EES22
CONTROLE CLÁSSICO I

Sistemas com Atraso. Discretização. Prewarping.

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

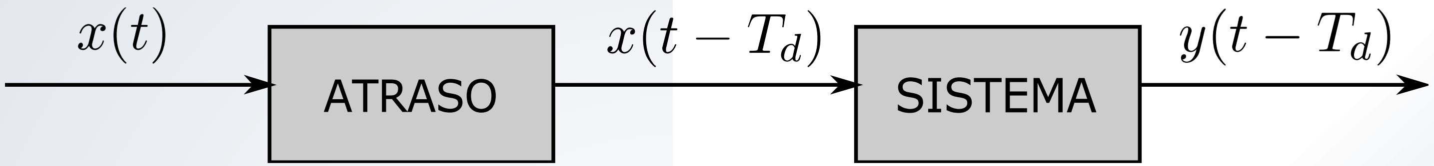
São José dos Campos, 21/12/2024.

ASSUNTOS

- Sistemas com atraso
- Discretização
- *Prewarping*

SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

- Chamados de **ATRASO DE TRANSPORTE, RETARDO DE TRANSPORTE, TEMPO MORTO**.
- Ocorrem na transmissão entre controlador e planta, planta e controlador, na leitura de sensores, na aplicação da lei de controle, entre outros
- Fenômeno bastante comum em sistemas de controle e **pode levar o sistema à instabilidade**



SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

- Tomando o sistema com atraso, temos que sua FT é

$$A(s) = \frac{\mathcal{L}\{x(t-T_d)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} = \frac{X(s)e^{-T_d s}}{X(s)} = e^{-T_d s}$$

SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

- Esta FT pode ser aproximada por
  - Aproximação de Taylor em torno de $T_d = 0$
  - Aproximação de Padé

- Aproximação por série de Taylor em torno de $T_d = 0$

  - $e^{-T_d s} = 1 + (-s)e^{-T_d s}T_d = 1 - sT_d$
  - $e^{-T_d s} = \frac{1}{e^{T_d s}} = \frac{1}{1+(s)e^{T_d s}T_d} = \frac{1}{1+sT_d}$
  - $e^{-T_d s} = e^{-T_d s/2 - T_d s/2} = \frac{e^{-T_d s/2}}{e^{T_d s/2}} = \frac{2-sT_d}{2+sT_d}$
  - $\cdots$

SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

- Aproximação de Padé consistem em construir $G_{n,m}(s)$ aproximada de $G(s) = e^{-T_d s}$, garantindo que $\boldsymbol{G^{(n)}(0) = G_{n,m}^{(n)}(0)}$, PARA TODO n.

- Neste caso, $G_{n,m}(s)$ é do tipo:

$$\boldsymbol{G_{n,m}(s) = \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0\right)}{\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0\right)}}$$

SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

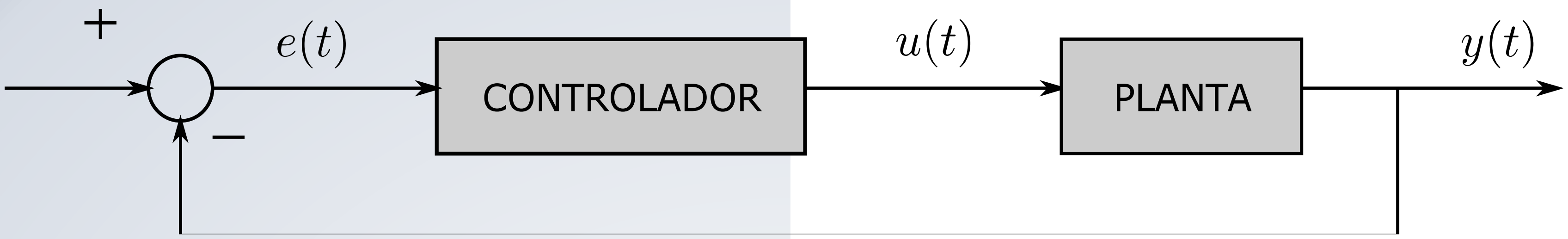
- Com isso, obtém-se as FT para o atraso

Aproximação $(1,1)$	$G_{1,1}(s)$	$\dfrac{2 - T_d s}{2 + T_d s}$
Aproximação $(2,2)$	$G_{2,2}(s)$	$\dfrac{T_d^2 s^2 - 6T_d s + 12}{T_d^2 s^2 + 6T_d s + 12}$
Aproximação $(3,3)$	$G_{3,3}(s)$	$\dfrac{-T_d^3 s^3 + 12T_d^2 s^2 - 60T_d s + 120}{T_d^3 s^3 + 12T_d^2 s^2 + 60T_d s + 120}$
…	…	…

- No MATLAB utiliza-se `[num,den]=pade(Td,ordem)`

DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES

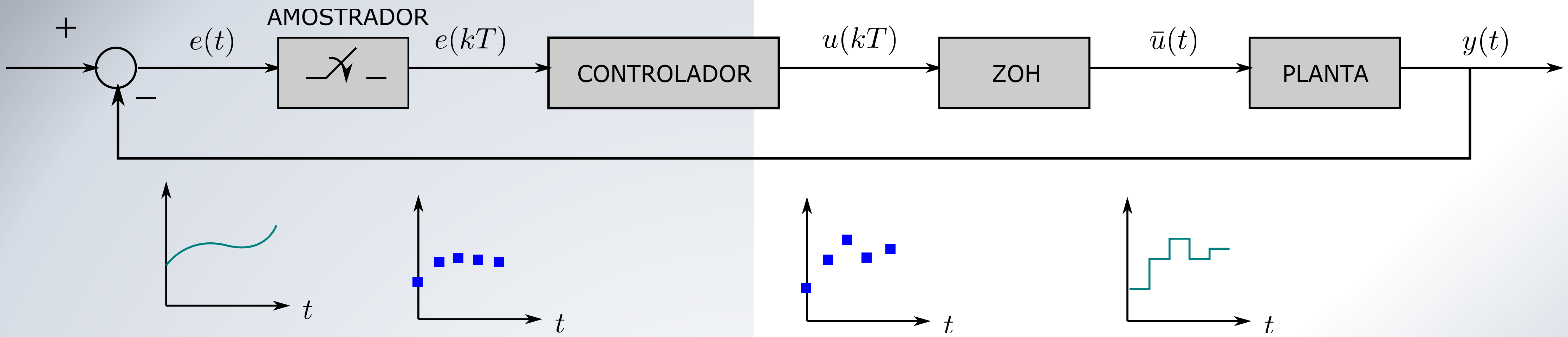
- Até agora vimos sistemas do tipo



- Na prática, controladores digitais trazem menor custo de instalação e manutenção, facilidade de reprogramação, ...

- Hoje, temos plantas do tipo

DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES



- Sistemas em que sinais contínuos e discretos coexistem.

DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES

- Neste caso a FT do ZOH é

$$S(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

em que (AMOSTRADOR + CONTROLADOR DISCRETO + ZOH) são tais que

$$\boxed{\bar{u}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(s)C(s)E(s)\} \Longrightarrow \;\; C_D(z) = \mathcal{Z}\{\, \mathcal{L}^{-1}\{S(s)C(s)\}\}}$$

DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES

- Assim, seja $C(s) = \frac{1}{s} \Longrightarrow C_D(z) = \mathcal{Z}\{T\} = \frac{T}{z-1} \Longrightarrow \boxed{s = \frac{z-1}{T}}$

- Realizando a FT discreta anterior em equação à diferenças:

$$u[k+1] = u[k] + Te[k]$$

que corresponde a uma **integração retangular para frente**.

DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES

- Analogamente, realizando uma **integração retangular para trás**

$$u[k] = u[k+1] - Te[k+1] \implies \boxed{s = \frac{z-1}{Tz}}$$

ou uma **integração trapezoidal (Tustin ou Transformação Bilinear)**

$$u[k+1] = u[k] + \frac{T}{2}\{e[k+1] + e[k]\} \implies \boxed{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

PREWARPING

- Quando utilizamos a transformação bilinear, ao mapearmos $s = j\omega_A$,

$$j\omega_A = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{2+\omega_A T\,j}{2-\omega_A T\,j} \approx e^{j\omega_A T}$$

em que cometemos uma distorção na aproximação!

- De fato, fazendo-se $z = e^{j\omega_A T}$

$$j\omega_A = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega_A T}-1}{e^{j\omega_A T}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega_A T/2}}{e^{j\omega_A T/2}}\frac{e^{j\omega_A T/2}-e^{-j\omega_A T/2}}{e^{j\omega_A T/2}+e^{-j\omega_A T/2}} = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_A T}{2}\right)j$$

PREWARPING

- Esta aproximação só é válida para $\omega_A T$ muito pequenos.

- Para compensar este efeito em uma frequência de interesse ω_c, fazemos

$$s = \frac{\omega_c}{\tan\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}$$

PREWARPING

MATERIAL ADICIONAL

- Leituras:
  - Leitura Complementar 18 (LGR e Sistemas com Atraso)