

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 27/12/2024.

EES22 CONTROLE CLÁSSICO I

Princípio da Variação do Argumento. Critério de Nyquist. Projeto utilizando o Critério de Nyquist.



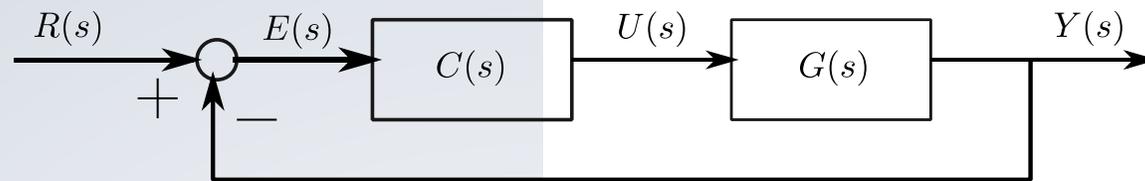
ASSUNTOS

- Critério de Estabilidade de Nyquist
- Princípio da Variação do Argumento
- Diagrama de Nyquist



CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

- Dado uma planta $G(s)$ que desejamos controlar através de uma malha de controle do tipo



- Neste, caso a FT de malha fechada é dada por

$$F(s) = \frac{\bar{G}(s)}{1 + \bar{G}(s)}; \quad \bar{G}(s) = C(s)G(s)$$

- Desejamos conhecer sobre a estabilidade de $F(s)$ tendo conhecimento sobre as raízes de $\bar{G}(s)$, sem conhecer a solução de $\Delta(s) = 1 + \bar{G}(s) = 0$.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

■ TEOREMA (Critério de Nyquist)

Todas as raízes da equação algébrica $1 + \bar{G}(s) = 0$ estão localizadas no semiplano esquerdo complexo, definido por $Re(s) > 0$, **SE, E SOMENTE SE** o **mapeamento da curva fechada C através de $\bar{G}(s)$** , for tal que

$$N_{voltas} + N_p = 0$$

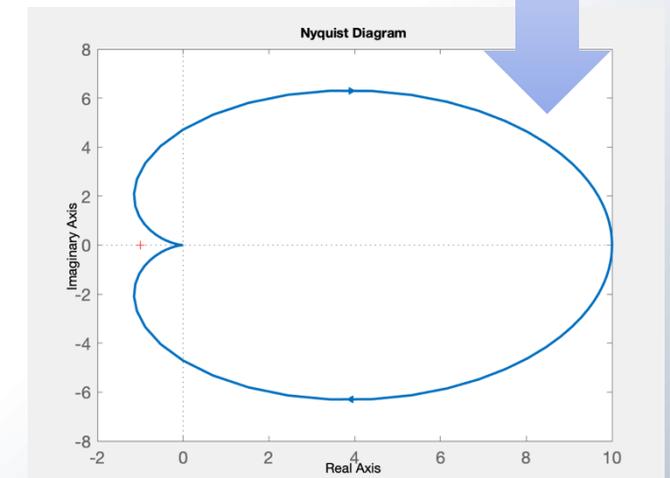
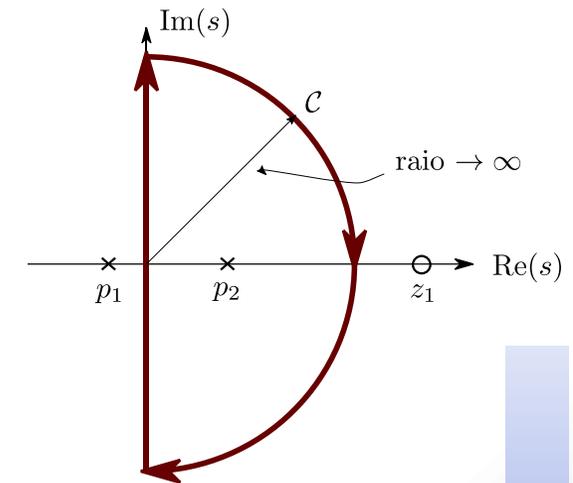
Sendo, N_{voltas} o número de voltas que o mapeamento dá em torno de -1 .

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

- Dada uma curva fechada \mathcal{C} no plano $Im(s) \times Re(s)$ e seu mapeamento através de $\bar{G}(s)$ no plano $Re(\bar{G}(s)) \times Im(\bar{G}(s))$, se
 - N_p é o número de **polos de $\bar{G}(s)$ dentro de \mathcal{C}** e
 - N_z é o número de **raízes de $\bar{G}(s) = -1$ dentro de \mathcal{C}**
 - N_{voltas} é o número de voltas em torno do **ponto crítico -1**

então,

$$N_z = N_{voltas} + N_p$$



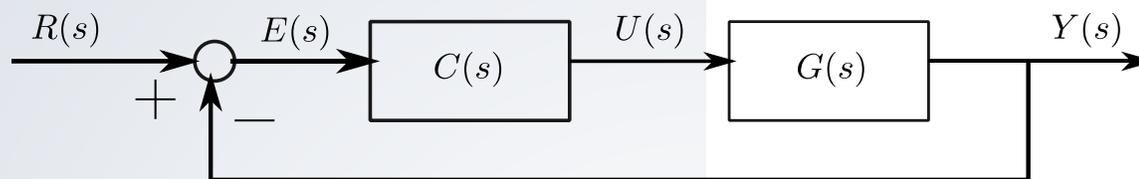
CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

- A prova do Teorema de Nyquist decorre diretamente da construção da equação característica

$$\Delta(s) = 1 + \bar{G}(s) = 0$$

e do **princípio da variação do argumento**.

- *Exemplo: Seja o sistema realimentado segundo a malha de controle*



sendo $G(s) = 1/(s + 1)(s - 2)$ e $C(s) = 1$. Verifique quantas raízes de malha fechada estão localizadas no semiplano complexo direito.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

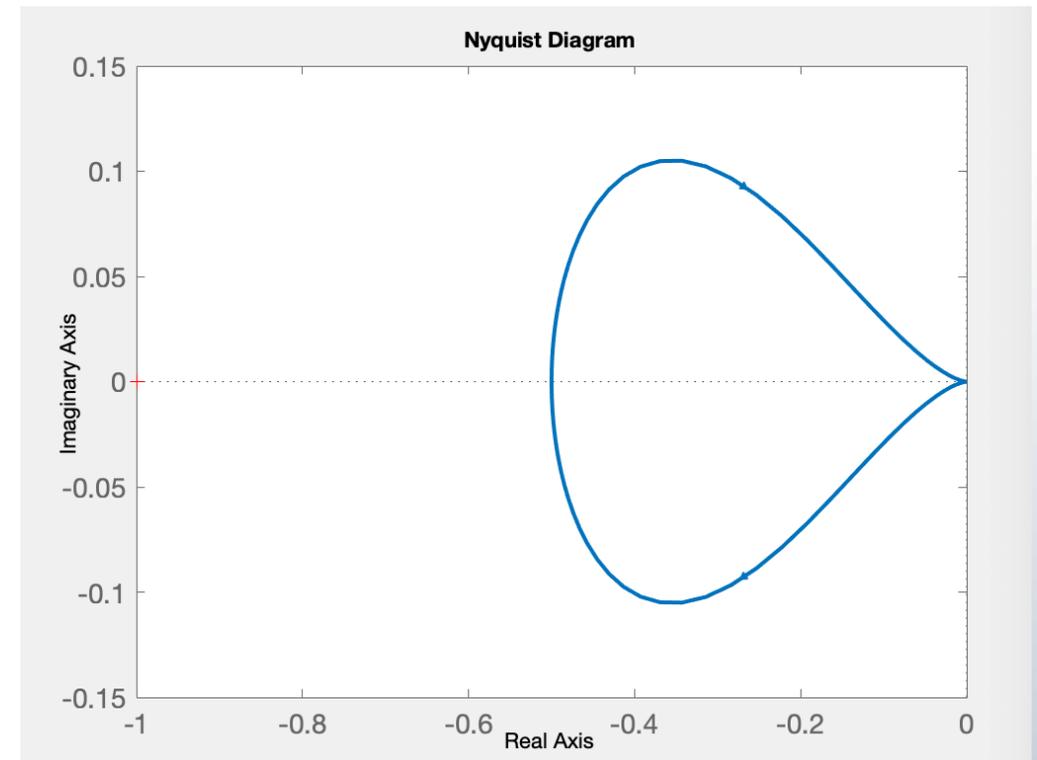
- Neste caso, o mapeamento de \mathcal{C} através de $G(s)$ leva a

$$N_p = 1;$$
$$N_{voltas} = 0;$$



$$N_{voltas} + N_p = 1;$$

o que indica que o sistema realimentado será instável com 1 raiz no semiplano complexo esquerdo!

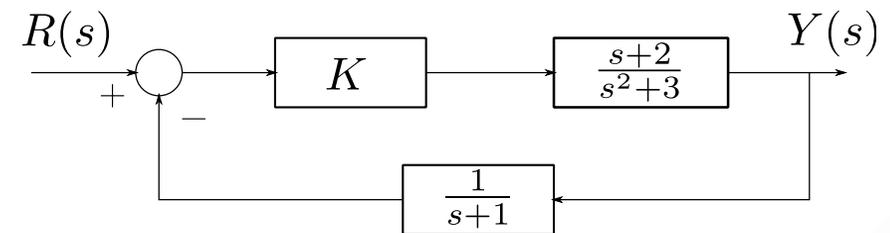


CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

- Seja agora o Sistema realimentado segundo a figura ao lado.

$$F(s) = \frac{\frac{K(s+2)}{s^2+3}}{1 + \frac{K(s+2)}{(s^2+3)(s+1)}}$$

- Neste caso, $\bar{G}(s) = \frac{(s+2)}{(s^2+3)(s+1)} = -\frac{1}{K}$



$$N_{voltas} = 0; N_p = 1$$

$$N_{voltas} + N_p = 1, \forall K > 0$$

SISTEMA INSTÁVEL!

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

O critério de estabilidade de Nyquist é baseado no conhecimento da $\bar{G}(s)$ e no **PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO!**



PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

- Baseado na análise matemática de integrais complexas.
- Seja a função característica que desejamos avaliar do tipo $1 + \bar{G}(s) = 0$, sendo $\bar{G}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.
- $\bar{G}(s)$ é **analítica** em todo o PLANO COMPLEXO **exceto em um número finito de pontos** (p_1, p_2, \dots, p_n) .
- $\bar{G}(s)$ **se anula** em um número finito de pontos (z_1, z_2, \dots, z_m) .



PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

- Aplicando o teorema dos Resíduos de Cauchy à função

$$M(s) = \frac{\bar{G}'(s)}{\bar{G}(s)}$$

podemos calcular

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\bar{G}'(s)}{\bar{G}(s)} ds = 2\pi j \left[\sum_{i=1}^r R(M, p_i) + \sum_{i=1}^t R(M, z_i) \right]$$

onde r e t são respectivamente a quantidade de polos e zeros de $\bar{G}(s)$ no interior de \mathcal{C} .

PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

■ Reescrevendo $M(s)$ em função de um polo p_i de multiplicidade m_i

$$\bar{G}(s) = \frac{a_i(s)}{(s - p_i)^{m_i}} \Rightarrow \bar{G}'(s) = -\frac{m_i a_i(s)}{(s - p_i)^{m_i+1}} + \frac{a_i'(s)}{(s - p_i)^{m_i}}$$

$$M(s) = \frac{\bar{G}'(s)}{\bar{G}(s)} = -\frac{m_i}{s - p_i} + \frac{a_i'(s)}{a_i(s)}$$

onde $a_i(s)$ é analítica em p_i e $a_i(p_i) \neq 0$. Assim, $R(M, p_i) = -m_i$.

PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

- Reescrevendo $M(s)$ em função de um zero z_i de multiplicidade n_i

$$\bar{G}(s) = b_i(s)(s - z_i)^{n_i} \Rightarrow \bar{G}'(s) = n_i b_i(s)(s - z_i)^{n_i - 1} + b_i'(s)(s - z_i)^{n_i}$$

$$M(s) = \frac{\bar{G}'(s)}{\bar{G}(s)} = \frac{n_i}{s - z_i} + \frac{b_i'(s)}{b_i(s)}$$

onde $b_i(s)$ é analítica em z_i e $b_i(z_i) \neq 0$. Portanto, **$R(M, z_i) = n_i$**



PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

■ Assim, o cálculo da integral anterior torna-se

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\bar{G}'(s)}{\bar{G}(s)} ds &= 2\pi j \left[\sum_{i=1}^r R(M, p_i) + \sum_{i=1}^t R(M, z_i) \right] = 2\pi j \left[-\sum_{i=1}^r m_i + \sum_{i=1}^t n_i \right] \\ &= 2\pi j(N_z - N_p) \end{aligned}$$

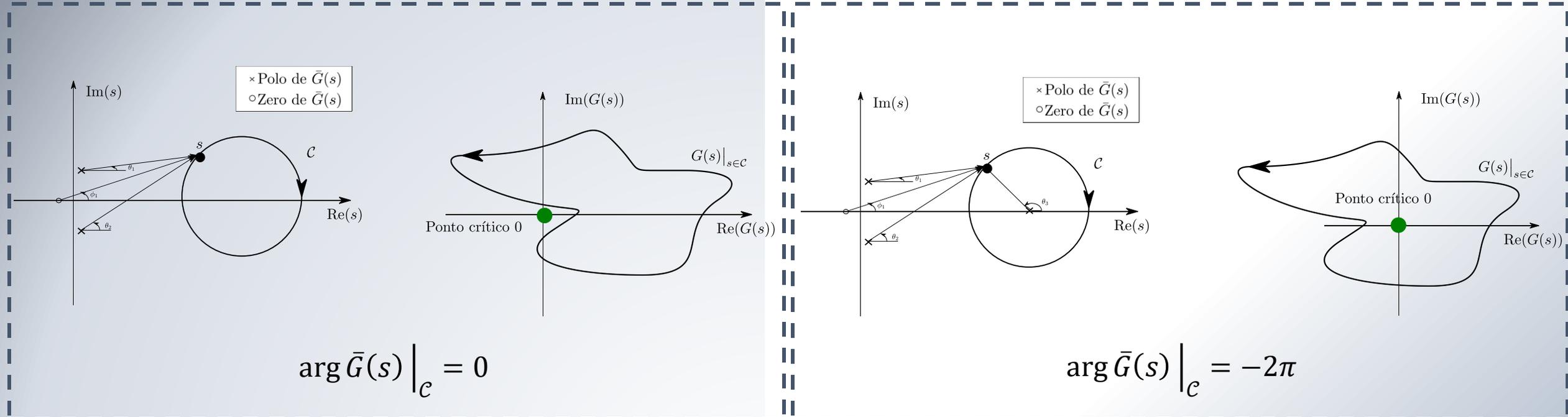
■ Por outro lado, considerando $\bar{G}(s) = |\bar{G}(s)|e^{j \arg \bar{G}(s)}$

$$\oint_C \frac{\bar{G}'(s)}{\bar{G}(s)} ds = \oint_C d \ln \bar{G}(s) = \ln \bar{G}(s) \Big|_C = j \arg \bar{G}(s) \Big|_C$$



PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

Assim,



PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

■ Assim, a variação do argumento de $G(s)$ quando s percorre \mathcal{C} , corresponde

$$\arg \bar{G}(s) \Big|_{\mathcal{C}} = 2\pi(N_z - N_p) = 2\pi N_{voltas}$$

onde

1. N_p é o número de **polos de $\bar{G}(s)$ dentro de \mathcal{C}** e
2. N_z é o número de **raízes de $\bar{G}(s) = 0$ dentro de \mathcal{C}**
3. N_{voltas} é o número de voltas em torno do **ponto crítico 0** ←



MAPEAMENTO DE \mathcal{C} ATRAVÉS DE $G(s)$

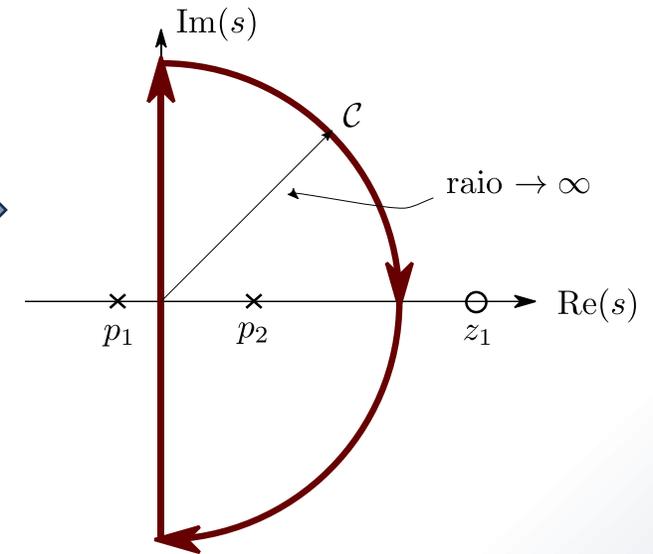
■ Curva \mathcal{C}



Local em que eu desejo ou não que estejam os zeros de $G(s) = -1/K$.

Para $\bar{G}(s) = -1/K$, devemos analisar o **ponto crítico $-1/K$** .

- Permite identificar quantidade de polos de $1 + K\bar{G}(s) = 0$ no SEMIPLANO complexo direito.
- Sentido **HORÁRIO OU ANTI-HORÁRIO**
- **Não pode haver zeros e polos sobre a curva \mathcal{C}**



MAPEAMENTO DE \mathcal{C} ATRAVÉS DE $G(s)$

■ Curva I :

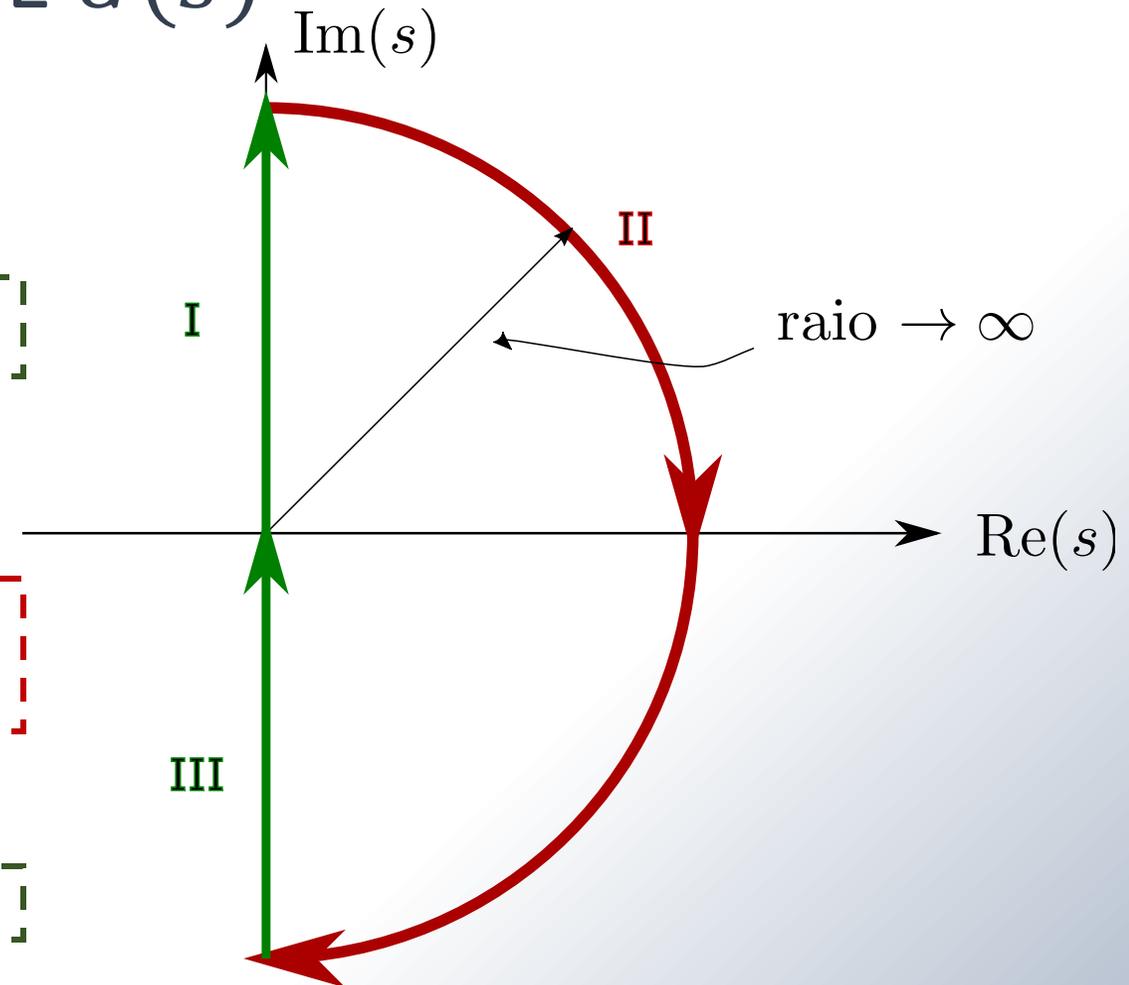
$$\bar{G}(j\omega), \omega \in [0, \infty)$$

■ Curva II :

$$\bar{G}(s) \Big|_{s=\alpha e^{j\phi}}, \alpha \rightarrow \infty, \phi: 90^\circ \rightarrow -90^\circ$$

■ Curva III :

Simétrico de I

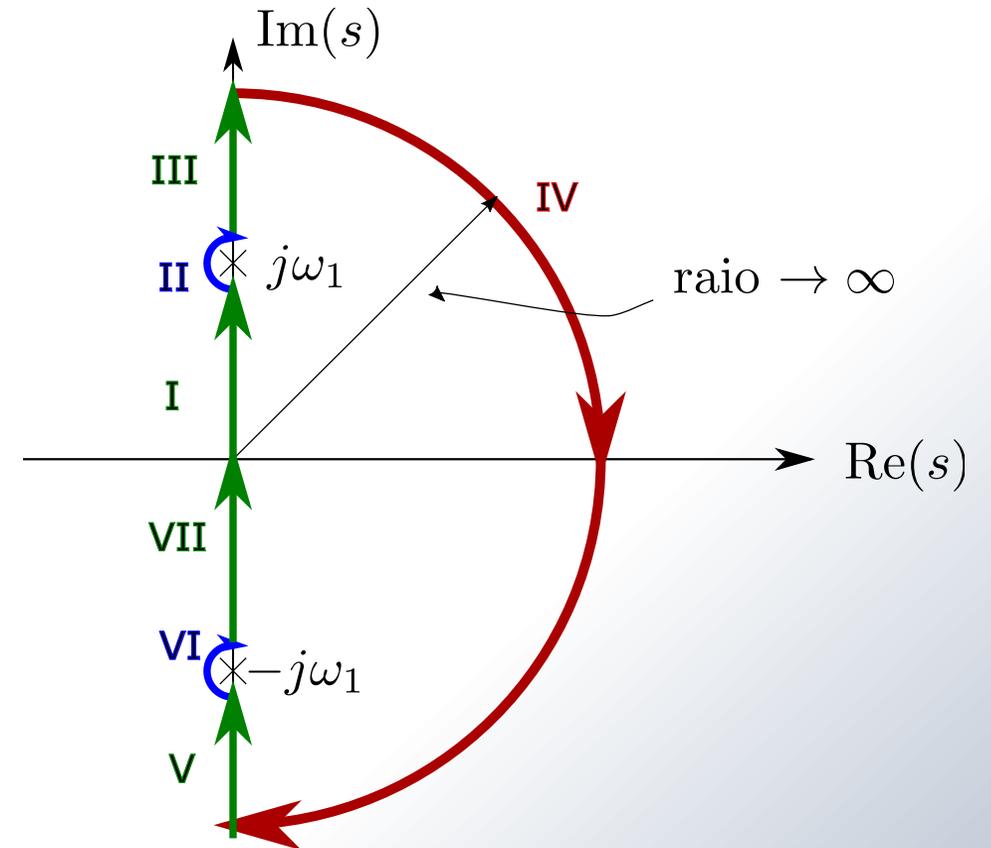


MAPEAMENTO DE \mathcal{C} ATRAVÉS DE $G(s)$

■ Caso haja polos ou zeros sobre a curva, deve-se alterar a curva \mathcal{C} de forma a **desviar destes pontos**. Uma alternativa é apresentada ao lado.

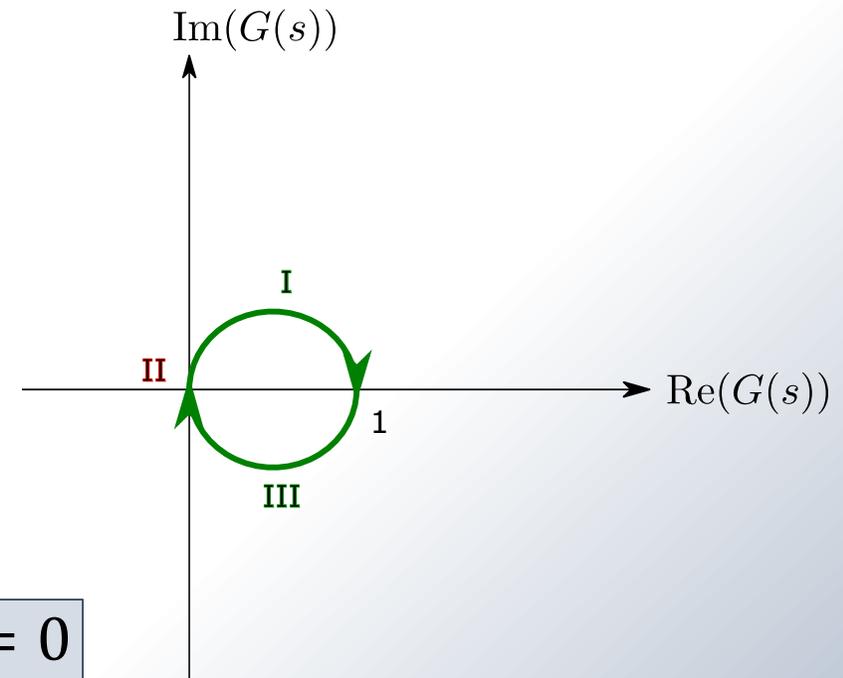
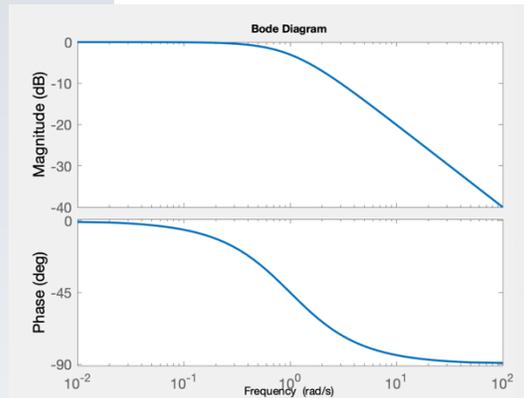
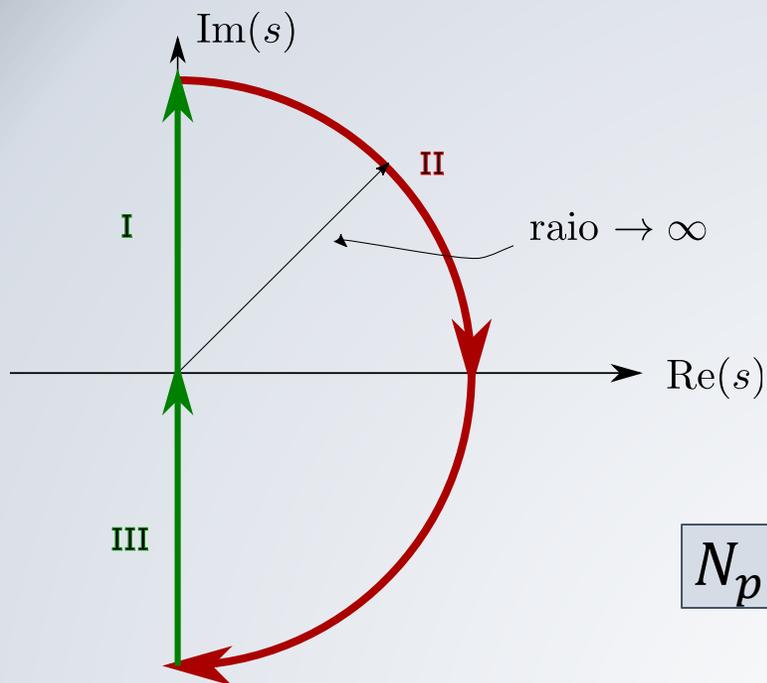
■ **Curva II** :

$$\bar{G}(s) \Big|_{s=j\omega_1+\alpha e^{j\phi}}, \alpha \rightarrow 0, \phi: -90^\circ \rightarrow 90^\circ$$



CRITÉRIO DE NYQUIST

■ $\bar{G}(s) = \frac{1}{s+1}$

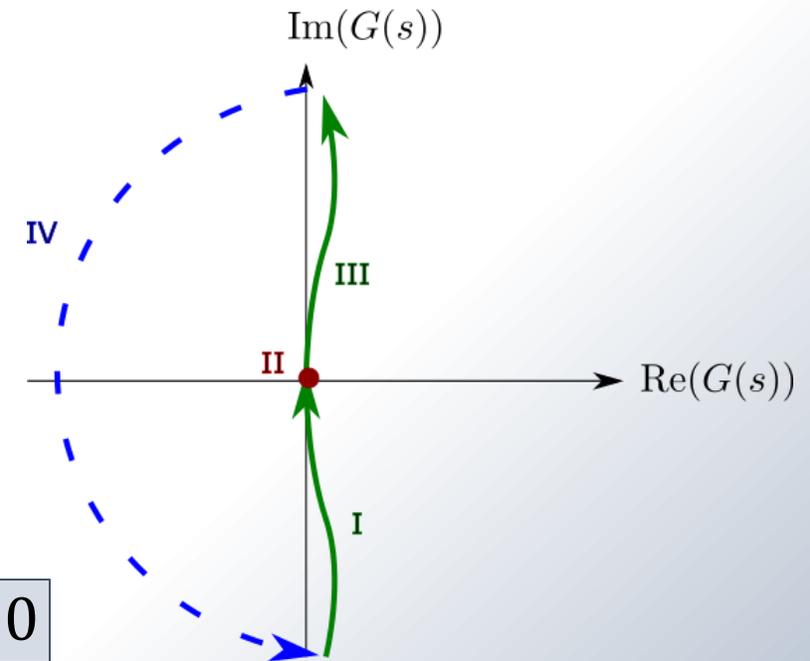
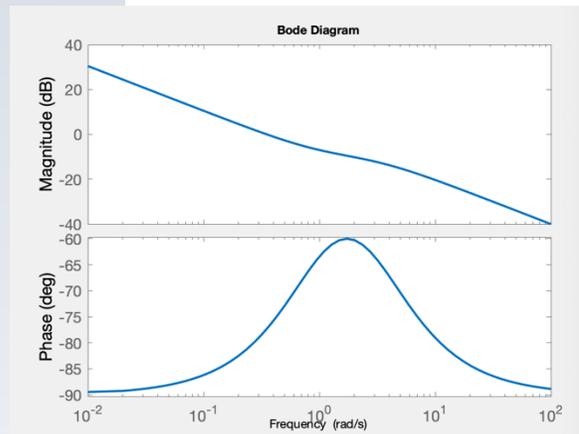
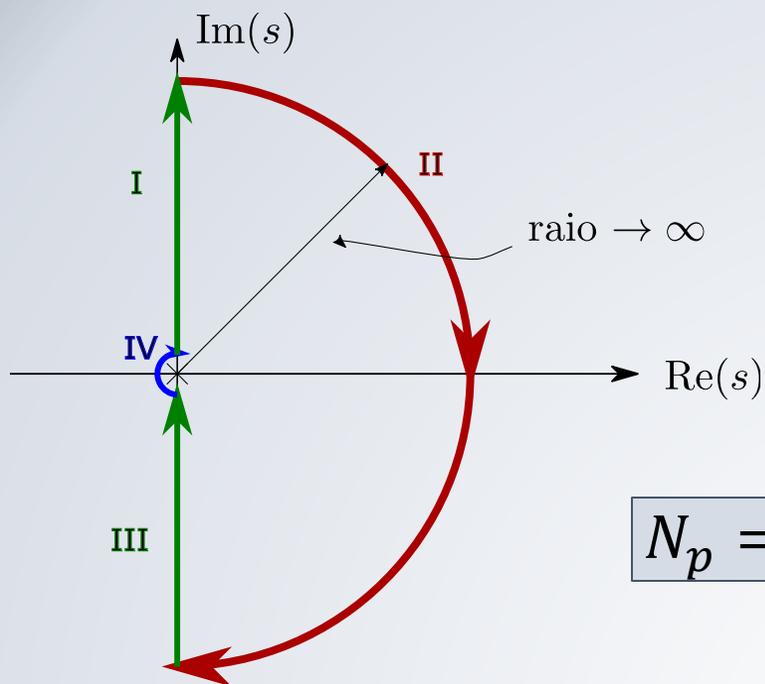


$N_p = 0; N_{voltas} = 0 \Rightarrow N_z = 0$



CRITÉRIO DE NYQUIST

■ $\bar{G}(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}$



$N_p = 1; N_{voltas} = -1 \Rightarrow N_z = 0$



CRITÉRIO DE NYQUIST

- Construa o diagrama de Nyquist para as FT abaixo:

$$\bar{G}(s) = \frac{4}{(s+2)(s-3)}$$

$$\bar{G}(s) = \frac{s-1}{(s+3)s^2}$$

- Verifique quantos polos de $\frac{s+3}{s^3-5s^2+6s+1}$ encontram-se no semiplano complexo aberto esquerdo.

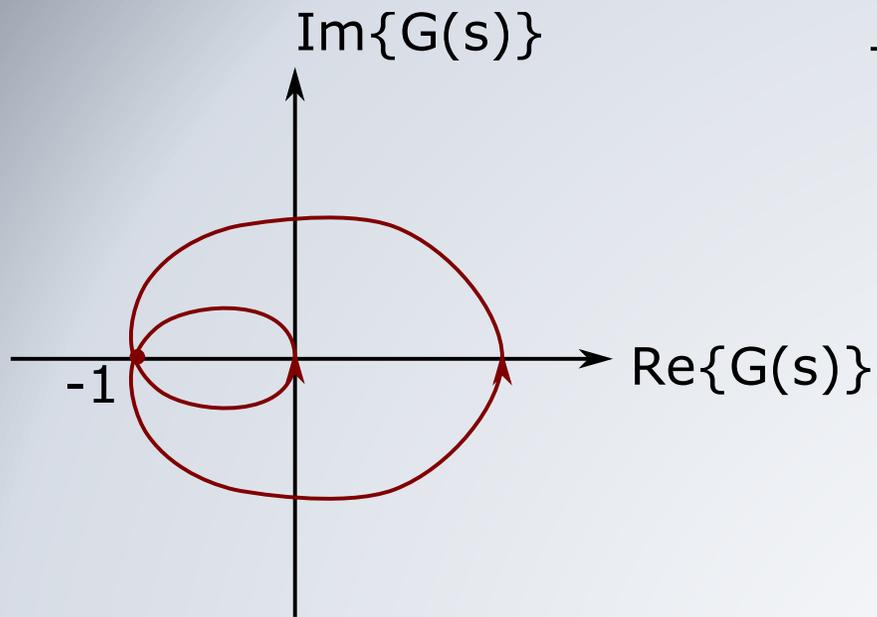


MARGENS DE ESTABILIDADE – REVISITADO

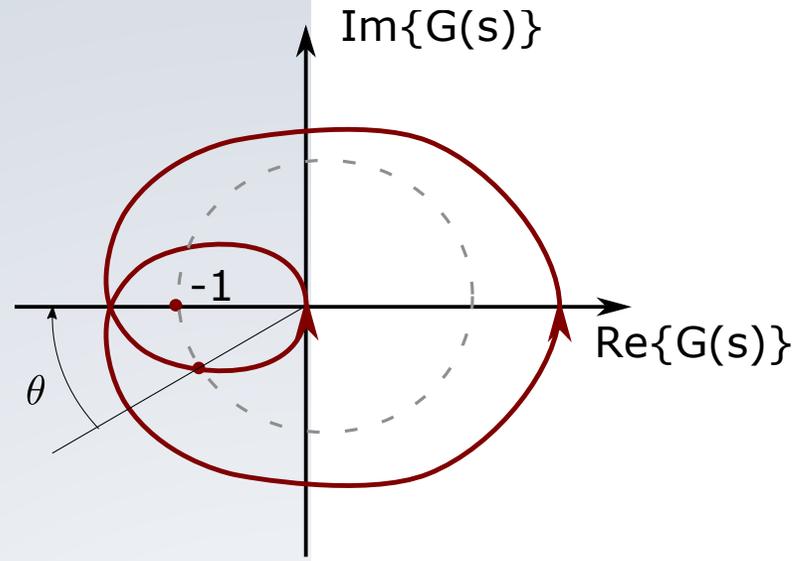
- **Margem de fase** é o quanto podemos deslocar o sistema em malha aberta, em fase, para que o sistema atinja o ponto $\bar{G}(j\omega) = -1$. Esta característica é medida em graus.
- **Margem de ganho** é o quanto podemos multiplicar o sistema em malha aberta, em módulo, para que o sistema atinja o ponto $\bar{G}(j\omega) = -1$. Esta característica é medida em dB.



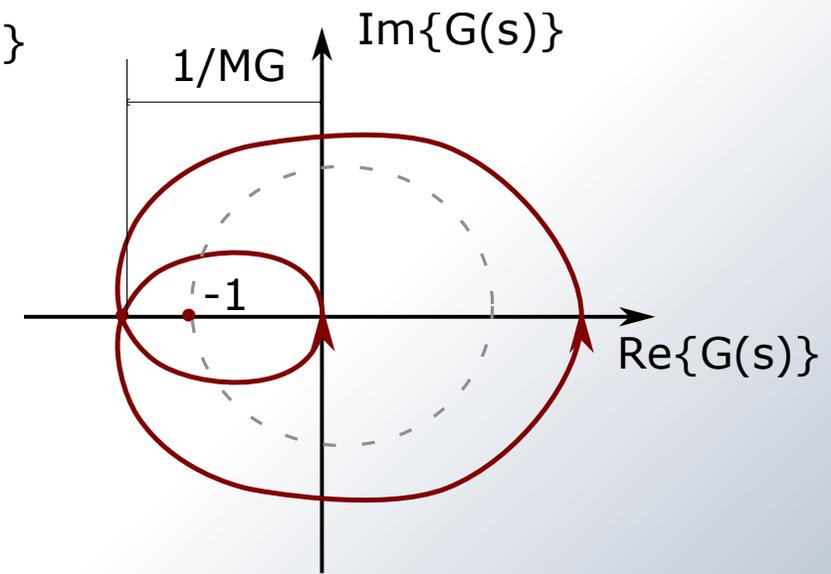
MARGENS DE ESTABILIDADE



NEUTRALMENTE ESTÁVEL



MARGEM DE FASE



MARGEM DE GANHO

MATERIAL ADICIONAL

■ Leituras:

- Leitura Complementar 12 (Princípio da Variação do Argumento e Critério de Estabilidade de Nyquist)



PRÓXIMA AULA

■ Discretização

