

LEITURA COMPLEMENTAR – 02

Sistemas de Ordem Superior. Análise de Zeros e Polos Adicionais.

Profa. Gabriela W. Gabriel

29 de Julho de 2023

I PRELIMINAR

Nem sempre os sistemas que temos em mãos, especialmente os derivados de sistemas reais são sistemas de primeira ou segunda ordem, como estudamos. E neste caso, qual o efeito destes polos adicionais? Quais os efeitos de zeros adicionais na resposta do sistema? Como definir os parâmetros de projeto corretos?

Até agora, recapitulando, vimos os seguintes (principais) critérios de desempenho que nos ajudarão a nortear os projetos de controle:

- Tempo de subida, t_r (Critérios 0 – 100%, 5 – 95%, 10 – 90%),
- Tempo de pico, t_p ,
- Tempo de estabilização (acomodação), t_{se} , (Critérios $\epsilon = 2\%$ ou $\epsilon = 5\%$),
- Máximo sobressinal percentual, M_p ,
- Erro de estabilização, $e_\infty = r - y_\infty$, em que r é o valor da referência degrau aplicada à entrada do sistema.

Estes critérios foram estudados considerando a resposta de um sistema de primeira e de um sistema de segunda ordem. De imediato, podemos observar que estas duas respostas diferem em suas características. E no caso de inserirmos um zero no sistema ou um polo adicional? Qual o efeito sobre estes critérios de desempenho? Segue a análise para estes sistemas.

II SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM COM UM ZERO ADICIONAL

Antes de iniciarmos a análise de um sistema de terceira ordem, vamos inserir um zero no sistema de ordem 2. Para isso, vamos considerar um sistema do tipo

$$G(s) = \frac{s + z}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

Nas aulas anteriores aprendemos que a função do zero na TF (função de transferência) corresponde a atribuir pesos aos polos. Além disso, suponha que um dos polos, p_1 por exemplo, de $G(s)$ esteja próximo de z . Neste caso, o coeficiente a_1 de

$$G(s) = \frac{a_1}{s + \xi\omega_n + j\omega_d} + \frac{a_2}{s + \xi\omega_n - j\omega_d} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2}$$

será

$$a_1 = (s + p_1)G(s)\Big|_{s=-p_1}$$

que assumirá um valor tão pequeno quanto mais próximo z estiver de p_1 , por haver um “cancelamento” de polo e zero na função racional.

Observe que o termo CANCELAMENTO foi utilizado entre aspas. Isso porque devemos sempre tomar cuidado ao utilizar esta expressão. Em sistemas reais, não é possível cancelar polos e zeros, pois TF são aproximações matemáticas. Além disso, parâmetros reais estão sujeitos a variações devido às condições do ambiente em que estão inseridos. Um exemplo é o efeito da dilatação sofrida pelo metal em um jogo de engrenagens por efeito da temperatura. Esta dilatação tem o efeito de alterar a folga existente entre os dentes das engrenagens e, portanto, sua TF.

Exemplo:

Vamos observar a decomposição em frações parciais das três seguintes funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{3/2}{s+3}$$

$$G_2(s) = \frac{3(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+3)} = \frac{0.1364}{s+1} + \frac{2.5909}{s+3}$$

$$G_3(s) = \frac{3(s+2.8)}{2.8(s+1)(s+3)} = \frac{0.9643}{s+1} + \frac{0.1071}{s+3}$$

Observe que os pesos relativos de cada um dos modos do sistema dependem da localização do zero. A Figura 1 apresenta o gráfico de cada uma das FT e a influência que estes pesos exercem na resposta do sistema como um todo.

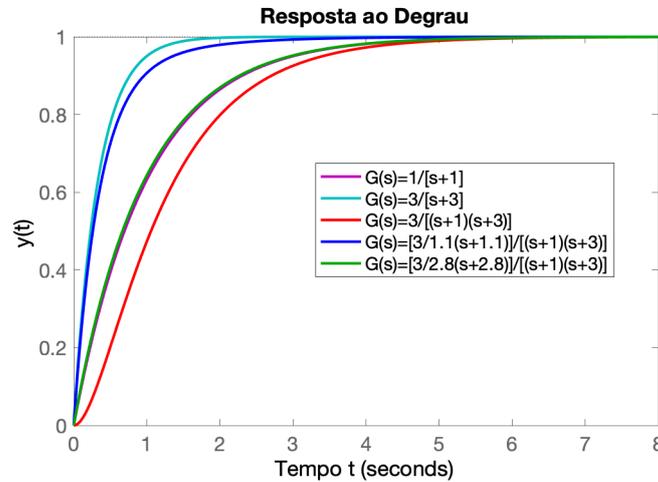


Figura 1: Efeito de um zero adicional em uma FT de ordem 2.

Agora vamos reformular a expressão de $G(s)$ em (1) como

$$G(s) = \frac{s + \alpha\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \alpha\xi\omega_n \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

Fazendo $\xi = 0.5$ e $\omega_n = 1$, vamos analisar diferentes valores de α . O resultado é apresentado graficamente na Figura 2. Observe que m zero no semi-plano direito do plano complexo fazemos com que a fase do sistema seja alterada (no caso, adiantado de 90°). Por isso, este sistema é chamado de **SISTEMA DE FASE NÃO MÍNIMA**. Além disso, em (2) podemos observar que o

zero introduz um termo **derivativo** a TF de ordem 2. De fato, se chamarmos

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

então $G(s) = \alpha\xi\omega_n G_p(s) + sG_p(s)$, cuja resposta ao degrau corresponde a

$$y(t) = \alpha\xi\omega_n y_p(t) + \dot{y}_p(s)$$

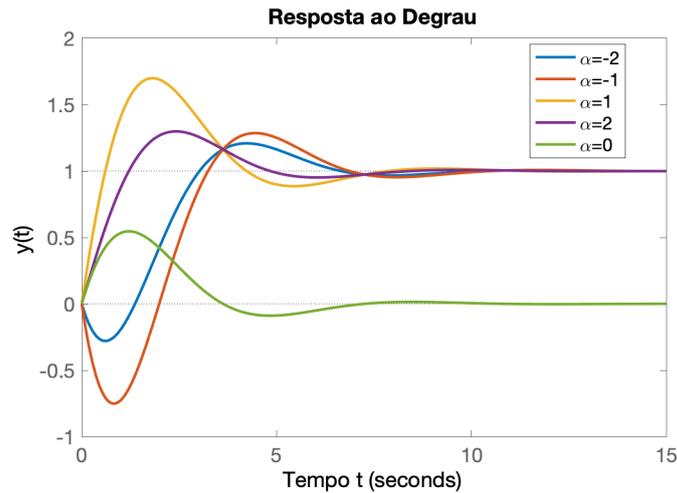


Figura 2: Variação do zero adicional em um sistema com $0 < \xi < 1$.

O gráfico da Figura 3 mostra o comportamento das componentes de $y(t)$ em que foi preservado o erro nulo na resposta em regime permanente. (Qual é esta condição?¹)

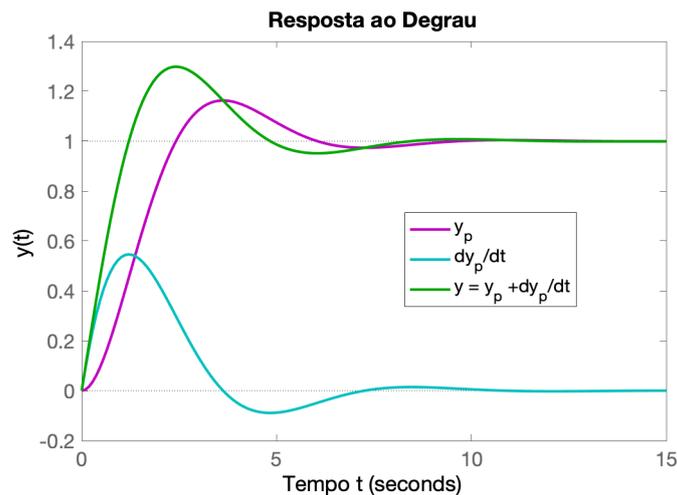


Figura 3: Efeito da adição de um zero na TF de ordem 2.

A adição de um zero não mínimo pode influenciar na Resposta ao Degrau de diferentes maneiras. Este tópico será melhor analisado no estudo da resposta em frequência e construção do diagrama de Bode.

¹Lembrando que o erro em regime é $e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{s} - F(s) \right]$, para um erro nulo, devemos ter $F(0) = 1$.

III SISTEMAS DE TERCEIRA ORDEM

Vamos inserir agora um polo adicional ao sistema de ordem 2 e, para isso, vamos considerar uma formulação geral para este novo sistema de ordem 3, como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \beta\xi\omega_n)} \quad (3)$$

e vamos distribuir este polo relativamente aos polos existentes variando o valor de β . O gráfico 4 apresenta este gráfico para β assumindo valores no conjunto $\{\xi\omega_n/4, \xi\omega_n, 4\xi\omega_n\}$.

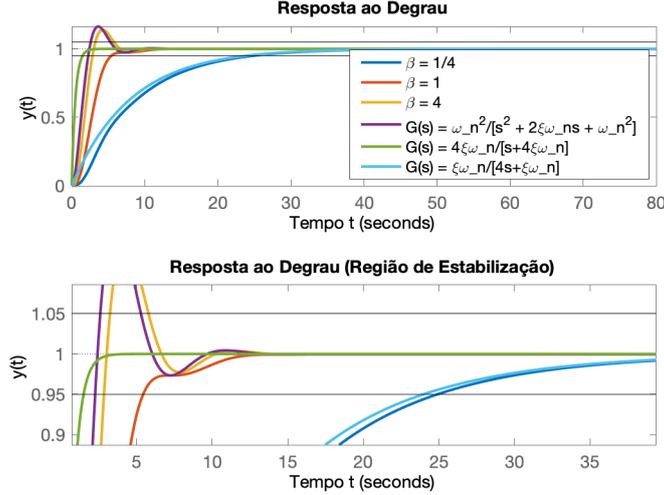


Figura 4: Efeito da adição de um polo extra na TF de ordem 2.

Observe que, quando o polo adicional é quatro vezes maior que a parte real dos polos complexo conjugados, $G(s)$ pode ser aproximada pela TF de ordem 2 (contendo 2 polos complexos conjugados). Por outro lado, quando o polo adicional é quatro vezes menor que a parte real dos polos complexos conjugados, $G(s)$ pode ser aproximada pela TF de ordem 1 (contendo somente o polo adicional). Além disso, observe que o polo mais lento (parte real mais próxima da origem) é quem dita a velocidade de convergência do sistema.

Por fim, deve-se tomar muito cuidado ao realizarmos uma análise da influência de um polo ou zero adicional em um TF. A análise anterior nos permite deduzir que, em alguns casos, podemos aproximar uma TF de ordem maior por uma TF menos complexa (com menos polos). Porém, como proceder para aproximar as funções de forma adequada? O próximo tópico, trata deste assunto.

IV REDUÇÃO DE MODELOS VIA POLOS DOMINANTES

Vamos considerar uma função de transferência a tempo contínuo, $G(s)$, contendo n polos localizados no semiplano esquerdo, o que implica em $G(s)$ ser assintoticamente estável. O objetivo é encontrar uma função $G_{ap}(s)$ contendo agora $r < n$ polos e que aproxime, tanto no regime transitório, quanto no regime estacionário, a função original $G(s)$. Observe que, devido a característica de causalidade dos nossos sistemas, é possível que tanto $G(s)$ quanto $G_{ap}(s)$ possuam zeros, porém em quantidade menor que suas respectivas quantidades de polos (no caso, n e r , respectivamente).

Por simplicidade da dedução, vamos assumir que $G(s)$ possua polos distintos entre si, de forma que podemos escrever

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

se ordenarmos estes polos do mais lento para o mais rápido, $0 < \text{Re}(p_1) \leq \text{Re}(p_2) \leq \dots \leq \text{Re}(p_n)$, reter os r polos com dinâmica mais lenta em $G_{ap}(s)$ implica em escrevermos

$$G_{ap}(s) \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{s + p_i}$$

com $b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, r$, em que estes valores são determinados de forma a manter as características em regime permanente da função original, uma vez que as características de transitório são capturadas pelos r **POLOS DOMINANTES** do sistema.

Observe, neste ponto, que a escolha $b_i = a_i$ leva a uma aproximação muito diferente da função original (em regime). Assim, vamos selecionar um conjunto de entradas do tipo $R(s) = 1/s^k$ com $k = 1, 2, \dots$ (degrau unitário, rampa unitária, etc.) tantas quantos forem os coeficientes a determinar.

Sendo $G(s)$ assintoticamente estável, $s = 0 \in \mathcal{D}\{G(s)\}$, portanto, para cada uma destas entradas podemos aplicar o teorema do valor final, de forma que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{s} = \frac{G(0)}{s} + \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} O_1(s)}_{=0}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{s^2} = \frac{G'(0)}{s} + \frac{G(0)}{s^2} + \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} O_2(s)}_{=0}$$

⋮

em que $O_i(s)$ são as parcelas decorrentes dos polos de $G(s)$ que tendem a 0 quando $t \rightarrow \infty$.

Para o caso da função aproximada, $G_{ap}(s)$, o mesmo pode ser aplicado para o cálculo do seu valor em regime. Assim,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_{ap}(s)}{s} = \frac{G_{ap}(0)}{s} + \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} Q_1(s)}_{=0}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_{ap}(s)}{s^2} = \frac{G'_{ap}(0)}{s} + \frac{G_{ap}(0)}{s^2} + \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} Q_2(s)}_{=0}$$

⋮

sendo $O_i(s)$ as parcelas decorrentes dos polos de $G_{ap}(s)$ que tendem a 0 quando $t \rightarrow \infty$. Esta análise nos permite determinar os coeficientes b_i , $i = \{1, 2, \dots, r\}$ através de r equações

$$G_{ap}^{(k)}(0) = G^{(k)}(0), \quad k = 0, \dots, r - 1$$

Exemplo:

Seja a função

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+6)} = \frac{6/5}{s+1} + \frac{-6/5}{s+6}$$

cujos polos são $\{-1, -6\}$. Observe que o último polo está mais afastados da origem em pelo menos 4

vezes. Neste caso, vamos construir uma função aproximada que capture o polo mais lento, $p = -1$,

$$G_{ap}(s) = \frac{a_1}{(s+1)}$$

Assim, determinamos os coeficientes da função aproximada como sendo

$$G(0) = G_{ap}(0) \Rightarrow a_1 = 1$$

Neste caso, teremos

$$G_{ap}(s) = \frac{1}{s+1}$$

O gráfico da função original e da função aproximada, $G_{ap}(s)$, encontram-se na Figura 5. Além disso, neste mesmo gráfico é apresentada a função aproximada com a escolha trivial $a_1 = 6/5$, bem como o gráfico de uma aproximação utilizando o polo mais rápido ao invés do mais lento.

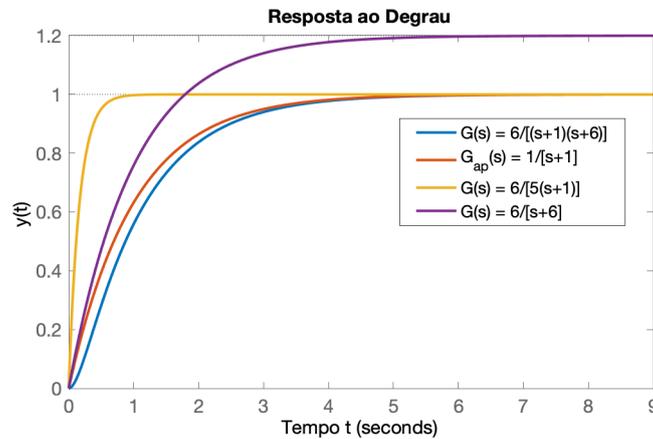


Figura 5: Função aproximada de $G(s)$.

EXERCÍCIO PROPOSTO:

1. Obtenha a função de transferência aproximada para

$$G(s) = \frac{150(s+4)(s+9)}{(s^2+6s+13)(s^2+16s+100)(s+7)}$$

REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] Dorf, RC; Bishop, RH. *Sistemas de Controle Modernos*, 11a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.