frac{s+4}{s+2}$ , teremos as seguintes **RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA**:



# SINAIS SENOIDAIS EM SISTEMAS LIT

- Desta forma, conseguimos determinar o modelo de um sistema LIT através e sua resposta em frequência (gráfico assintótico), desde que sejam utilizadas para isso frequências próximas dos modos naturais do sistema.
- A estes gráficos de módulo e fase chamamos **Diagrama de Bode**.
- **Por que sinais do tipo degrau nos permitem identificar perfeitamente sistemas lineares e invariantes no tempo simples?**



# DIAGRAMA DE BODE

- Diagrama de Bode é a representação gráfica de  $A(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  para diferentes valores de  $\omega$ , sendo
  - frequência angular  $\omega$  em [rad/s] representada em escala logarítmica
  - módulo  $A(\omega)$  em decibéis, em escala linear
  - fase  $\phi(\omega)$  em graus, em escala linear
- O módulo de  $A(\omega)$  em decibéis é dado por  $A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$
- No MATLAB, o comando que nos apresenta o diagrama de bode é **bode(G)**, sendo  $G(s)$  o sistema.

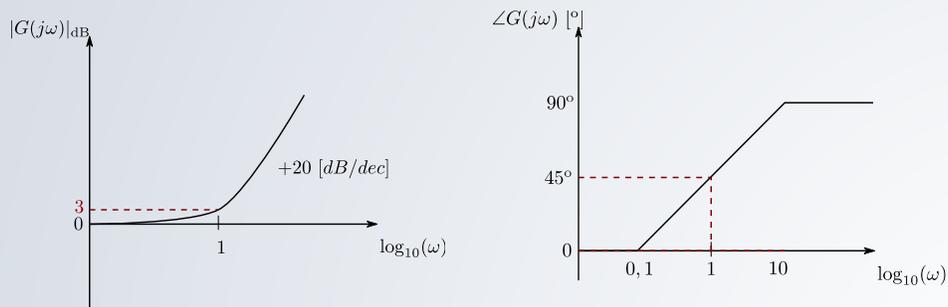


# DIAGRAMA DE BODE – CASOS BÁSICOS

■ Análise de algumas funções básicas:

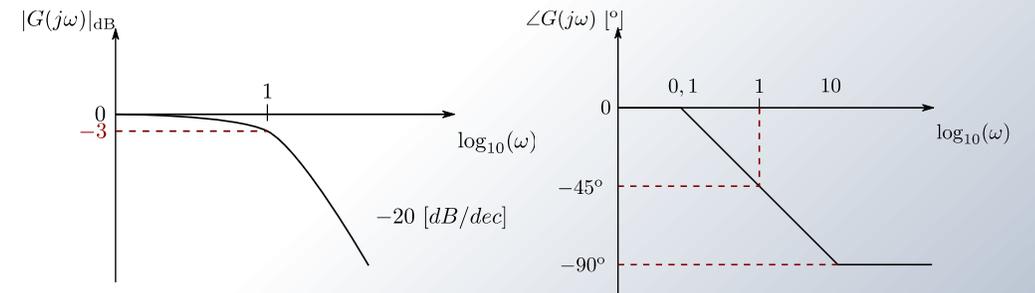
$$G(s) = s + 1$$

Frequência $\omega$	$A(\omega)$	$\phi(\omega)$
$\omega \downarrow$	$0dB$	$0^\circ$
$\approx \omega$	$+3dB$	$45^\circ$
$\omega \uparrow$	$20 \log_{10} \omega$	$90^\circ$



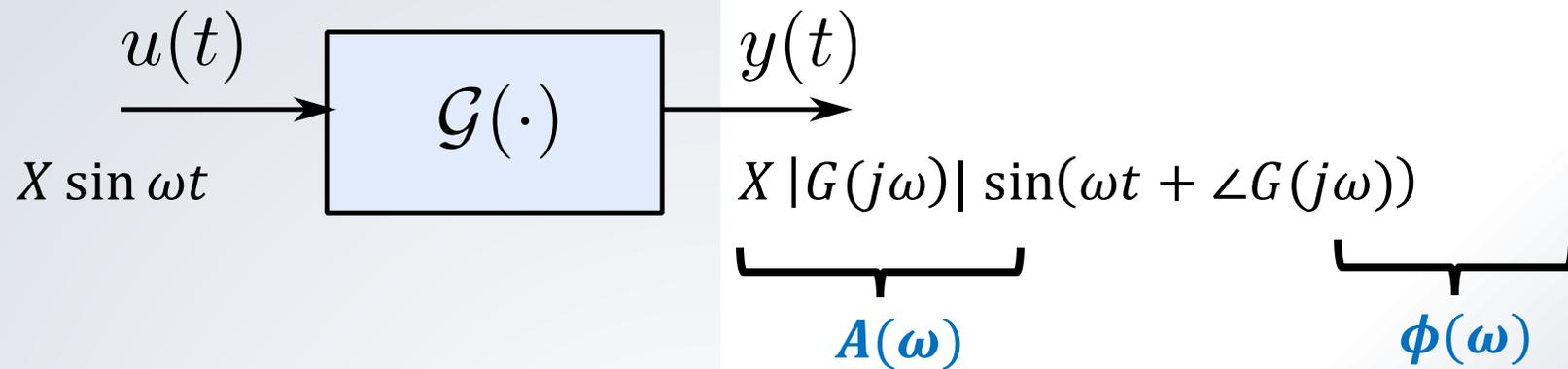
$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Frequência $\omega$	$A(\omega)$	$\phi(\omega)$
$\omega \downarrow$	$0dB$	$0^\circ$
$\approx \omega$	$-3dB$	$-45^\circ$
$\omega \uparrow$	$20 \log_{10} \omega$	$-90^\circ$



# DIAGRAMA DE BODE

- Gráficos que descrevem o modulo e a fase da resposta de um Sistema Linear,  $\mathcal{G}(\cdot)$ , a uma entrada senoidal do tipo



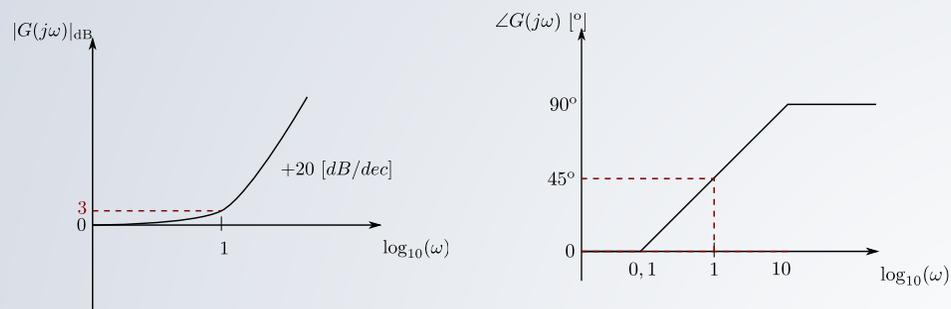
# DIAGRAMA DE BODE

■ O **DIAGRAMA DE BODE** é a representação gráfica de

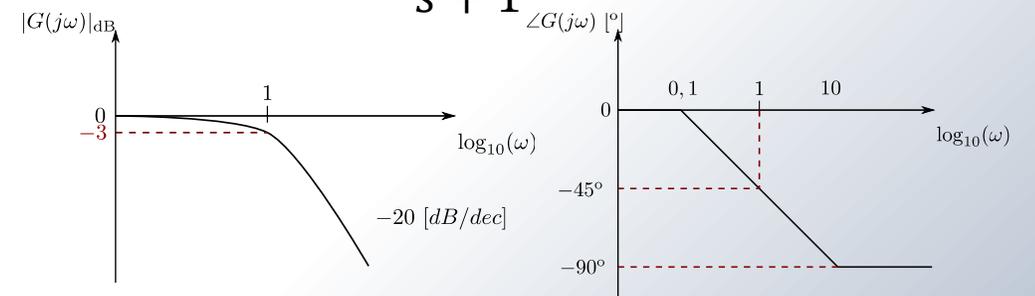
- $A_{dB}(\omega) \times \log_{10} \omega$  e
- $\phi(\omega) [^\circ] \times \log_{10} \omega$

■ Diagramas Básicos

$$G(s) = s + 1$$



$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$



# SISTEMA DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

- Sistema de fase mínima

todos os seus zeros estão localizados no semi-plano esquerdo complexo

- Sistema de fase não-mínima

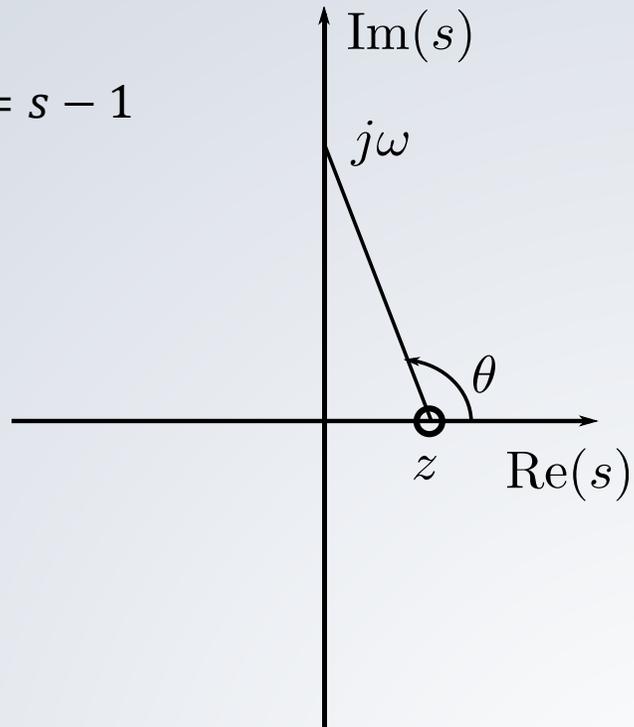
pelo menos um zero está localizado no semi-plano direito complexo



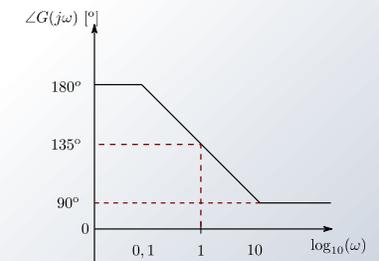
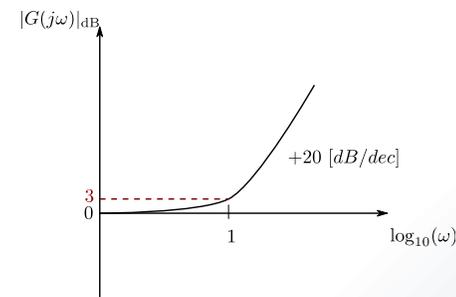
# DIAGRAMA DE BODE – FASE NÃO MÍNIMA

■ Neste caso,

$$G(s) = s - 1$$



Frequência $\omega$	$A(\omega)$	$\phi(\omega)$
$\omega \downarrow$	0dB	180°
$\approx \omega$	3dB	135°
$\omega \uparrow$	$20 \log_{10} \omega$	90°



# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

## ■ Diagrama de módulo

- Seja uma FT de um sistema Linear e Invariante no Tempo, Estável e de Fase Mínima

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Para  $\omega > 0$ ,  $\omega \uparrow\uparrow$ . Neste caso,

$$A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \frac{b_m}{a_n} + 20(m - n) \log_{10} \omega$$



Coeficiente linear (valor em  $\omega = 1$  [rad/s])



Coeficiente angular:  $20(n - m)$  [dB/dec]

# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

## ■ Diagrama de Módulo

- Para  $\omega > 0$ ,  $\omega \uparrow\uparrow$

Polo – decai com 20 dB/dec ou 6 dB/oit

Zero – cresce com 20 dB/dec ou 6 dB/oit

- Para  $\omega > 0$ ,  $\omega \downarrow\downarrow$

$$A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \frac{b_0(\text{Constante})}{a_0}$$

- Cruzamento das assíntotas, sendo  $n > m$ ,  $\omega_a = \left( \frac{b_0 a_n}{a_0 b_m} \right)^{\frac{1}{m-n}}$

# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

## ■ Diagrama de Módulo

$$A_{dB}(\omega) = \begin{cases} 20 \log_{10} \frac{b_0}{a_0} & , 0 < \omega \leq \omega_a \\ 20 \log_{10} \frac{b_m}{a_n} + 20(m - n) \log_{10} \omega & , \omega \geq \omega_a \end{cases}$$

■ Exemplos:  $G_1(s) = \frac{p}{s+p}$ ;  $G_2(s) = \frac{1}{s}$ ;  $G_3(s) = \frac{1}{z}(s + z)$ ;  $G_4(s) = s$ ;  $G_5(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

## ■ Diagrama de Fase

- Seja uma FT de um sistema Linear e Invariante no Tempo, Estável e de Fase Mínima

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Para  $\omega > 0$ ,  $\omega \uparrow\uparrow$ . Neste caso,

$$G(j\omega) \approx \frac{b_m}{a_n} s^{m-n} \rightarrow \angle G(j\omega) \approx (m - n) \frac{\pi}{2}$$



# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

## ■ Diagrama de Fase

- Para  $\omega > 0$ ,  $\omega \downarrow$

$$G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0} \rightarrow \angle G(j\omega) \approx \mathbf{0^\circ}$$

- Cruzamento das assíntotas, sendo  $n > m$ ,  $\omega_a = \left(\frac{b_0 a_n}{a_0 b_m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$ , como antes.
- Dada a descontinuidade em  $\omega = \omega_a$ , define-se  $\phi(\omega_a) = \angle G(j\omega_a)$ .

# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

## ■ Diagrama de fase

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_a \\ \angle G(j\omega_a), & \omega = \omega_a \\ (m - n) \frac{\pi}{2}, & \omega > \omega_a \end{cases}$$

■ Exemplos:  $G_1(s) = \frac{p}{s+p}$ ;  $G_2(s) = \frac{1}{s}$ ;  $G_3(s) = \frac{1}{z}(s + z)$ ;  $G_4(s) = s$ ;  $G_5(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

# DIAGRAMA DE BODE ASSINTÓTICO

■ Em resumo:

$$A_{dB}(\omega) = \begin{cases} 20 \log_{10} \frac{b_0}{a_0} & , 0 < \omega \leq \omega_a \\ 20 \log_{10} \frac{b_m}{a_n} + 20(m - n) \log_{10} \omega & , \omega \geq \omega_a \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_a \\ \angle G(j\omega_a), & \omega = \omega_a \\ (m - n) \frac{\pi}{2}, & \omega > \omega_a \end{cases}$$

em que  $\omega_a = \left( \frac{b_0 a_n}{a_0 b_m} \right)^{\frac{1}{m-n}}$ .

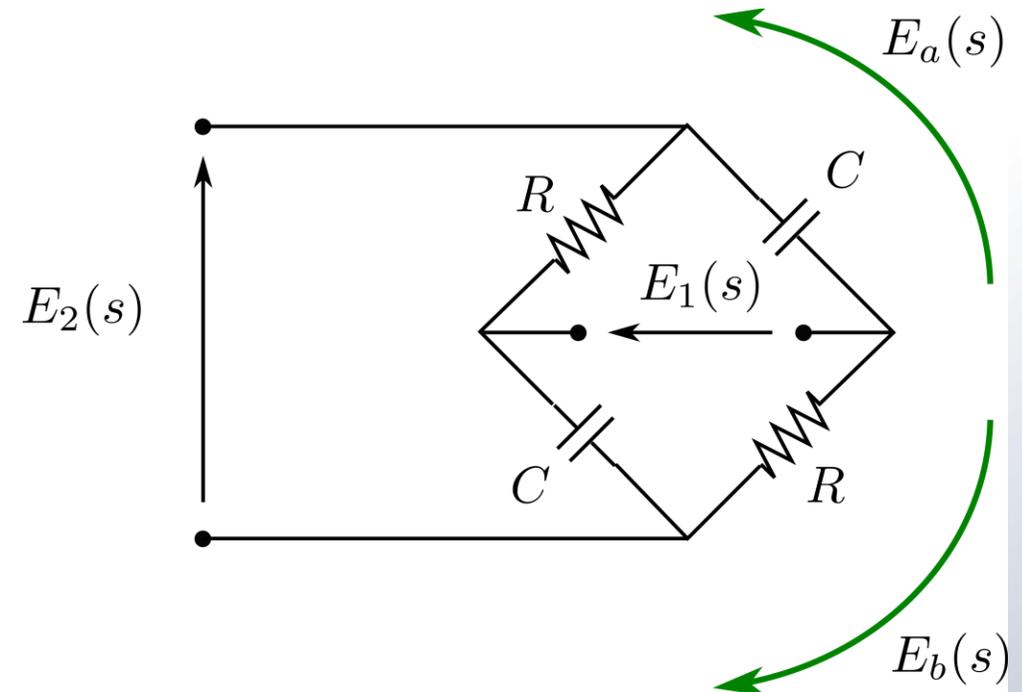
# EXEMPLO DE DIAGRAMA DE BODE

■ Seja o modelo de um circuito elétrico

$$E_2(s) = E_a(s) - E_b(s)$$

$$E_2(s) = E_1(s) \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} - E_1(s) \frac{R}{1/sC + R}$$

$$E_2(s) = E_1(s) \frac{1 - RCs}{1 + RCs}$$



# EXEMPLO DE DIAGRAMA DE BODE

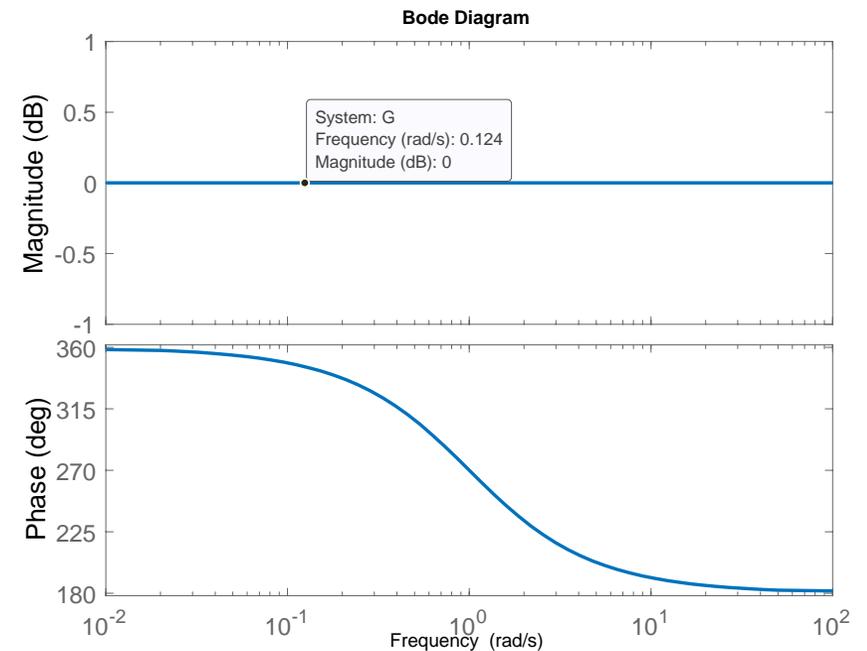
■ Para  $R [\Omega] = C [F] = 1$ ,

$$G(s) = \frac{1 - s}{1 + s}$$

■ Diagrama Assintótico:

$$A_{dB}(\omega) = 0, \omega > 0$$
$$\phi(\omega) = \begin{cases} 360^\circ, & \omega < 1 \\ 180^\circ, & \omega > 1 \end{cases}$$

■ Diagrama de Bode



# REQUISITOS DE PROJETO (FREQUÊNCIA)

- **VALOR DE PICO MÁXIMO** – valor da TF calculada na frequência de ressonância  $\omega_r$ , sendo
$$|G(j\omega_r)| = \max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)|$$

- $G(s) = \frac{1}{\sigma s + 1}$

- $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\omega_r = 0 [\text{rad/s}] \Rightarrow M_r = |G(j\omega_r)| = 1$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Válido para  $0 \leq \xi \leq \sqrt{2}/2$

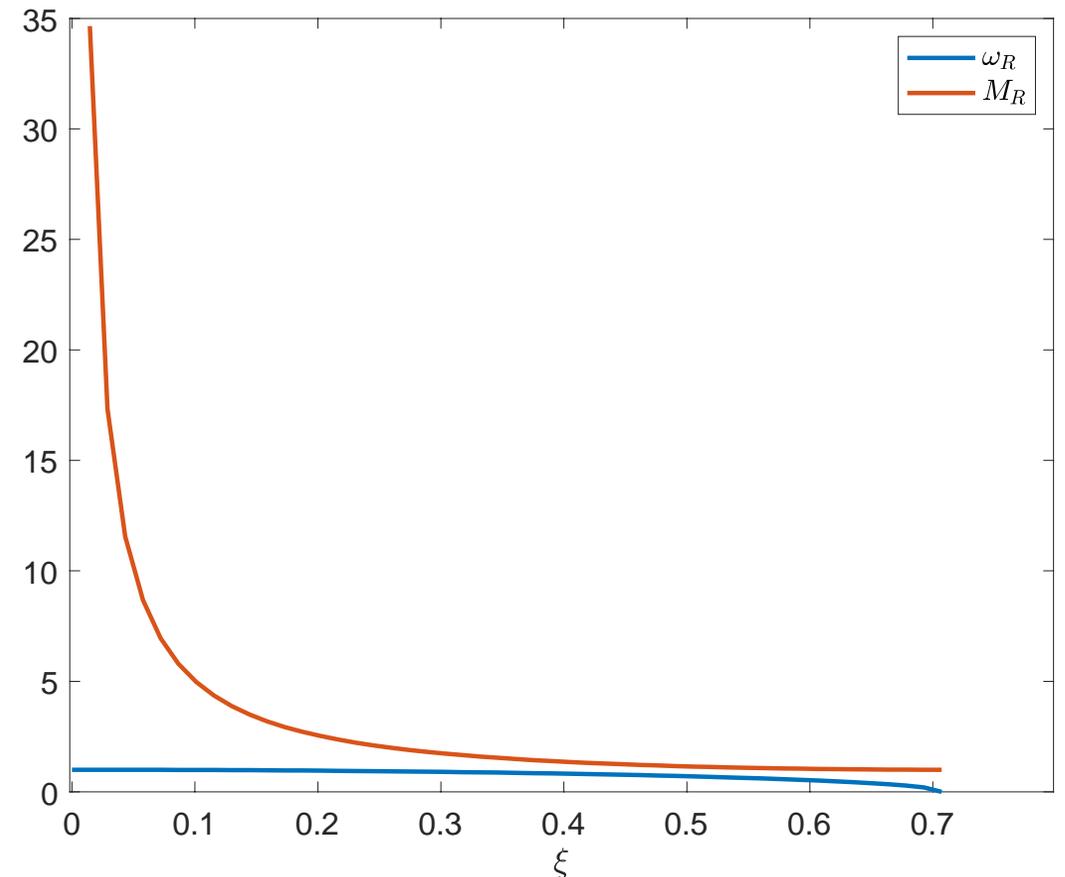
# REQUISITOS DE PROJETO (FREQUÊNCIA)

## ■ Pico máximo

■  $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_r \rightarrow \omega_n$

■  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_r = |G(j\omega_r)| = 1$

■  $\omega_r \leq \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \leq \omega_n$



# REQUISITOS DE PROJETO (FREQUÊNCIA)

- **LARGURA DE FAIXA** – menor intervalo  $[0, W]$  tal que

$$|G(jW)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |G(j0)|$$

$W$  é conhecida como **FREQUÊNCIA DE CORTE**.

- Frequência para a qual o sinal decai  $3dB$ , metade de sua potência de baixa frequência.
- $W_{min} \leq \omega_B \leq W_{max}$

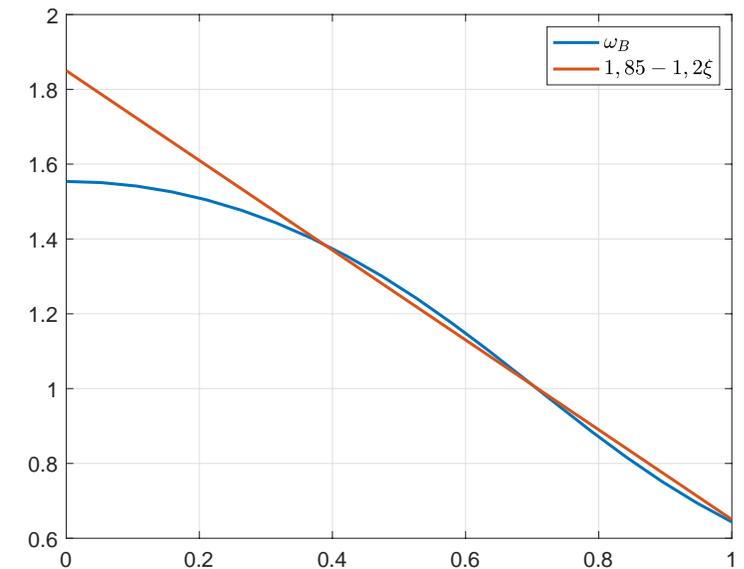
# REQUISITOS DE PROJETO (FREQUÊNCIA)

- A largura de banda está relacionada com
  - Velocidade de resposta do sistema
  - Capacidade do sistema filtrar ruídos de alta frequência

■ Pode ser calculada como

$$\blacksquare G(s) = \frac{1}{\sigma s + 1} \quad \longrightarrow \quad \omega_B = 1/\sigma$$

$$\blacksquare G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \longrightarrow \quad \omega_B = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \approx \omega_n(1,85 - 1,2\xi),$$
$$\omega_B \approx \omega_n, \quad 0,35 \leq \xi \leq 1$$



# MARGENS DE ESTABILIDADE

- **MARGENS DE ESTABILIDADE** – indicam o quanto podemos variar a fase ou o módulo de um sistema de forma que, ao fechar a malha, ele SE MANTENHA ESTÁVEL.
- Para um sistema com realimentação negativa unitária com equação característica:

$$C(s)G(s) = -1 \quad \Rightarrow \quad |C(s)G(s)| = 1, \angle C(s)G(s) = (2\kappa - 1)180^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}$$



# MARGENS DE ESTABILIDADE

## ■ Definindo

- $\omega_f$  tal que  $\angle C(j\omega_f)G(j\omega_f) = (2\kappa - 1)180^\circ$

- $\omega_g$  tal que  $|C(j\omega_g)G(j\omega_g)|_{dB} = 0$

## ■ MARGEM DE GANHO (*MGanho*) –

$$MGanho = -|C(j\omega_f)G(j\omega_f)|_{dB}$$

## ■ MARGEM DE FASE (*MFase*) –

$$MFase = 180^\circ + \angle C(j\omega_g)G(j\omega_g)$$

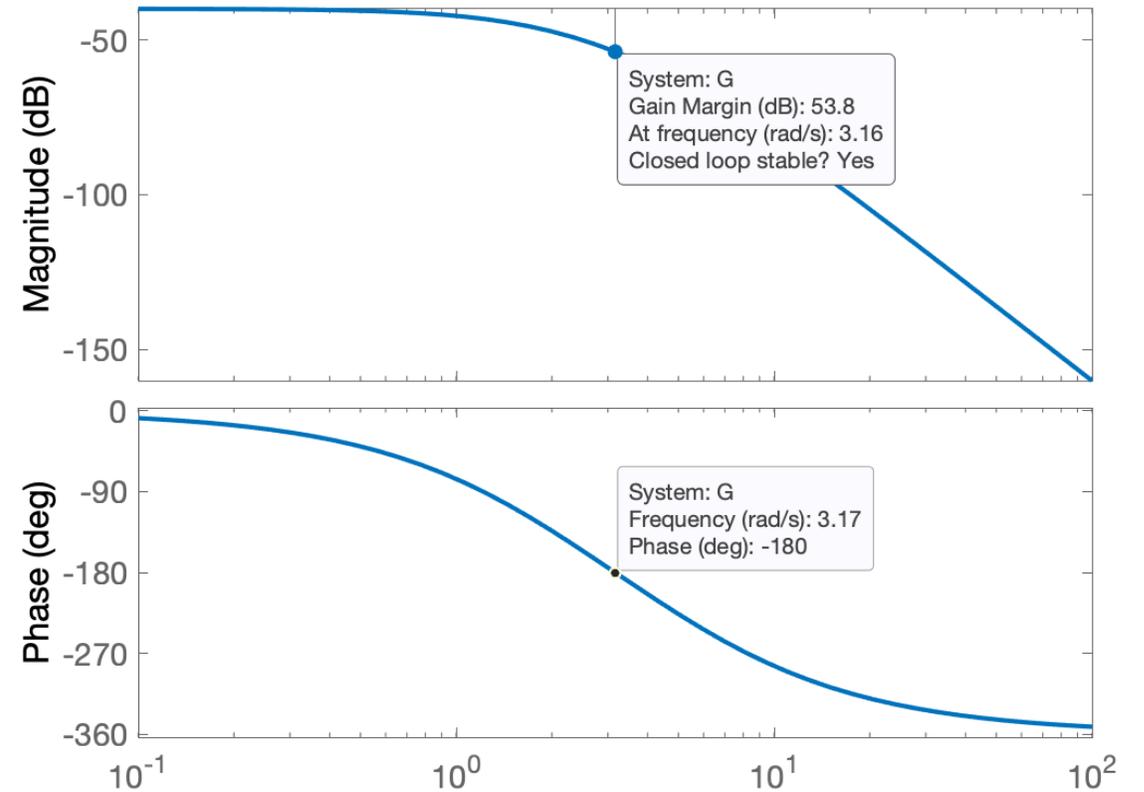
# MARGENS DE ESTABILIDADE

$$G(s) = \frac{1}{(s + 5)^2(s + 2)^2}$$

>> bode(G) →

$$MFase = \infty$$

$$MGanho = 53.8 \text{ dB}$$



# MARGENS DE ESTABILIDADE

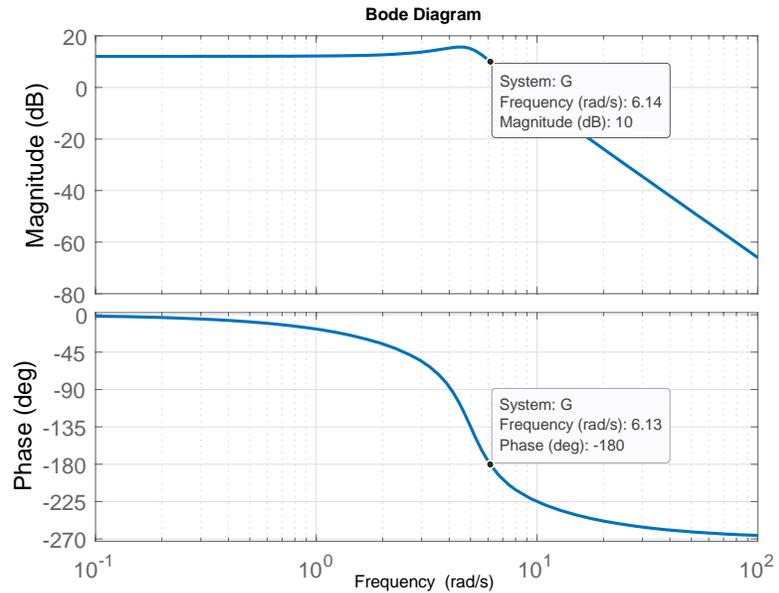
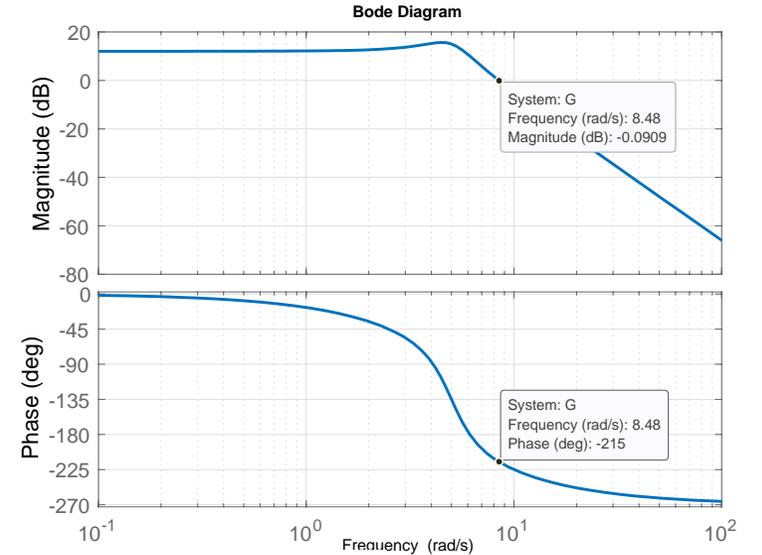
$$G(s) = \frac{500}{(s + 5)(s^2 + 2,5s + 25)}$$

>> bode(G)

$$MFase = -35^\circ$$

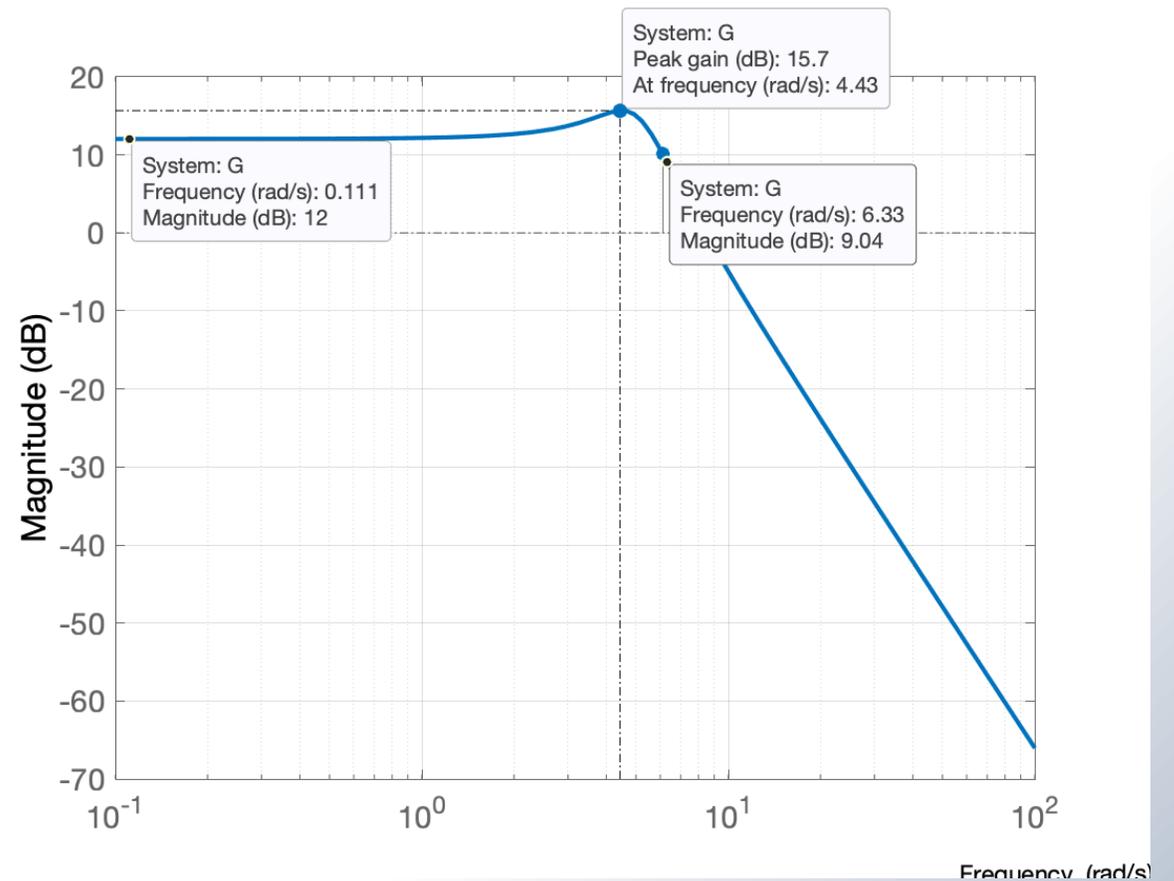
$$MGanho = -10dB$$

>> margin(G)



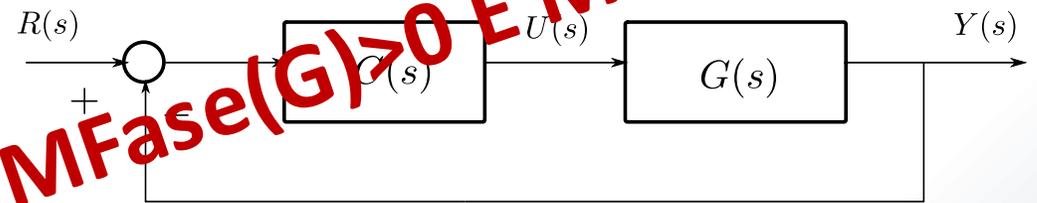
# EXEMPLO DE REQUISITOS DE PROJETO

- Na FT anterior, pode-se observar os requisitos estudados
  - Valor de Pico Máximo –  $15,7 \text{ dB}$
  - Largura de Faixa –  $6,33 \text{ rad/s}$
  - Frequência de Corte –  $6,33 \text{ rad/s}$



# MARGENS DE ESTABILIDADE

■ Fechando a malha nos exercícios anteriores, considerando  $C(s) = K$



■  $G(s) = \frac{1}{(s+5)^2(s+2)^2} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^4+14s^3+69s^2+140s+101} \rightarrow p \approx (-5 \pm 0,3j; -2 \pm 0,3j)$

■  $G(s) = \frac{500}{(s+5)(s^2+2,5s+25)} \rightarrow F(s) = \frac{500}{s^3+7,5s^2+37,5s+625} \rightarrow p \approx (-10; 1,25 \pm 7,8j)$

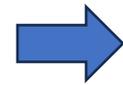
**Estabilidade de F(s), deve-se ter MFase(G) > 0 E MGanho(G) > 1**



# MARGENS DE ESTABILIDADE

## ■ Margem de Fase $|G(j\omega)| = 1$

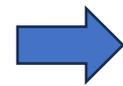
■  $F(s) = \frac{1}{\sigma s + 1} \rightarrow F(s) = \frac{1/\sigma s}{1 + 1/\sigma s} \rightarrow G(s) = \frac{1}{\sigma s}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_f = \frac{1}{\sigma}; \\ \angle G\left(j\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) = -90^\circ \rightarrow MFase(G(s)) = 90^\circ \end{array} \right.$$

■  $F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow F(s) = \frac{\omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s)}{1 + \omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s)}$

$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$ ;



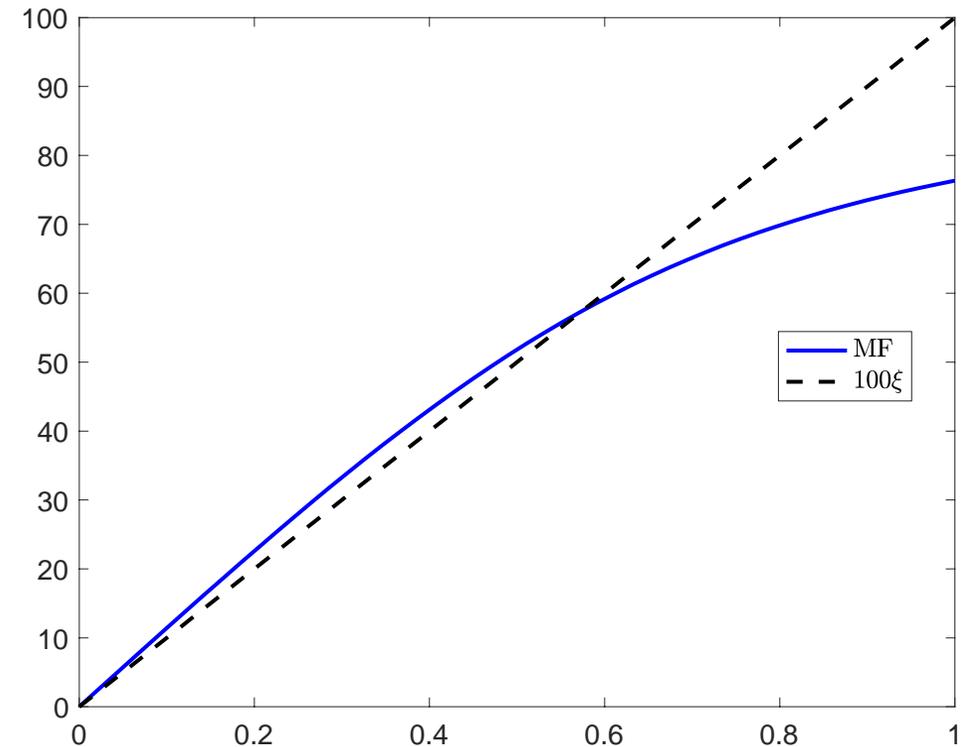
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_f = \omega_n \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}} \\ MFase(G(s)) = \text{atan} \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}} \end{array} \right.$$



# MARGENS DE ESTABILIDADE

■ Para  $0 \leq \xi \leq 0,7$ , pode-se

aproximar  $MFase \approx 100\xi$



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AJUSTE DE GANHO

- Considere o sistema com FT dada por

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 3)(s + 9)}$$

Deseja-se determinar  $K$  de forma a  $G(s)$  ter margem de ganho  $MGanho = 10 \text{ dB}$ .

**Passo 1:** Desenhar o Diagrama de Bode de  $G(s)$ .

**Passo 2:** Determinar a Margem de ganho atual.

**Passo 3:** Determinar o valor de ganho que leva à  $MGanho$  desejada.

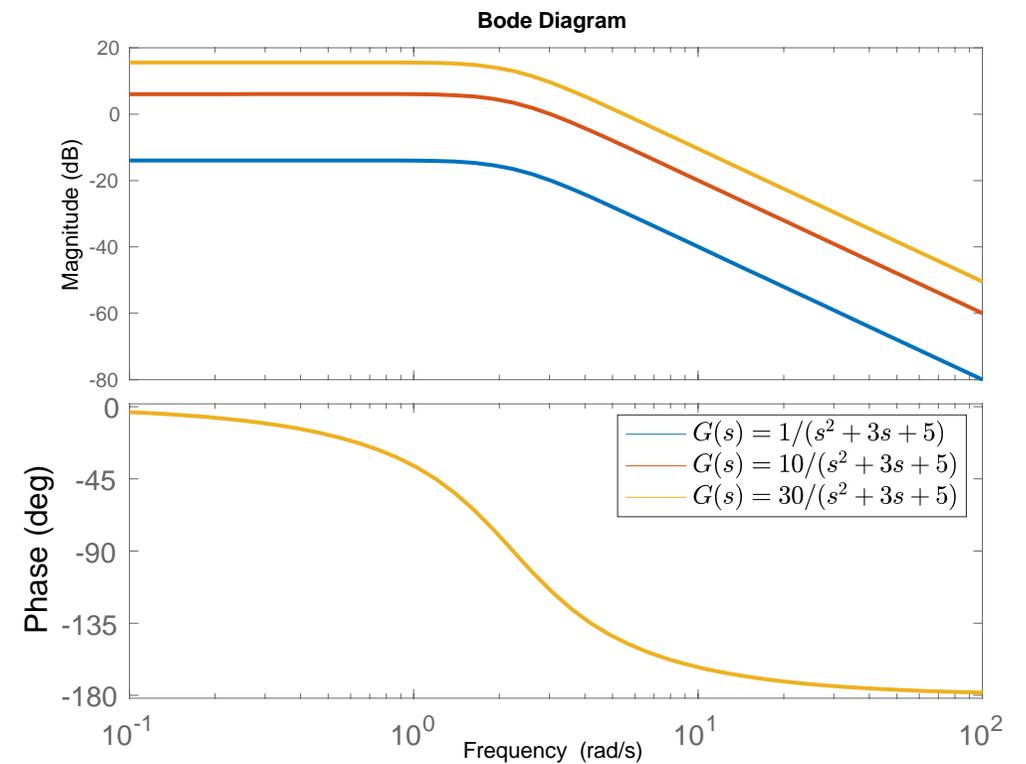


# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AJUSTE DE GANHO

## ■ Efeito do Ganho no Diagrama de Bode

$$20 * \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$$

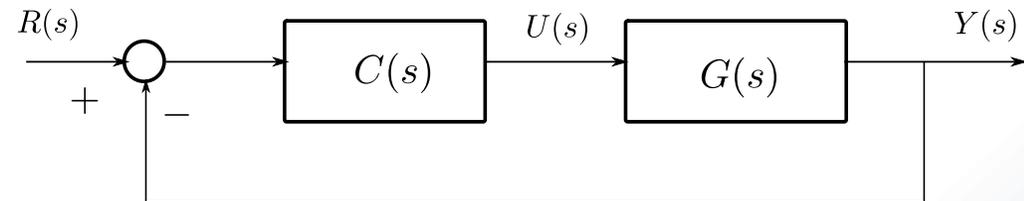
$$20 * \log_{10} 30 \approx 30 \text{ dB}$$



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AJUSTE DE GANHO

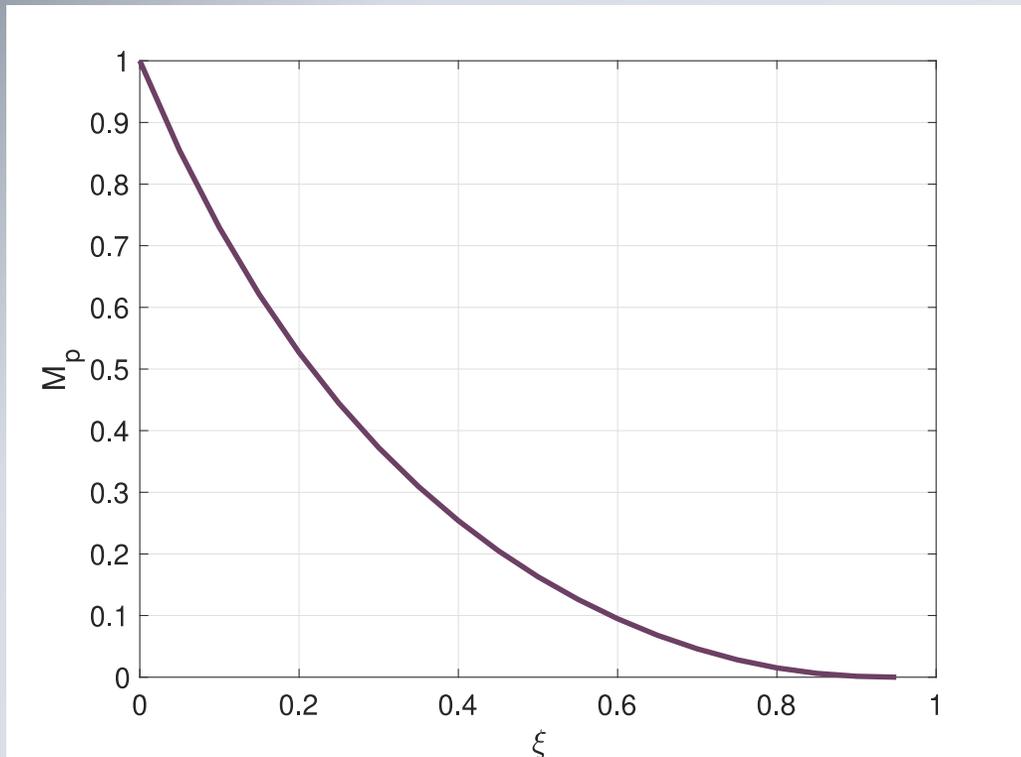
- Considere agora o projeto um controlador proporcional na malha

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 50)(s + 120)}$$



**Deseja-se projetar  $C(s) = K$  de forma ao sistema realimentado responder ao degrau unitário com ultrapassagem máxima de 20%.**

# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AJUSTE DE GANHO



$$M_p \leq 20\% \Rightarrow \xi \geq 0,5$$

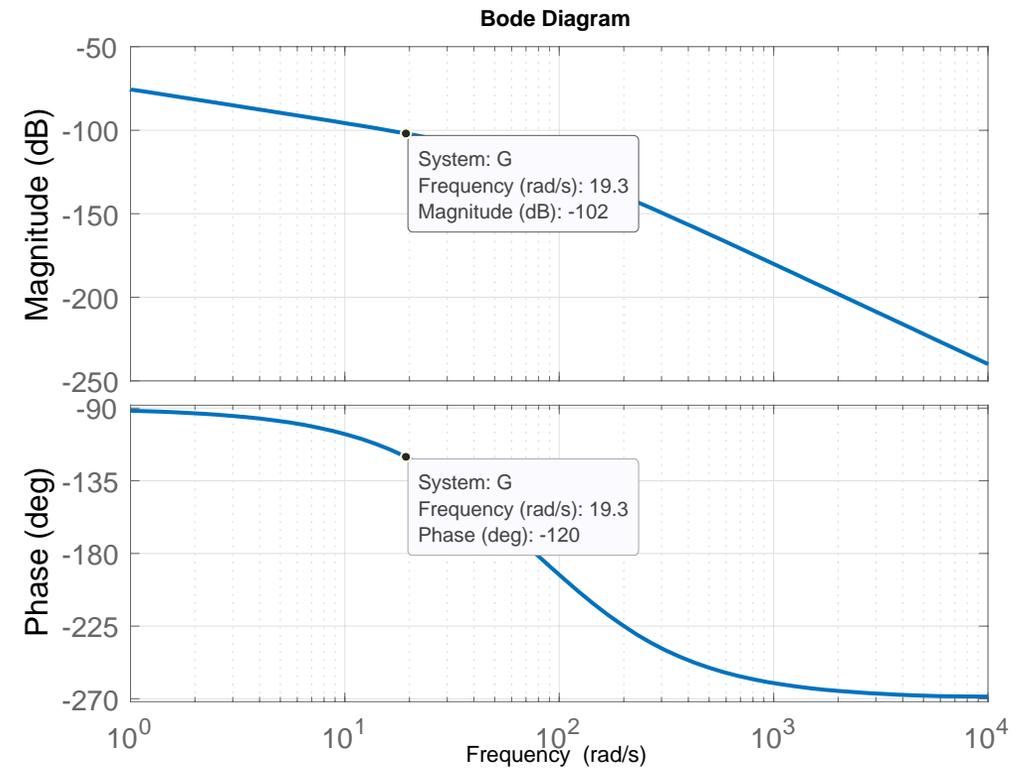
$$\xi = 0,6 \Rightarrow MFase = 60^\circ$$

# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AJUSTE DE GANHO

■  $\angle G(j\omega) = -120^\circ \Rightarrow \omega = 19,3 \frac{rad}{s}$

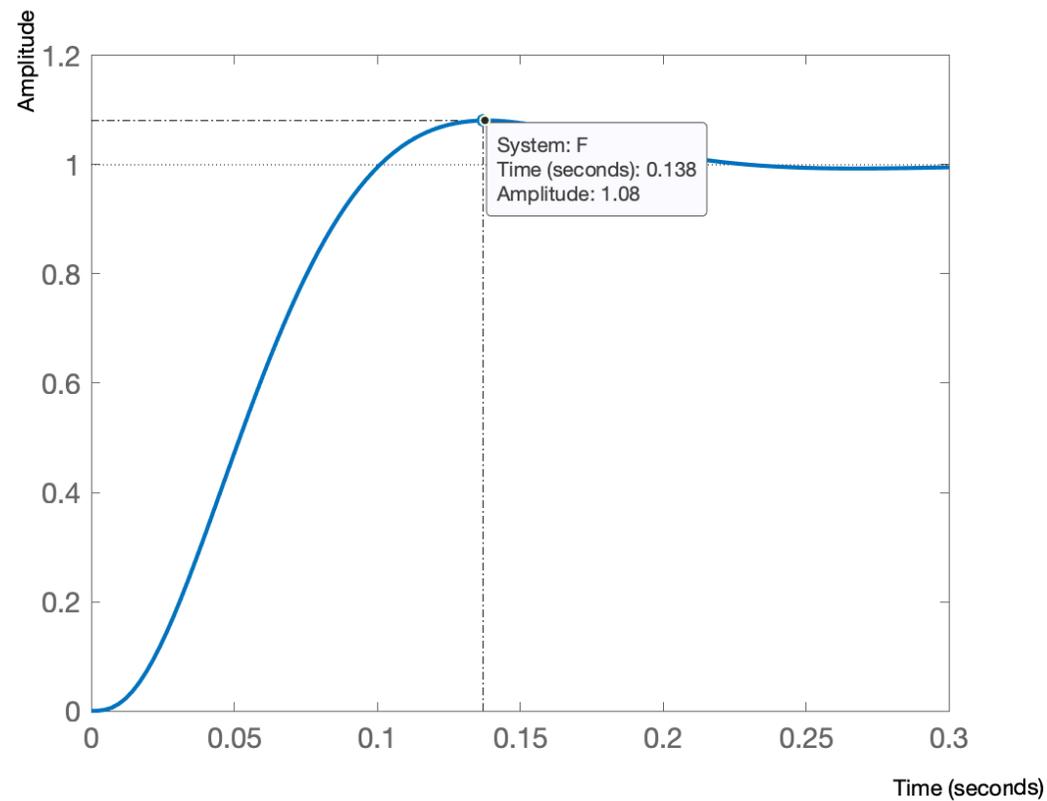
■  $|G(j19,3)| = -102dB$

■  $K = 125.890$



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AJUSTE DE GANHO

$$\blacksquare F(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$



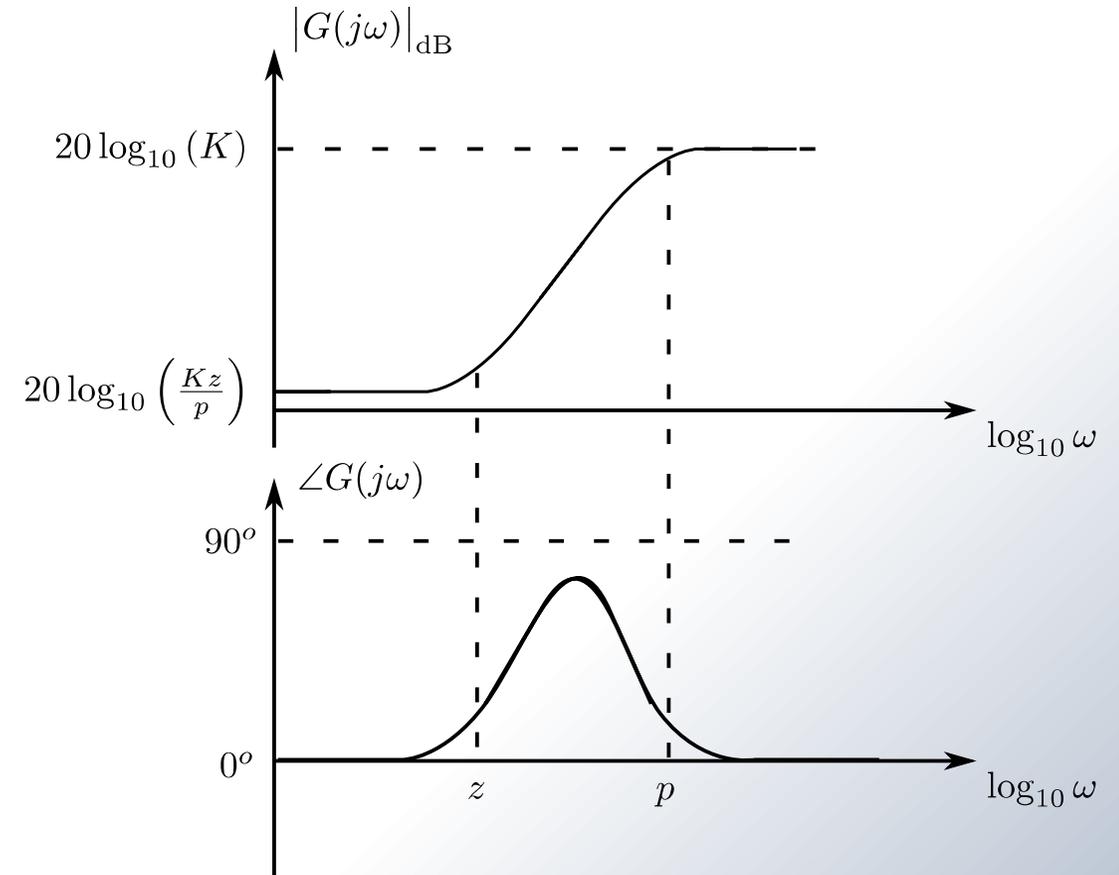
# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AVANÇO E ATRASO

■ Controladores de avanço e atraso são do tipo

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p}$$

■  $\angle C(j\omega) = \text{atan} \frac{\omega}{z} - \text{atan} \frac{\omega}{p}$

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{1/z}{1 + (\omega/z)^2} - \frac{1/p}{1 + (\omega/p)^2}$$



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AVANÇO E ATRASO

■ O ponto de máxima (mínima) contribuição de fase será em

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = 0 \Rightarrow \frac{1/z}{1 + (\omega/z)^2} - \frac{1/p}{1 + (\omega/p)^2} = 0$$

$$\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right) - \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{\omega^2}{z^2} \right) = 0 \Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{zp} \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

■ Assim,  $\angle C(j\omega_{max}) = \text{atan} \frac{1-z/p}{2\sqrt{z/p}} = \text{asin} \frac{1-z/p}{1+z/p}$

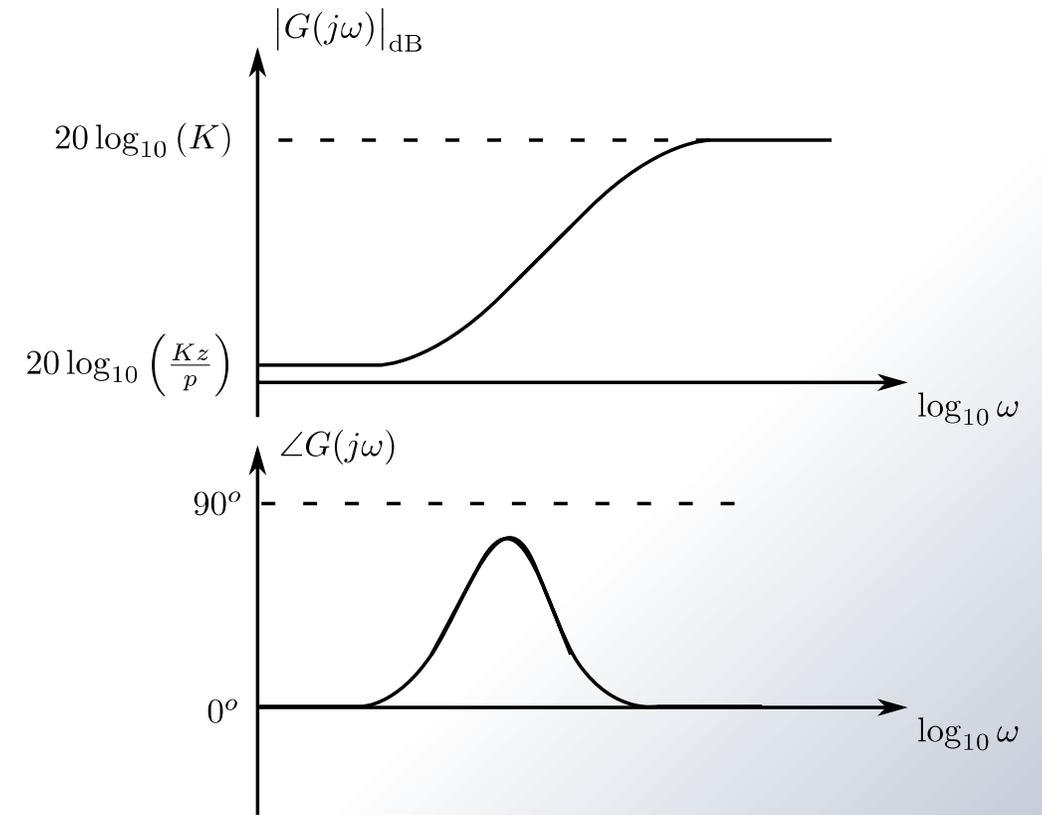
$$e \quad |C(j\omega_{max})| = K \sqrt{\frac{z}{p}}$$

# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE – AVANÇO

- Relembrando, o compensador por avanço de fase é do tipo

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p}, \quad z < p$$

- Seu Diagrama de Bode é apresentado ao lado.
- Melhora a margem de fase do sistema.



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - AVANÇO

1. Definir  $K$  para atender os requisitos de estado estacionário;
2. Determina-se a  $MFase$  de  $KG(s)$  sem compensação de fase;
3. Determinar o ganho de fase para o compensador  $\phi_{av} = MFase_{desejada} + 10^\circ - MFase$ ;
4. Determinar a relação  $z/p$  a partir da  $\phi_{av}$ ;
5. Determinar  $|C(j\omega_{av})| = \sqrt{z/p}$ . (Note que  $K$  já está contemplado no Bode do passo 2).
6. Determinar  $\omega_{av}$  de forma a  $|C(j\omega_{av})||G(j\omega_{av})| = 1$ ;
7. Determinar  $z$  e  $p$  tais que  $\omega_{av} = \sqrt{zp} = p\sqrt{z/p}$ ;
8. Verificar o projeto e ajustar se necessário.



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - AVANÇO

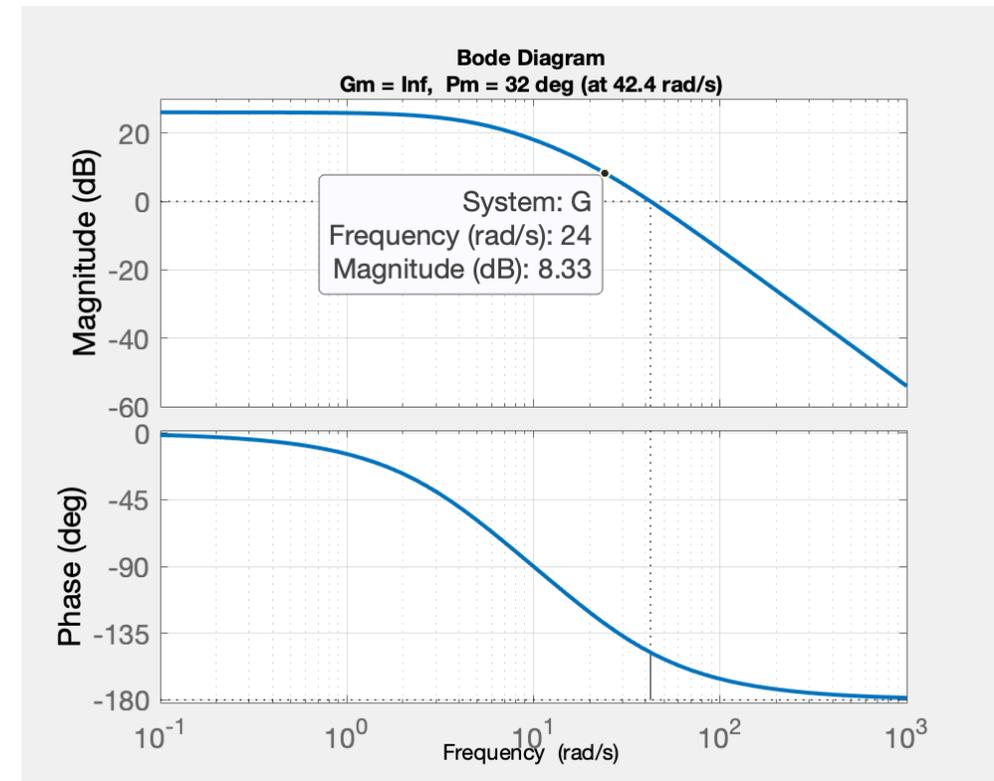
- Projetar um compensador por avanço de fase que respeite, em malha fechada, um máximo sobressinal de 16,5%.

$$G(s) = \frac{20}{s^2 + 25s + 100}$$

- Para  $\xi > 0,7 \Rightarrow MFase = 70^\circ$

# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - AVANÇO

- O diagrama de Bode para  $G(s)$  encontra-se ao lado.
- $MFase = 32^\circ$ .  $\phi_{av} = 70^\circ + 10^\circ - 32^\circ$ .
- $\sin 48^\circ = \frac{1-z/p}{1+z/p} \Rightarrow \frac{z}{p} = 0,15 \Rightarrow \sqrt{\frac{z}{p}} = 0,38$   
 $|G(j\omega_{av})| = 8,3 \text{ dB} \Rightarrow \omega_{av} = 24 \text{ rad/s}$
- $p = 24/0,38 = 63$  e  $z = 0,15 * 63 = 9,45$   
 $C(s) = (s + 9,45)/(s + 63)$
- Sobressinal de 0%  $\longrightarrow$  **ADEQUADO!!!**
- Caso o projeto não atenda os requisitos iniciais deve-se refazer.

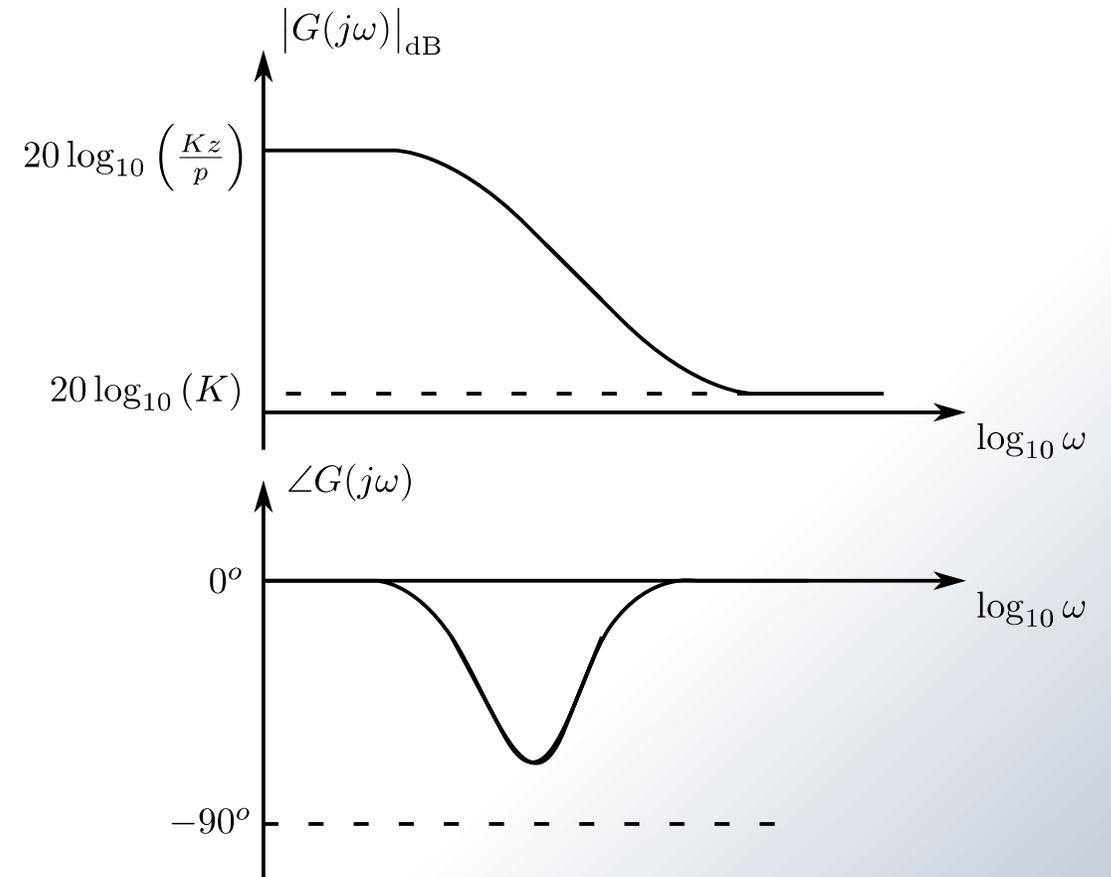


# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - ATRASO

- Relembrando, o compensador por atraso de fase é do tipo

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p}, \quad z > p$$

- Seu Diagrama de Bode é apresentado ao lado.
- Alteração de ganho em altas frequências que permite um ganho de fase.



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - ATRASO

1. Determinar  $K$  de forma a satisfazer **requisitos de estado estacionário**;
2. Determinar a **MFase** desejada  $5^\circ$  a  $12^\circ$  acima da especificada para satisfazer os requisitos de regime transitório;
3. Determinar, através do Diagrama de Bode de Fase de  $KG(s)$ ,  $\omega_f$  que produz a MFase desejada para a MF;
4. Verificar o ganho de alta frequência necessário  $A = -|G(j\omega_f)|_{dB}$ ;
5. Determinar a relação  $z/p$  de forma a  $A = 20 \log_{10} p/z$ ;
6. Escolher  $z \ll \omega_f$  ( $\approx 10 \times$ ) e determinar  $p$  através da relação  $z/p$ .
7. Compensar o ganho de estado estacionário com a relação  $z/p$ , verificar o projeto e ajustar caso necessário.



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - ATRASO

- Projete um compensador por atraso de fase que reduza o erro em regime de MALHA FECHADA em 10 vezes e que respeite o valor de máxima ultrapassagem de 10%.

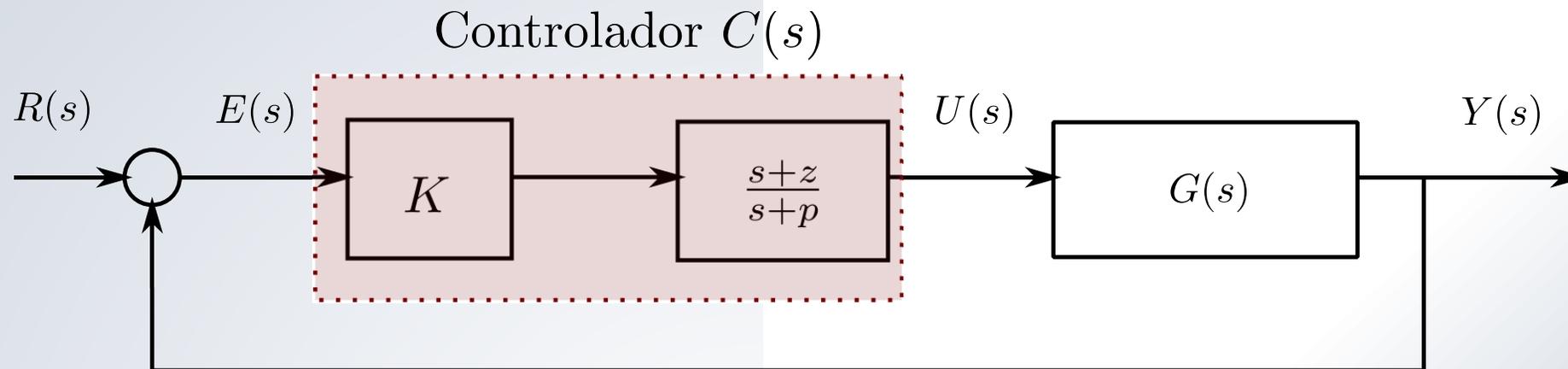
$$G(s) = \frac{600000}{s(s + 50)(s + 120)}$$

- Erro em regime de MF:

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \left( \frac{s^3 + 170s^2 + 6000s}{s^3 + 170s^2 + 6000s + 600000} \right) = 0,01$$

# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - ATRASO

- O procedimento refere-se a um projeto em cascata para uma estrutura do tipo



# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - ATRASO

Assim,

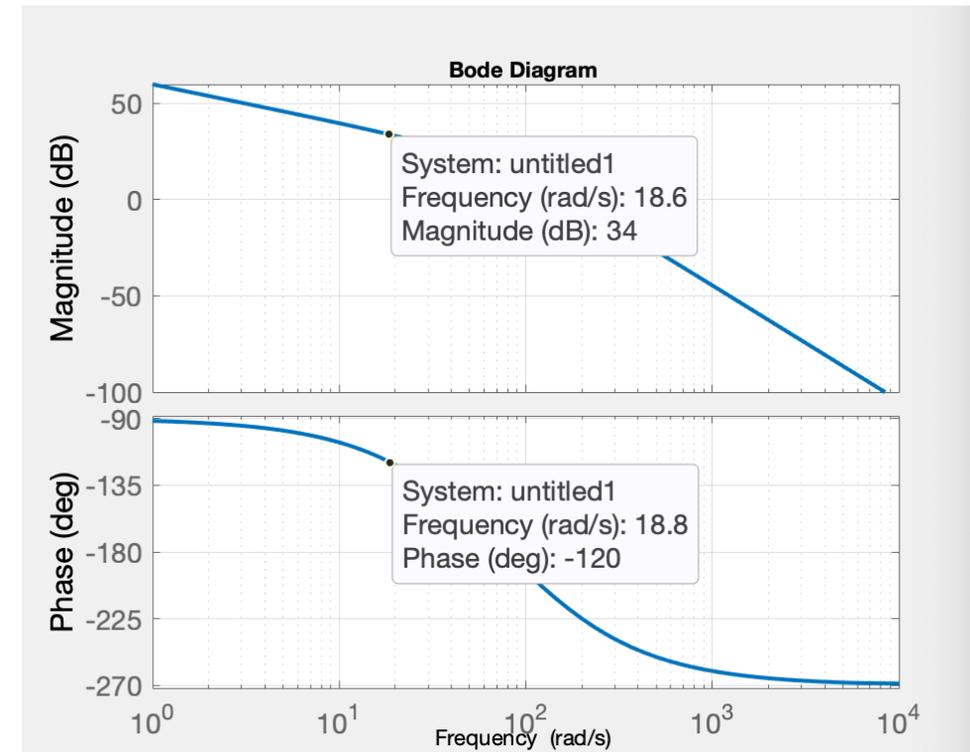
$$\frac{6000}{600000K} = 0,001 \rightarrow K = 10$$

**Folga na escolha de  $\xi$**

**Folga na escolha de  $MFase$**

1.  $M_p = 10\% \rightarrow \xi = 0,6 \rightarrow MFase (desejada) = 60 + 10 = 70^\circ$
2.  $Bode(10G(j\omega)) : MFase = 70^\circ \rightarrow \omega = 18,8 \text{ rad/s}$
3.  $|G(j18,8)|_{dB} = 34 \text{ dB} \rightarrow A = -34 \text{ dB} \Rightarrow \frac{p}{z} = 0,02$   
 $z \ll 18,8 \rightarrow z = 1,9 \rightarrow p = 1,9 * 0,02 = 0,038$

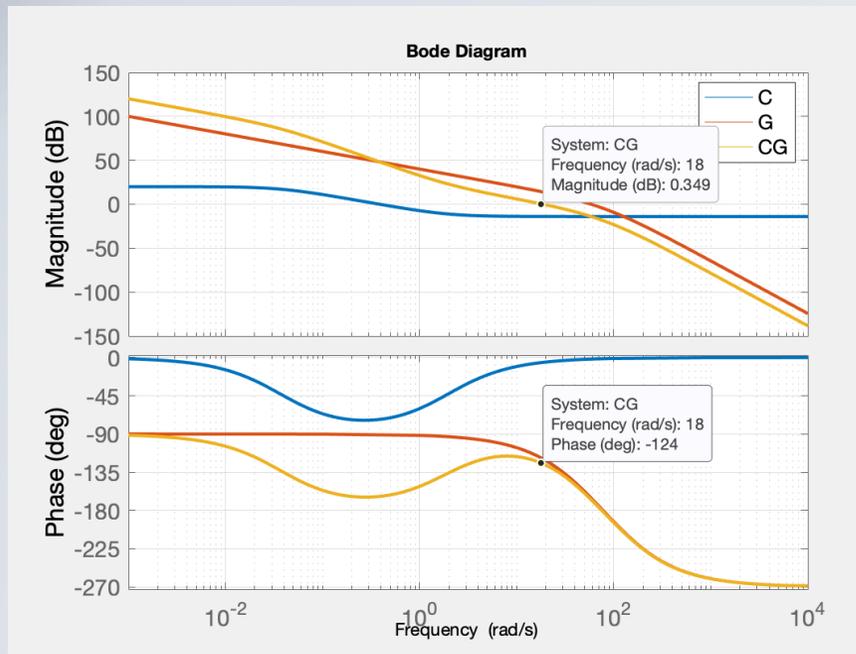
>>bode(K\*G)



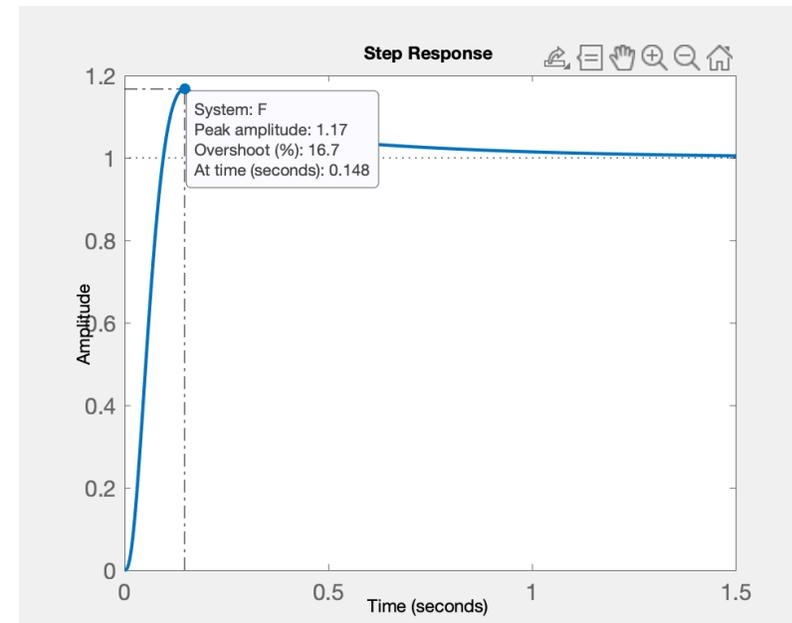
# PROJETO UTILIZANDO DIAGRAMA DE BODE - ATRASO

■ O controlador projetado é  $C(s) = 0,2 \frac{s+1,9}{s+0,038}$

$C(j\omega)G(j\omega)$



$F(s)$



# MATERIAL ADICIONAL

## ■ Leituras:

- Leitura Complementar 07 (Resposta em Frequência)
- Leitura Complementar 09 (Diagrama de Bode)
- Leitura Complementar 10 (Projeto Utilizando Diagrama de Bode)



# PRÓXIMA AULA

- Diagrama de Nyquist

