LEITURA COMPLEMENTAR – 06

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Profa. Gabriela W. Gabriel

3 de Agosto de 2023

I Preliminar

Até agora, vimos que conseguimos alterar a estabilidade de um sistema $G(s)$, ou alterar seu ponto de operação, realimentando a malha de controle. Para qualquer uma das aplicações do controle de sistemas, a principal característica é a que concerne a estabilidade! Na maioria dos casos desejamos um sistema estável, que responda, de forma automática e previsível a estímulos aplicados em sua(s) entrada(s).

Para garantir a estabilidade de um sistema linear, sabemos que as raízes s^* da equação característica daquele sistema $D(s) = 0$, sendo $D(\cdot)$ o denominador da TF em questão (malha aberta ou malha fechada), devem satisfazer a condição de $\text{Re}(s^*) < 0$, uma vez que estas se refletirão na resposta limitada do sistema através dos termos $e^{s^* t}$. Vamos, então, determinar as raízes de $D(s) = 0$!

Utilizando um computador, facilmente resolvemos qualquer polinômio de ordem finita n. Mas, como projetamos este sistema, de forma a definir controladores (incógnita do nosso problema de controle) que, quando inseridos na malha de controle, confiram ao sistema estabilidade? Para responder a esta questão, algumas técnicas, no contexto dos os sistemas LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO, estão bem sedimentadas na comunidade científica. Elas nos permitem avaliar a estabilidade de um sistema sem a necessidade de resolver a equação característica, são elas o **Critério de Routh-Hurwitz** e o **Critério de Nyquist**.

Outras técnicas, muito embora não nos permitam decidir sobre a estabilidade através de análises laterais, nos permitem entender melhor o sistema e projetar um controlador que atenda certas especificações de um comportamento desejado. Dentre estas técnicas estão projeto via **Diagrama de Bode**, projeto via **Carta de Nichols-Black**, projeto via **Lugar das Raízes**, que em conjunto com as duas anteriores, nos conferem um conjunto de ferramentas suficientes para projetar qualquer sistema de controle de ordem finita, linear e invariante no tempo.

II O Critério de Routh-Hurwitz

A primeira das técnicas que iremos aprender, e a mais simples delas, baseia-se na análise dos coeficientes da equação característica. Edward John Routh, em 1876, estabeleceu um método em forma de tabela para verificar a positividade das raízes de um polinômio de coeficientes reais. Duas décadas depois, Adolf Hurwitz estabeleceu um método equivalente através da análise dos determinantes das matrizes menores complementares da Matriz de Hurwitz, formada pelos coeficientes do polinômio. (Um pouco mais sobre a história e o método podem ser vistos em: *Routh-Hurwitz Stability Criterion*, wikipedia).

Antes de enunciar o critério, vamos observar que as raízes de um polinômio $D(s)$ podem ser decompostos todos em termos lineares, $(s+p)$ cujas raízes são reais, ou (s^2+as+b) cujas raízes são complexas conjugadas. Em qualquer dos casos, elas estarão localizadas no semiplano esquerdo de $\mathrm{Re}(s) \times \mathrm{Im}(s)$ se todos os seus coeficientes forem positivos. Como consequência, é condição necessária de estabilidade que todos os coeficientes de $D(s)$ sejam positivos. Esta condição não é suficiente, por isso, o critério de Routh-Hurwitz torna-se importante.

Partindo do polinômio cujas raízes desejamos analisar,

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

construímos a Tabela 1.

Construção da Tabela de Routh

- Se houverem raízes nulas, estas devem ser retiradas de $D(s)$ antes de iniciarmos a construção da tabela.
- Os coeficientes do polinômio $D(s)$ formam (de maneira intercalada) as duas primeiras **linhas da tabela**. Observe que, em não havendo mais coeficientes para aquela linha, os demais serão todos nulos.
- As linhas subsequentes são formadas, uma a uma, fazendo-se

$$b_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \cdots$$

- A tabela deve ser construída até chegarmos à linha s^0.

Tabela 1: Tabela de Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$	0
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$	0
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$				
s^1	$\cdots$				
s^0	$\cdots$				

Sendo todos os elementos da primeira coluna não nulos, a construção da tabela envolve apenas cálculos elementares. Deve ser observado que a multiplicação de uma linha inteira pelo mesmo número **positivo** não altera o resultado final. Esta observação é especialmente útil, uma vez que podemos multiplicar cada uma das linhas pelo seu respectivo primeiro elemento, o que facilita muito a obtenção da tabela.

A partir da Tabela 1 estabelecemos o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Todas as raízes de $D(s)$ estão localizadas na região $\mathrm{Re}(s) < 0$ se e somente se todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh forem positivos.

Se o primeiro elemento da primeria coluna for negativo, devemos esperar que todos os demais sejam negativos também, uma vez que a operação $(-1)D(s)$ torna todos positivos. A partir deste critério, podemos afirmar ainda que

A quantidade de raízes de $D(s)$ que estão localizadas na região $\mathrm{Re}(s) > 0$ corresponde ao número de vezes em que ocorre mudanças de sinal na primeira coluna da Tabela de Routh.

Vale ressaltar duas observações a respeito do critério de Routh-Hurvitz. A primeira delas diz respeito a necessidade e suficiência do critério. Neste caso, sendo todos os coeficientes da primeira coluna não nulos, podemos saber exatamente quantas das raízes estão localizadas em um e outro semiplano aberto do plano complexo. A segunda, corresponde a necessidade de todos os elementos da primeira coluna serem não nulos. Esta condição será relaxada e abordada com maior detalhe a seguir.

□ EXERCÍCIO RESOLVIDO □

Seja o polinômio $D(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$. *Neste caso, a tabela de Routh fica*

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 4 & 2 \\ s^1 & 9/2 & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Teremos então que todas as raízes de $D(s)$ *estão localizadas no semiplano aberto* $\mathrm{Re}(s) < 0$.

□ □ □

A ocorrência de um elemento nulo na primeira coluna da tabela requer um tratamento especial para aquela linha. Dois casos devem ser considerados (Geromel, 2011):

- **Todos os demais elementos daquela linha são nulos:** Neste caso, podemos substituir a linha nula pela derivada do polinômio gerador da linha anterior.

- **Algum dos elementos da linha não é nulo:** Neste caso, substitui-se o elemento nulo por $\epsilon > 0$ e fazemos $\epsilon \to 0$.

A ocorrência de uma linha inteira nula indica que o polinômio anterior divide $D(s)$. Portanto, podemos substituir a derivada do polinômio que é fator de $D(s)$ pelos coeficientes da linha nula. Há dois casos que implicam nesta situação: ou o polinômio possui duas raízes imaginárias conjugadas (sobre o eixo imaginário) ou duas raízes reais com sinais contrários. De qualquer forma, esta condição ocorrerá sempre em linhas de potência par! Além disso, esta condição reflete sempre em um sistema BIBO instável.

□ EXERCÍCIO RESOLVIDO □

Seja o polinômio $D(s) = s^7 + 4s^6 + 6s^5 + 4s^4 - 1s^3 - 4s^2 - 6s - 4$. *Neste caso, a tabela de Routh fica*

s^7	1	6	-1	-6
s^6	4	4	-4	-4
s^5	5	0	-5	
s^4	4	0	-4	
s^3	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$		

A ocorrência da linha s^3 *nula, indica que o polinômio gerador da linha* s^4

$$4s^4 + 0s^2 - 4$$

contém raízes conjugadas imaginárias ou reais de sinais opostos. De fato, resolvendo este polinômio obtemos as raízes $\{1, -1, j, -j\}$. *Imediatamente podemos perceber que de fato este polinômio não pode representar o denominador de um sistema estável, seja pela presença das raízes situadas sobre o eixo imaginário, seja pela raiz localizada em* $\mathrm{Re}(s) > 0$. *A análise quanto à* **estabilidade** *termina por aqui. Porém, quantas raízes localizam-se no semiplano direito? Para responder esta questão devemos continuar a construção da tabela.*

s^7	1	6	-1	-6
s^6	4	4	-4	-4
s^5	5	0	-5	
s^4	4	0	-4	
s^3	16	$\mathbf{0}$		
s^2	$0 \to \epsilon$	-4		
s^1	$64/\epsilon$			
s^0	-4			

Para continuidade da tabela, a linha s^3 *foi substituída pela derivada da linha* s^4. *Em seguida, em* s^2, *ocorre uma linha com o primeiro elemento nulo porém com outro elemento não nulo na mesma linha, que corresponde ao segundo caso especial. Substituindo o elemento nulo por* $\epsilon > 0$, *verificamos que em* s^0 *ocorre um elemento negativo, indicando que o polinômio original possui um elemento no semiplano* $\mathrm{Re}(s) > 0$. *De fato as raízes de* $D(s) = 0$ *estão localizadas em* $\{1, -1, j, -j, -2, -1 + j, -1 - j\}$.

□ □ □

□ EEXERCÍCIO RESOLVIDO □

Seja agora o polinômio $D(s) = s^3 + 5s + 2$. *Neste caso, a tabela de Routh fica*

s^3	1	5
s^2	$0 \to \epsilon$	2
s^1	$5 - 2/\epsilon$	
s^0	$8/5$	

Quando fazemos $\epsilon \to 0$, o termo $5 << -2/\epsilon$, e como consequência esta linha tem a primeira coluna negativa. Portanto, $D(s)$ possui duas raízes localizadas no semiplano aberto $\mathrm{Re}(s) > 0$. De fato, suas raízes são $\{0,1941 + 2,2612j, 0,1941 - 2,2612i, -0,3883\}$.

□ □ □

III Projeto de Controle Utilizando o Critério de Routh-Hurwitz

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz é bastante útil ainda quando queremos realizar projetos de controle. Para isso, devemos sempre analisar a primeira coluna da tabela de Routh. Veja os dois exemplos a seguir.

□ Exercício Resolvido □

Seja um sistema $G(s) = (s+1)/(s^2+s+2)$, em uma malha de controle com realimentação unitária negativa, do tipo apresentado na Figura 1, em que desejamos verificar para quais valores de K um controlador proporcional estabiliza a malha de controle.

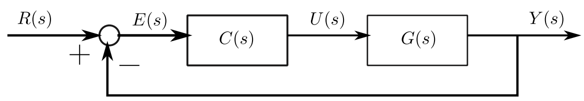

Figura 1: Malha de controle com realimentação unitária negativa.

Para este sistema, a TF de malha fechada pode ser escrita como

$$F(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + (1+K)s + (2+K)}$$

que gera o polinômio $D(s) = s^2 + (1+K)s + (2+K)$. Neste caso, a tabela de Routh fica

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 2+K \\ s^1 & 1+K & 0 \\ s^0 & 2+K & \end{array}$$

Como o primeiro elemento da primeira coluna é positivo, para que o sistema seja estável devemos ter

$$1 + K > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad K > -1$$

De fato, valores de $K < -1$ tornam a equação característica com coeficientes negativos, ou seja, perdemos a condição necessária para a estabilidade. Observem que $K = -1$ torna a segunda linha nula e, portanto, $s^2 = -1$, e temos duas raízes sobre o eixo imaginário $s = \pm j$, que conforme já vimos na Aula 05, fará o sistema oscilar indefinidamente, ver Figura 2.

□ □ □

□ Exercício Resolvido □

Seja agora o mesmo sistema BIBO instável $G(s) = 1/(s-2)$, em uma malha de controle com realimentação unitária negativa, do tipo apresentado na Figura 1, em que desejamos verificar para

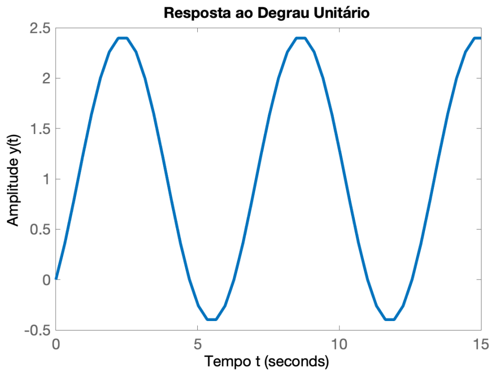

Figura 2: Resposta ao degrau do sistema com $K = -1$.

quais valores de K e b um controlador PI, $C(s) = K/(s+b)$, estabiliza o sistema $G(s)$.

Para este sistema, a TF de malha fechada pode ser escrita como

$$F(s) = \frac{K}{(s+b)(s-2)+K}$$

que gera a equação característica $s^2 + (b-2)s - 2b + K = 0$. Neste caso, a tabela de Routh fica

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -2b+K \\ s^1 & b-2 & \\ s^0 & -2b+K & \end{array}$$

Novamente, o primeiro elemento da primeira coluna é positivo, para que o sistema seja estável devemos ter então as duas desigualdades satisfeitas, simultaneamente,

$$\begin{aligned} b-2 &> 0 \\ -2b+K &> 0 \end{aligned}$$

Da primeira condição, temos que

$$b > 2 \tag{1}$$

Sendo $b \neq 2$, a segunda condição torna-se

$$K > 2b \tag{2}$$

que define a região de $K \times b$, Figura 3 em que todos os pontos deixam o sistema $G(s)$ estável.

□ □ □

Referências

[1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

[2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami–Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

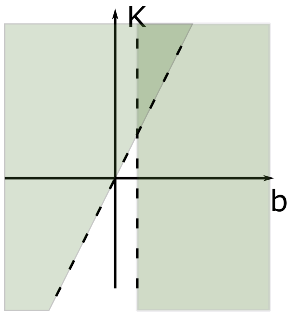

Figura 3: Região $K \times b$ que torna $G(s)$ estável.

[3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.

[4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.