Leitura Complementar - 01

Funções de Transferência. Transformadas de Laplace. Diagrama de Blocos.

Profa. Gabriela W. Gabriel

29 de Julho de 2023

I Preliminar

Primeiramente, lembro que neste curso realizaremos o projeto de controle de **sistemas dinâmicos**, que são sistemas cuja saída será uma trajetória dada uma entrada e/ou condição inicial. Em relação aos sistemas estudados, destaco três características importantíssimas. São elas: **linearidade**, **invariância no tempo** e **causalidade**.

É importante ainda recapitular como obter o modelo de sistemas físicos e como descrevê-los matematicamente utilizando as equações diferencias, que corresponde a uma representação do sistema no domínio do tempo. Como resultado do processo de modelagem, obtivemos um sistema de equações diferenciais de ordens iguais ou maiores que um, lineares ou não. Nestes sistemas, nem sempre uma solução analítica é facilmente obtida e, em alguns casos, não é possível dadas as limitações das ferramentas que temos disponíveis nos dias de hoje.

A representação no domínio do tempo, para o nosso sistema físico **SISO**, linear e invariante no tempo (LTI), pode ser expressa como

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \tag{1}$$

em que, neste caso, $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é o sinal da saída controlada e $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é o sinal da entrada de controle. Além disso, por se tratar de um sistema físico LTI, os coeficientes destas equações são constates no tempo e reais! Observo ainda que, por ser físico, ele é causal! Como consequência, $n \geq m$!

Uma visualização bastante simplificada deste sistema (contendo os sinais de interesse: entrada e saída) é apresentado na Figura 1, em que $\mathcal{G}$ corresponde a transformação ("matemática") aplicada sobre u e que gera y.

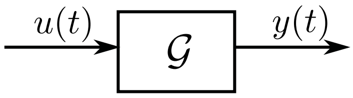


Figura 1: Representação em bloco de um sistema dinâmico.

Note que (1) é equivalente ao diagrama da Figura 1, sendo matematicamente expressa por $y(t) = \mathcal{G}(u(t))$. A partir de (1), vimos como obter a representação no espaço de estados em que substituimos a ordem elevada das equações diferenciais (ordinárias ou não, lineares ou não), (1), pelas equações matriciais. Nesta representação, convém trabalharmos com o modelo linearizado do sistema, pela simplicidade de notação e disponibilidade de ferramentas de análise e projeto, ainda a serem estudadas em curso posterior. Outra vantagem deste tipo de notação é a facilidade de obtenção de solução analítica, dada a redução de ordem das equações diferenciais envolvidas, que têm a forma geral

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$
$$y = Cx + Du \tag{3}$$

onde x é o vetor de estados do sistema, u é a entrada de controle e y é a saída medida. Observem que um único sistema pode ter diferentes representações no espaço de estados. De fato, existem infinitas possibilidades para a definição do vetor de estados x e, portanto, infinitas representações no espaço de estados dada uma única equação diferencial.

Uma forma bastante prática de resolver equações diferenciais lineares é através da **transformada de Laplace**, cujo domínio de validade corresponde a um subconjunto do plano complexo. Esta representação será muito útil em nosso curso, uma vez que nos permite escrever o sistema na forma de função de transferência, que será o assunto abordado na aula de hoje.

Coloco a seguir os principais pontos a respeito da Transformadas de Laplace.

II Transformada de Laplace

1. Definição

Dada uma função $f(t)$ definida no domínio do tempo para $t \in [0, \infty)$, sua **TRANSFORMADA DE LAPLACE** é definida como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{4}$$

para $s \in \mathbb{C}$.

O **DOMÍNIO DE VALIDADE** da transformada é a região do plano complexo em que a **integral acima** (4) **existe**, sendo representado por

$$\mathcal{D}\{F\} := \left\{s \in \mathbb{C} \ : \ F(s) \ existe\right\} \tag{5}$$

Para um sistema causal, sua transformada de Laplace é tal que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{6}$$

Dada a transformada $F(s)$, com domínio $\mathcal{D}\{F(s)\}$, desejamos obter a função $f(t)$ dita **INVERSA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE** $F(s)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega, \ t > 0 \tag{7}$$

onde γ é qualquer linha vertical inteiramente contida em $\mathcal{D}\{F(s)\} \subset \mathbb{C}$ e os pontos de $\mathcal{D}\{F(s)\}$ são tais que $s = \sigma + j\omega$ com $\omega \in (-\infty, \infty)$.

2. Principais Propriedades

- **Linearidade:** Dadas duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, ambas com $t \geq 0$, tais que $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ e $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, com domínios, respectivamente $\mathcal{D}\{F_1(s)\}$ e $\mathcal{D}\{F_2(s)\}$, então

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

com domínio $\mathcal{D}\{F(s)\} \supset \mathcal{D}\{F_1(s)\} \cap \mathcal{D}\{F_2(s)\}$.

- **Escalamento:** Seja uma função $f(t),\ t \geq 0$, tal que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ com domínio $\mathcal{D}\{F(s)\} = \{s \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$. Então,

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right)$$

com domínio dado por $\mathcal{D}\{H(s)\} = \{s \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}(s) > \omega\alpha\}$.

- **Deslocamento em t:** Seja $f(t)$, $t \geq 0$, com transformada $F(s)$ e domínio $\mathcal{D}\{F(s)\}$ e seja uma constante $\tau \geq 0$. Então, definindo

$$h(t) := \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, \tau) \\ f(t-\tau) & , \quad t \in [\tau, \infty) \end{cases}$$

teremos

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-s\tau} F(s)$$

com domínio dado por $\mathcal{D}\{H(s)\} = \mathcal{D}\{F(s)\}$.

- **Deslocamento em s:** Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $t \geq 0$, com domínio $\mathcal{D}\{F(s)\} = \{s \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$ e seja $a \in \mathbb{C}$ uma constante. Então, terá transformada

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

com domínio dado por $\mathcal{D}\{H(s)\} = \{s \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}(s) > \alpha - \mathrm{Re}(a)\}$.

- **Derivada no tempo – ordem 1:** Seja $f(t)$, $t \geq 0$, diferenciável em todo $t > 0$, com transformada $F(s)$ e domínio $\mathcal{D}\{F(s)\}$. Então, para uma condição inicial $f(0)$ arbitrária e finita

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

com domínio dado por $\mathcal{D}\{H(s)\} = \mathcal{D}\{sF(s)\}$.

- **Derivada no tempo – ordem n:** Seja $f(t)$, $t \geq 0$, diferenciável até a ordem n em todo $t > 0$, com transformada $F(s)$ e domínio $\mathcal{D}\{F(s)\}$. Então, para uma condições iniciais $f(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$ arbitrária e finita

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com domínio dado por $\mathcal{D}\{H(s)\} = \mathcal{D}\{sF(s)\}$.

- **Integração no tempo:** Seja $f(t)$, $t \geq 0$, uma função com transformada $F(s)$ e domínio $\mathcal{D}\{F(s)\}$. Então,

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

com domínio dado por $\mathcal{D}\{H(s)\} = \mathcal{D}\{\frac{F(s)}{s}\}$.

- **Convolução:** Dadas $f(t)$ e $g(t)$ definidas para $t \geq 0$, com transformadas $F(s)$ e $G(s)$

e domínios, respectivamente, $\mathcal{D}\{F(s)\}$ e $\mathcal{D}\{G(s)\}$. Então,

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

- **Teorema do valor final:** Seja $f(t)$, $t \geq 0$, tal que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, com $0 \in \mathcal{D}\{sF(s)\}$. Então,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

3. Principais Transformadas de Laplace

Tabela 1: Tabela das principais transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $n = 1, 2, \cdots$	$\frac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$, $n = 1, 2, \cdots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{t}{2\omega}\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

□ □ □

05.01. *Observe a diferença entre* (4) *e* (6) *e discuta porque esta simplificação é possível para o caso dos sistemas causais.*

□ □ □

III Funções de Transferência

Análise matemática – O resultado da modelagem do nosso sistema físico de interesse é uma representação matemática que descreve o comportamento de sua saída como uma função de sua entrada (caso SISO). Conforme mencionado na seção anterior, uma representação em bloco deste sistema corresponde a apresentada na Figura 1. Sendo y o sinal da saída medida e u o sinal da entrada de controle. Observe que, em sua representação no tempo $y(t) = \mathcal{G}(u(t))$, nos descreve o sistema conforme (1). Se chamarmos

$$D[y(t)] = a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \tag{8}$$

$$N[u(t)] = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) = v(t) \tag{9}$$

podemos representar o mesmo sistema, no domínio do tempo, como $D[y(t)] = N[u(t)] = v(t)$. Portanto, teremos que as parcelas da solução de $y(t) = \mathcal{G}(u(t))$ correspondentes à resposta a condições iniciais nulas, $y_p(t)$, e à entrada nula, $y_h(t)$, são obtidas pelas soluções de

$$D[y(t)] = 0 \Longrightarrow y(t) = y_h(t) \tag{10}$$

$$D[y(t)] = N[u(t)] \Longrightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{11}$$

cuja Transformada de Laplace leva a

$$Y(s) = Y_h(s) + Y_p(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)} U(s)}_{\text{Resposta a c.i. nulas}} + \underbrace{\frac{k_0 y(0) + k_1 y^{(1)}(0) + \cdots + k_{n-1} y^{(n-1)}(0)}{D(s)}}_{\text{Resposta à entrada nula}} \tag{12}$$

A partir de (12) definimos o conceito de função de transferência.

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (FT) é a relação entre a saída do sistema, $Y(s)$, e a entrada do sistema, $U(s)$, para **c.i. NULAS**, ou seja,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \triangleq \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{c.i.\ nulas} \tag{13}$$

OBSERVAÇÃO: Observe que o fato de exigirmos c.i. nulas implica em termos uma representação única para $G(s)$.

Neste cenário (c.i. nulas) e considerando o universo dos sistemas LTI SISO, se a entrada do sistema for o impulso unitário, $u(t) = \delta(t)$, sua saída $g(t)$, poderá ser calculada como

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \times 1 \tag{14}$$

Por outro lado, para uma entrada qualquer $u(t)$, a saída correspondente é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = g(t) * u(t) \tag{15}$$

que corresponde à resposta do sistema ao impulso unitário convoluída com o sinal de entrada. Neste ponto, duas representações totalmente equivalentes do sistema são: a) representação no domínio do tempo e b) representação no domínio da frequência, através de sua Transformada de Laplace. A segunda delas é comumente representada na forma gráfica, denominada **diagrama de blocos**.

IV Características das FT

Antes de passarmos para uma análise do diagrama de blocos, vamos analisar com um pouco mais de detalhe a expressão da função de transferência. Observe que, pela característica das equações diferenciais que descrevem os sistemas LTI, podemos reescrever $G(s)$ conforme

$$G(s) := \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{16}$$

em que $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \cdots, m$ e $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \cdots, a$, com $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ e $n \geq m$. Esta função é dita **racional** uma vez que pode ser escrita como o quociente entre dois polinômios em s, com coeficientes reais. Portanto, raízes complexas só ocorrem em pares complexos conjugados.

Classificamos as funções racionais como

1. **Próprias:** caso $n \geq m$;
2. **Estritamente próprias:** caso $n > m$; ou
3. **Impróprias:** caso $n < m$.

Aqui trabalharemos com funções próprias ou estritamente próprias. Porquê?

Por serem, $D(s)$ e $N(s)$, funções polinomiais, podemos escreve-las através de suas raízes

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(S)} = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{17}$$

em que

- $z_1, \cdots, z_m$ são ditos **ZEROS** do sistema;
- $p_1, \cdots, p_n$ são ditos **POLOS** do sistema.

Reescrevendo a função de transferência $G(s)$ na forma de frações parciais,

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-p_n} \tag{18}$$

podemos verificar que os polos do sistema determinam seus modos de operação, uma vez que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\alpha_i}{s-p_i}\right\} = \alpha_i e^{p_i t}, \ t \geq 0$$

para o caso de polos simples, ou

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\alpha_i}{(s-p_i)^n}\right\} = \frac{\alpha_i t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}, \ t \geq 0$$

para o caso de polos com multiplicidade maior que um. Tais polos serão sempre reais ou complexos conjugados, como mencionado anteriormente. Polos reais são ditos **modos de primeira ordem** do sistema e polos complexo conjugados são chamados **modos de segunda ordem** do sistema. É interessante observar o efeito de cada um deles no sistema como um todo.

□ □ □

05.02. *Verifique o comportamento da resposta ao impulso do sistema para os seguintes casos:*

a) $G(s) = \frac{1}{s+1}$
b) $G(s) = \frac{1}{s}$
c) $G(s) = \frac{1}{s-1}$
d) $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$
e) $G(s) = \frac{1}{s^2}$
f) $G(s) = \frac{1}{s^2-s+1}$

□ □ □

Por outro lado, os zeros do sistema determinam o quanto cada um dos modos do sistema influenciam sua resposta, em outras palavras, são os pesos atribuídos a cada um dos modos do sistema uma vez que influenciam os valores de α_i. Os multiplicadores α_i, por sua vez, são ditos

resíduos associados a cada um dos polos do sistema.

V Diagrama de Blocos

Uma forma gráfica, bastante intuitiva de representar um sistema dinâmico, é através do fluxo dos sinais que o compõem. Como exemplo, considere o sistema de um eletroíma, visto na Aula 01. Nele, pudemos identificar diferentes elementos, os quais estão apresentados na Figura 2. No entanto, este diagrama não traz informações de como estes sinais estão matematicamente

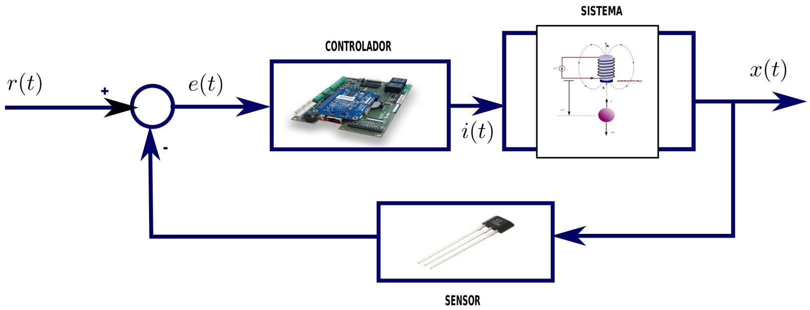


Figura 2: Diagrama de sinais e elementos que compõem um sistema de um eletroímã.

relacionados. Substituindo cada um dos elementos pelas suas respectivas funções de transferência e cada um de seus sinais por suas respectivas Transformadas de Laplace, teremos um diagrama que compreende a relação matemática entre cada sinal com os demais. A esta representação chamamos **DIAGRAMA DE BLOCOS**. A Figura 3 corresponde a uma possível representação em diagrama de blocos do sistema do eletroímã. Neste diagrama, $R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$ é o sinal de referência. Quando temos um sistema de controle bem projetado, a saída do sistema deve se aproximar do sinal de referência. Os sinais w e v são ruídos (perturbações externas não modeladas).

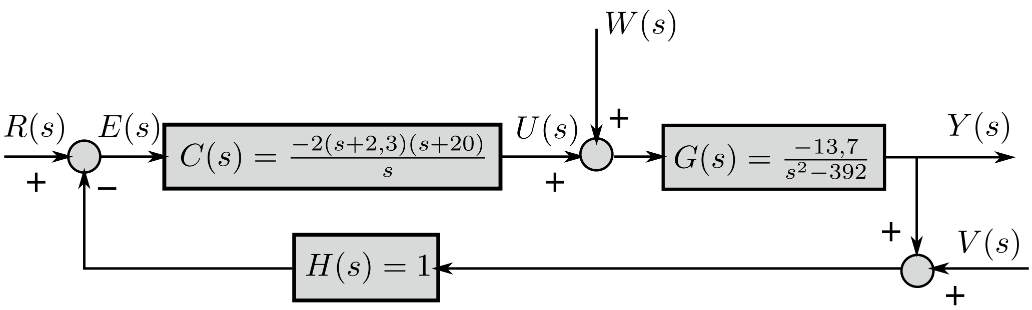


Figura 3: Diagrama de blocos do sistema do eletroímã linearizado.

No caso da Figura 3 temos um diagrama em malha fechada, uma vez que o sinal da saída do sistema, $y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\}$, é utilizado para controlar o sistema, através de uma **realimentação negativa**. Para obtermos a função de transferência do sistema em malha fechada (FTMF) $Y(s)/R(s)$ é necessário utilizar a álgebra de blocos. Para isso, o primeiro ponto a ser observado é que trataremos de todos os sinais envolvidos no domínio da frequência, como apresentado na própria Figura 3. Assim, percorrendo a malha a partir de $Y(s)$, podemos escrever

$$Y(s) = G(s)\Big\{W(s) + C(s)\Big[R(s) - H(s)\big(V(s) + Y(s)\big)\Big]\Big\}$$
$$\big(1 + H(s)C(s)G(s)\big)Y(s) = C(s)G(s)R(s) + G(s)W(s) - H(s)C(s)G(s)V(s)$$

Portanto, podemos escrever que

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}W(s) - \frac{H(s)C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}V(s) \tag{19}$$

ou seja, para $w \equiv 0$ e $v \equiv 0$, teremos

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}R(s) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{Y(s)}{(R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} \tag{20}$$

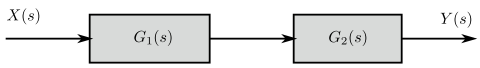
$F(s)$ é dita função de transferência de malha fechada (FTMF) do sistema. É evidente, que por se tratar de uma função racional, para que o sistema em malha fechada seja estável, devemos fazer com que os modos de $1 + H(s)C(s)G(s)$ (suas raízes) estejam todos localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo em s, o que garantirá a convergência do sinal de saída y. À equação

$$1 + H(s)C(s)G(s) = 0 \tag{21}$$

chamaremos **EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA**.

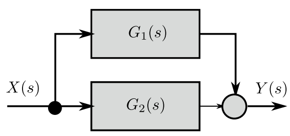
Algumas outras nomenclaturas importantes dos diagramas de blocos são apresentadas na sequência. Inicialmente, considere novamente o caso em que $w \equiv 0$ e $v \equiv 0$, por simplicidade. Então, observe que no caso apresentado o bloco $C(s)$ realimenta $G(s)$ e vice-versa. O sinal de menos no somador remanescente indica que temos aqui uma **realimentação negativa**. Se o ramo de realimentação (aquele que contém $H(s)$) fosse adicionado, ao invés de subtraído, teríamos uma **realimentação positiva** do sistema. Para cada um dos casos, a FTMF é composta de uma forma diferente. O **ganho de malha** é aquele obtido quando percorremos a malha de controle sem considerar o somados, no caso, $C(s)G(s)H(s)$. Por outro lado, o **ganho do ramo direto** é aquele obtido percorrendo-se o caminho do sinal $r \rightarrow y$ sem considerar o ramo de realimentação, no caso, $C(s)G(s)$. Se a função $H(s) = 1$, temos um **sistema de realimentação unitária**, que corresponde a uma malha de controle típica a ser utilizada na maior parte do nosso curso.

A álgebra de blocos é escrita utilizando linhas orientadas (que representam o fluxo do sinal) e blocos que indicam transformações de um sinal em outro, indicado pela presença de uma função de transferência. A Figura 4a apresenta uma configuração de blocos em cascata enquanto a Figura 4b, uma configuração em paralelo. As FT equivalentes para cada um dos casos estão apresentadas nas próprias figuras. Os somadores são elementos bastante utilizados. O único cuidado, extremamente importante, em relação a este último elemento é que ao somarmos diferentes sinais eles devem possuir a MESMA UNIDADE.



$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$

(a) Configuração cascata.



$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) + G_2(s)$

(b) Configuração paralela.

Figura 4: Algumas configurações simples – álgebra de blocos.

Leituras complementares a respeito da álgebra de blocos são recomendadas. Os livros [1] e [2] contém informações adicionais sobre o assunto. **Aquirre, *Álgebra de diagramas de blocos (ELT009, ELT035)*, 2017.**

Observação:

1. Propositalmente ao longo do texto são utilizados os **sinais** em letras maiúsculas (sinal no domínio da frequência, $X(s)$) e minúsculas (sinal no domínio do tempo, $x(t)$), esta alternância não implica em qualquer tipo de confusão, uma vez que correspondem ao mesmo sinal em diferentes representações matemáticas.

Referências

[1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

[2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami–Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

[3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.