LEITURA COMPLEMENTAR – 05

Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

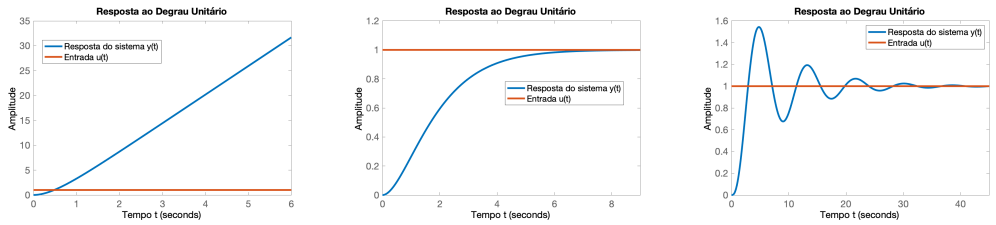
Profa. Gabriela W. Gabriel

29 de Julho de 2023

I Preliminar

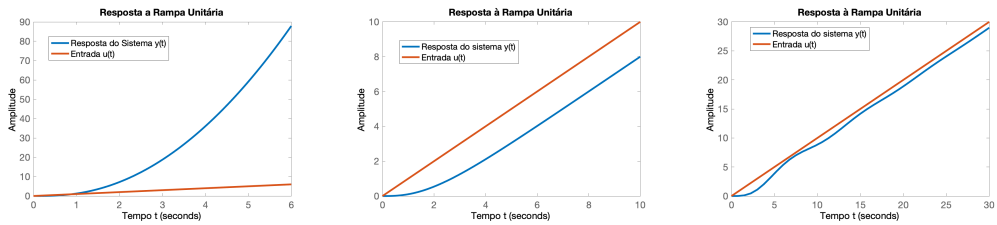
Um dos principais conceitos a serem abordados neste curso é o de **ESTABILIDADE** de sistemas dinâmicos. Nos tópicos/capítulos/aulas anteriores nós adotamos muitas vezes este conceito, porém, sem formalmente defini-lo. O objetivo deste texto é formalizarmos este conceito de maneira precisa.

Como nós já observamos também, um sistema dinâmico é estável se sua resposta ao degrau unitário é limitada. A Figura 1 abaixo apresenta três gráficos de respostas ao degrau de sistemas dinâmicos LTI. A figura 2, por outro lado, suas respostas à rampa unitária. Os sistemas estáveis seguirão sua referência de entrada, porém, nem em todos os casos com erro nulo. O mesmo não ocorre com os sistemas instáveis, em que sua resposta tem um comportamento divergente para qualquer que seja sua entrada do tipo $U(s) = 1/s^k$, $k \geq 1$.



(a) Sistema instável de ordem 2. (b) Sistema estável de ordem 2. (c) Sistema estável de ordem 3.

Figura 1: Respostas ao degrau unitário.



(a) Sistema instável de ordem 2. (b) Sistema estável de ordem 2. (c) Sistema estável de ordem 3.

Figura 2: Respostas à rampa unitário.

Em linhas gerais, quando impomos o requisito de estabilidade a um sistema dinâmico estamos, na prática, impondo que este sistema convirja, após um período de tempo em que terá um comportamento transitório, para um determinado perfil de referência correspondente a sua operação desejada. Na prática, já verificamos que este sistema será estável, se seus polos estiverem localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo $(\mathrm{Re}(s) \times \mathrm{Im}(s))$, (3). Esta condição equivale

a requerermos que a solução de (2) sejam exponenciais negativas. Assim, podemos definir uma condição muito importante para que nosso sistema seja estável.

Estabilidade (Geromel, 2011)

Um sistema linear e invariante no tempo é Assintoticamente Estável (BIBO estável) se, e somente se, todos os polos de sua função de transferência estiverem localizados em $\mathrm{Re}(s) < 0$.

II Definições Formais de Estabilidade

Formalmente, vamos definir a estabilidade de um sistema dinâmico segundo o conceito de Lyapunov, uma vez que esta nos permite uma melhor visualização e interpretação do conceito. Para isso, precisamos partir da representação no espaço de estados do nosso sistema. Assim,

Seja o nosso sistema dinâmico linear e invariante no tempo e SISO definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) = f(x) \\ y(t) &= Cx(t) = g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

em que $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema; $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é o sinal de saída do sistema. Reparem que nesta formulação foi omitida a entrada do sistema, ou seja, a dinâmica que importa para a análise de estabilidade é a interna decorrente de condições iniciais não nulas $x_0 = x(0) \neq 0$, que tiram o sistema de seu estado de equilíbrio.

Para recordar pontos importantes da Representação no Espaço de Estados, veja o Anexo A. Considere ainda que

$$\|x(t) - x_e\| \leq k$$

corresponde a uma região de raio k em torno de $x_e = 0$, seu pondo de equilíbrio. Além disso,

$$\|x(t) - x_e\| = \left[(x_1(t) - x_{1e})^2 + (x_2(t) - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n(t) - x_{ne})^2\right]^{1/2}$$

corresponde a norma euclidiana de $x - x_e$.

Estabilidade no Sentido de Lyapunov (Ogata, 1982)

O ponto de equilíbrio $x_e = 0$ de (1) é dito estável se, para todo $\delta \geq 0$ tal que $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$, existir um $\epsilon \geq 0$ que faça com que $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$, $\forall t \geq t_e$, sendo t_e o instante de tempo em que o sistema entra na região de raio ϵ em torno de x_e.

Observem que esta definição é abrangente e não requer que o sistema convirja assintoticamente para o ponto de equilíbrio x_e, mas requer que o sistema uma vez dentro da região de raio ϵ, ele não saia mais desta. Isto significa que o conceito de estabilidade permite que o sistema oscile em torno de seu ponto de equilíbrio. Certamente, na grande maioria dos casos esta condição não é adequada e um dos motivos é que há gasto de energia mesmo após o estabelecimento do equilíbrio.

Por outro lado, outra condição de estabilidade, mais restrita, e que utilizaremos no decorrer do curso, corresponde a **ESTABILIDADE ASSINTÓTICA**, que daqui para frente chamaremos apenas de estabilidade.

Estabilidade Assintótica (Ogata, 1982)

O ponto de equilíbrio $x_e = 0$ de (1) é dito **assintoticamente estável** se ele é estável e, em adição, ao entrar na região de raio ϵ ele converge, sem sair desta região, para x_e quando t aumenta indefinidamente.

Duas observações são importantes a respeito destas definições: A primeira delas é que falamos de estabilidade do ponto de equilíbrio, que no caso dos sistemas lineares corresponde a estabilidade do sistema. A segunda é que se notarem, estes conceitos são aplicáveis para um sistema do tipo regulação, cuja estrutura faz com que o sistema convirja para seu ponto de equilíbrio. Por outro lado, para sistemas de rastreamento, em que aplicamos uma referência a ser seguida pelo sistema, esta definição não nos é muito útil. Por isso, definimos ainda a **BIBO ESTABILIDADE** (*Bounded-Input-Bounded-Ouput*) em que impomos uma condição de limitação de amplitude do sinal de saída a partir de uma limitação de amplitude no sinal de entrada.

BIBO Estabilidade (Castrucci, 2018)

Um sistema linear é dito **BIBO estável** se qualquer sinal de entrada com amplitude finita (*bounded*) produzir um sinal de saída com amplitude também finita (*bounded*).

Para o caso dos sistemas lineares e invariantes no tempo, a BIBO estabilidade implica na estabilidade assintótica e vice-versa.

Referências

[1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

[2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami–Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

[3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.

[4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.

III Anexo A – Resumo das Diferentes Representações de um Sistema Dinâmico

Um sistema linear e invariante no tempo pode ser escrito por diferentes representações, todas equivalentes entre si, mesmo que a correspondência não seja biunívoca. A Figura 3 apresenta as nomenclaturas adotadas em cada caso.

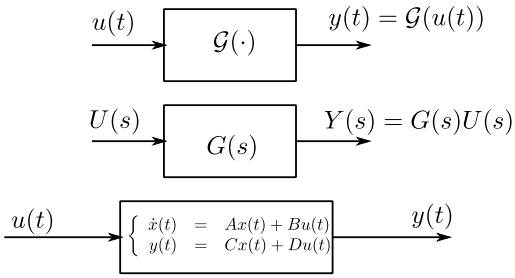


Figura 3: Diferentes representações matemáticas de um sistema dinâmico.

1) Representação através de equações diferencias

A partir da modelagem de um sistema dinâmico qualquer, utilizando as leis físicas que conhecemos

chegamos, de uma forma geral, a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t) \tag{2}$$

em que $(\cdot)^{(k)}$ corresponde a derivada k-ésima de $(\cdot)$ e dadas as condições iniciais $y^{(k)}(0)$, $k = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, e $u^{(k-1)}(0)$, $k = \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Aplicando a transformada de Laplace a esta primeira representação, teremos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k Y(s) s^k + Q(s) = \sum_{k=0}^{m} b_k U(s) s^k$$

onde $Q(s)$ corresponde aos termos da equação decorrentes das condições iniciais $y^{(k)}(0)$, $k = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, e $u^{(k-1)}(0)$, $k = \{0, 1, \cdots, m-1\}$ aplicadas ao sistema.

$$Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} U(s) + \frac{Q(s)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} \qquad \longrightarrow \qquad Y(s) = G(s)U(s) + \frac{Q(s)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}$$

2) Representação através de funções de transferência
Neste caso, para condições iniciais nulas, podemos escrever

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{c.i.\ nulas} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} = K \frac{\prod_{k=0}^{m}(s + z_k)}{\prod_{k=0}^{n}(s + p_k)} \tag{3}$$

em que $N(s)$ corresponde ao polinômio numerador de $G(s)$ e $D(s)$, ao polinômio denominador de $G(s)$. Além disso, vimos que podemos escrever estes dois polinômios em função de seus zeros e polos, sendo z_k, os m zeros de $G(s)$ e p_k os n polos de $G(s)$.

3) Representação através do espaço de estados (Demonstração retirada de (Geromel, 2011)
Dado um sistema escrito na forma de (3), com $a_n = 1$ e $n \geq m$,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k s^k - b_n \sum_{k=0}^{n} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} + b_n \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_n a_k) s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} + b_n \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n} (c_k) s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} + b_n \end{aligned}$$

em que $c_n = 0$ e neste caso a ordem do polinômio numerador torna-se estritamente menor que a do polinômio denominador. Fazendo

$$U(s) = \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k) s^k \right) Z(s)$$

teremos que

$$Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{n} (c_k) s^k \right) Z(s) + b_n U(s)$$

cuja transformada inversa das duas últimas igualdade nos leva a, respectivamente,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{(k)} = u(k)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} (c_k) z^{(k)}(t) + b_n u(t)$$

chamando $z^{(k)}(t) = x_k(t)$, para $k = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, e $x(t) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{bmatrix}$, temos

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + b_n u(t)$$

Resumidamente,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{5}$$