

LEITURA COMPLEMENTAR – 03

Tipos de Controladores. Tipo do Sistema.

Profa. Gabriela W. Gabriel

21 de Agosto de 2023

I PRELIMINAR

Ao realimentarmos a malha de controle, Figura 1, o elemento $C(s)$ pode assumir diferentes estruturas (quantidades de polos e zeros). Algumas destas estruturas são comumente encontradas na indústria e/ou em pesquisas pela simplicidade e facilidade de projeto. Destas, estudaremos três classes bastante importantes:

- controladores de 3 termos (**CONTROLADORES PID**),
- **CONTROLADORES DE AVANÇO E ATRASO DE FASE** e
- **CONTROLADORES DE ORDEM COMPLETA**.

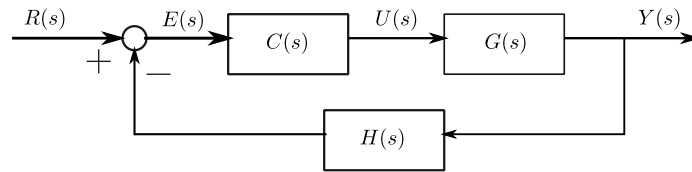


Figura 1: Estrutura de controle básica (adotada no curso).

Nota: Quando nenhuma referência em contrário for feita, assumiremos $H(s) = 1$, realimentação unitária.

Antes de iniciarmos o estudo destes controladores, vamos definir o que é o **tipo de um sistema dinâmico**.

II TIPO DE UM SISTEMA

Um sistema dinâmico a tempo contínuo com k polos na origem, $p_i = 0$ com multiplicidade k , é dito ser um **SISTEMA DO TIPO k** . Analogamente, uma TF contendo k polos na origem, é dita ser uma TF de tipo k .¹

Este conceito do tipo do sistema é muito importante na determinação da resposta do sistema em regime permanente, uma vez que está diretamente associada ao erro em regime. De fato, para um sistema em malha fechada estável com TF $F(s)$, temos que

$$Y(s) = F(s)R(s) \implies e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$$

em que $R(s)$ é o sinal de referência e $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$.

Decorrente da estabilidade do sistema, se $r(t) = \delta(t)$ (impulso unitário), então $e_\infty = 0$. Por outro lado, qual o comportamento de e_∞ se aplicarmos em $r(t)$ um conjunto de sinais padronizados

¹Definição adaptada de (Geromel, 2011).

do tipo

$$R(s) = \frac{1}{s^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

que correspondem, respectivamente, ao degrau unitário, à rampa unitária, e assim sucessivamente.

Além disso, observe que se um sistema é assintoticamente estável, ele não possui polos na origem. Porquê? Neste caso, ele é do tipo 0. Analogamente, se um sistema possuir tipo $k \geq 1$ ele necessariamente não será assintoticamente estável pela presença do polo na origem. Analisando a TF de malha fechada da Figura 1 com realimentação unitária, temos

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Vamos considerar que $C(s)G(s)$ seja do tipo ℓ . Se a TF $F(s)$ resultante for assintoticamente estável, então $C(s)G(s)$ tornam $F(s)$ do tipo 0, necessariamente.

Agora, vamos calcular o erro em regime deste sistema em malha fechada através do Teorema do Valor Final (lembrando que $(s = 0) \in \mathcal{D}\{F(s)\}$)

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(R(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) R(s) \end{aligned}$$

em que o termo entre parêntesis na última igualdade é necessariamente de ordem 0. Assim, o erro em regime deste sistema para entrada do tipo $R(s) = 1/s^k$ será nulo se e somente se $C(s)G(s)$ for no mínimo do tipo k .

Reescrevendo

$$C(s)G(s) = \frac{T(s)}{s^\ell} \implies e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^\ell}{s^\ell + T(s)} \right) \frac{1}{s^k}$$

onde $T(s)$, por construção, não possui polos na origem, facilmente verificamos que

$$\begin{aligned} \text{se } \ell \geq k & \quad , \quad e_\infty = 0 \\ \text{se } \ell < k & \quad , \quad e_\infty \neq 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever também que

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) \frac{1}{s^k} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 1/(1 + K_0), & k = 1 \\ 1/(K_{k-1}), & k \geq 2 \end{cases}$$

onde

$$K_{k-1} = \lim_{s \rightarrow 0} s^{k-1} C(s)G(s) = \begin{cases} \pm\infty, & 1 \leq k \leq \ell \\ \text{valor finito}, & k = \ell + 1 \\ 0, & k \geq \ell + 2 \end{cases}$$

Assim, se desejarmos que um sistema em malha fechada siga com erro nulo uma entrada parábola unitária, por exemplo, devemos impor que $C(s)G(s)$ seja no mínimo do tipo 3 ($\ell \geq 3$). As constantes K_ℓ são chamadas de **CONSTANTES DE ERRO** do sistema em malha fechada. As três primeiras delas recebem nomes especiais, sendo

- $K_0 = K_p$, **constante de posição**,
- $K_1 = K_v$, **constante de velocidade** e

- $K_2 = K_a$, **constante de aceleração**.

III CONTROLADORES PID

Os controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo), também conhecidos por controladores de três termos, possuem função de transferência na forma de

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (1)$$

sendo k_i , k_p e k_d parâmetros a serem determinados no projeto de controle, de acordo com alguma especificação de desempenho requerida.

Aplicando em (1) a Transformada de Laplace inversa, teremos

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t)$$

que confere o nome a estrutura (1). Observe, no entanto que a estrutura acima é não realizável, uma vez que representa um sistema não-causal. Para torna-la realizável é necessário alterar a estrutura derivativa ligeiramente introduzindo um polo simples com constante de tempo $T > 0$ suficientemente pequena. Assim, a estrutura resultante será

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{s}{Ts + 1} \quad (2)$$

que corresponde a um sistema causal e, portanto, realizável.

Nos controladores do tipo PID somente os zeros de $C(s)$ são alocados, enquanto os polos estão necessariamente em $p = 0$ e $p = 1/T$. Esta mesma estrutura gera outras mais simples e bastante comuns:

- **Controlador Proporcional (P):** Este é o tipo mais simples de controlador que corresponde a um único ganho, facilmente implementado de forma analógica através de um divisor de tensão, por exemplo. Sua estrutura é

$$C(s) = k_p \quad (3)$$

que na malha de controle da Figura 1, leva a seguinte TF de malha fechada

$$F(s) = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)}$$

- **Controlador Proporcional-Integral (PI):** Neste caso a estrutura do controlador é

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \frac{s + k_i/k_p}{s} \quad (4)$$

Este tipo de controlador tem o efeito de reduzir o erro em regime permanente uma vez que $C(0) = \infty$. Outra interpretação possível é que controladores do tipo PI tornam o sistema mais robusto a perturbações constantes, uma vez que a tipo do sistema é aumentado. No transitório, este tipo de controlador tende a aumentar o tempo de estabilização, t_s .

- **Controlador Proporcional-Derivativo (PD):** Sua estrutura é

$$C(s) = k_p + k_d \frac{s}{Ts + 1} = \frac{(k_p T + k_d)s + k_p}{Ts + 1} \quad (5)$$

De forma complementar ao controlador do tipo PI, o controlador do tipo PD suaviza alterações instantâneas no sinal de $e(t)$, embora reduza o valor das constantes de erro, o que

aumenta o erro em regime do sistema em malha fechada. No transitório, estes controladores tendem a diminuir o tempo de estabilização, uma vez que afastam os polos da origem do sistema.

- **Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID):** Na estrutura completa de (2) (ou, teoricamente, de (1)) é possível obtermos bons controladores utilizando regras práticas, ou regras de projeto, que serão vistas mais adiante no curso.

IV CONTROLADORES DO TIPO AVANÇO E ATRASO

Outra estrutura bastante comum para o elemento controlador é da forma

$$C(s) = \kappa \frac{s + z}{s + p} \quad (6)$$

para a qual, $\kappa \geq 0$, $z \geq 0$ e $p \geq 0$ são os parâmetros a determinar. Observe que no plano complexo, Figura 2, a fase $\angle C(j\omega) = \alpha - \beta$ é positiva para $z < p$ e negativa para $z > p$. Daí, o nome desta estrutura de controlador de **Avanço de Fase** ou de **Atraso de Fase**, respectivamente, a depender da localização dos polo e zero projetados.

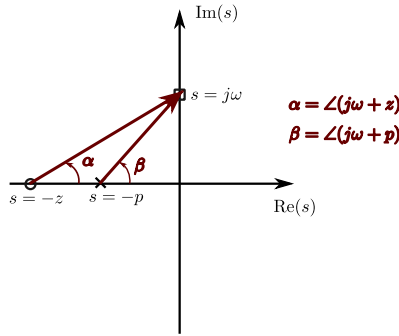


Figura 2: Posicionamento relativo $s = -z$ e $s = -p$ no Plano s .

Observe que esta estrutura permite avançar ou atrasar a fase do produto $C(s)G(s)$, sem que esta ultrapasse $\pm 90^\circ$. Além disso, controladores deste tipo podem ser vistos como casos particulares de controladores do tipo PID.

- **Controlador de Avanço de Fase:**

$$C(s) = \kappa \frac{s + z}{s + p} \approx k_p + k_d \frac{s}{Ts + 1}$$

com $z = k_p/k_d \ll p$, $\kappa = k_d p$ válida para toda faixa de frequência em que $\omega \ll p$, devido a realizabilidade da TF.

- **Controlador de Atraso de Fase:**

$$C(s) = \kappa \frac{s + z}{s + p} \approx k_p + \frac{k_i}{s}$$

com $z = k_i/k_p > p = 0$, $\kappa = k_p$ válida para toda faixa de frequência ω .

V CONTROLADORES DE ORDEM COMPLETA

São os controladores cuja TF possui a mesma ordem (ou seja, o mesmo número de polos) que a TF do sistema $G(s)$. Esta é a classe de controladores mais abrangente possível e possuem grande aplicabilidade no projeto de controladores utilizando a representação no espaço de estados, a ser visto em EES-20, sobretudo porque permitem otimizar o sistema em relação ao critério quadrático do LQR.

REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.