

LEITURA COMPLEMENTAR – 07

Resposta em Frequência e Diagrama de Bode

Profa. Gabriela W. Gabriel

30 de Outubro de 2023

I PRELIMINAR

Podemos caracterizar sistemas LIT (Lineares e Invariantes no Tempo) a partir da sua resposta ao degrau, especialmente quando trata-se de sistemas de ordem 1 ou 2. Para sistemas LIT de quaisquer ordens, também conseguimos realizar uma boa caracterização do sistema através da sua resposta a entradas senoidais uma vez que a resposta para estes sistemas é muito bem definida sendo uma função simples da frequência de entrada. Assim, realizando uma análise da entrada e saída do sistema para diferentes frequências, é possível construirmos um modelo que o identifica unicamente. Esta forma de representar o sistema também traz informações importantes que serão utilizadas posteriormente para analisar e projetar sistemas de controle.

Em primeiro lugar, vamos analisar como um sistema LIT responde a entradas senoidais. Para isso, vamos considerar uma entrada do tipo

$$u(t) = X \text{sen}(\omega t) = \frac{X}{-2j} e^{-j\omega t} + \frac{X}{2j} e^{j\omega t} \implies U(s) = \frac{X}{-2j} \frac{1}{s + j\omega} + \frac{X}{2j} \frac{1}{s - j\omega} = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e, seja $G(s)$ a função de transferência de um sistema LIT. A saída $Y(s)$ deste sistema será

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

em que p_i são os polos de $G(s)$. Para $G(s)$ estável seus polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo e, assim, podemos escrever que

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

Para este sistema, a resposta em regime permanente (para $t > 0$ suficientemente grande) será então decorrente da entrada, ou seja,

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega}$$

onde a e \bar{a} são calculados segundo

$$\begin{aligned} a &= G(s)U(s)(s + j\omega)|_{s=-j\omega} = G(s) \frac{X\omega}{s - j\omega} \Big|_{s=-j\omega} = G(-j\omega) \frac{X}{-2j} \\ \bar{a} &= G(s)U(s)(s - j\omega)|_{s=j\omega} = G(s) \frac{X\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{X}{2j} \end{aligned}$$

Portanto,

$$Y(s) = G(-j\omega) \frac{X}{-2j} \frac{1}{s + j\omega} + G(j\omega) \frac{X}{2j} \frac{1}{s - j\omega}$$

Chamando $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$ e $XG(-j\omega) = A(\omega)e^{-j\phi(\omega)}$, sendo $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$ e $A(\omega) = X|G(j\omega)|$, teremos ainda, para o regime permanente, que

$$y(t) = A(\omega) \left[\frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \right]$$

$$= A(\omega) \text{sen}(\omega t + \phi(\omega))$$

Podemos verificar então que quando aplicamos um sinal senoidal com amplitude X e frequência angular ω na entrada de um sistema LTI, sua saída será uma senoide de amplitude $A(\omega) = X|G(j\omega)|$ e mesma frequência angular, porém defasada de um ângulo $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$.

Considere um sistema $G(s) = K(s+z)/(s+p)$, vamos analisar o que ocorre com o módulo e a fase da sua saída, quando em sua entrada aplicamos um sinal $u(t) = \text{sen}(\omega t)$. Neste caso,

$$|G(j\omega)| = \frac{K|j\omega + z|}{|j\omega + p|} = \frac{Ka}{b}$$

$$\angle G(j\omega) = \phi - \theta$$

Estes valores, mostrados na Figura 1 indicam que a amplitude e a fase da saída variam de acordo com a variação de ω . Além disso, estes gráficos serão diferentes a depender das quantidades e localizações de polos e zeros do sistema $G(s)$.

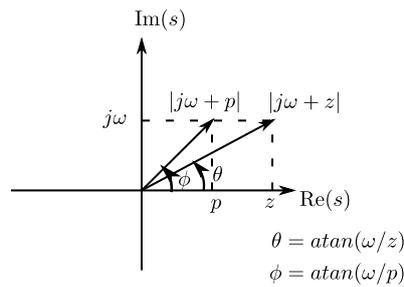


Figura 1: Obtenção da resposta em frequência utilizando o plano complexo.

Isso significa que podemos caracterizar um sistema dinâmico através do seu comportamento ao varrermos um conjunto suficientemente grande de frequências ω . A este mapeamento chamamos **RESPOSTA EM FREQUÊNCIA**.

□ EXERCÍCIO RESOLVIDO □

Considere um sistema $G(s)$ dado por

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Vamos avaliar para este sistema, como é o seu comportamento para uma entrada senoidal de amplitude unitária e diferentes frequências ω . As respostas obtidas pelo sistema são mostrado na Tabela 1.

Uma forma visualmente mais fácil de apresentar estes resultados é através de gráficos logarítmicos, Figura 2, também conhecidos por **Diagrama de Bode**, que será apresentado a seguir.

Tabela 1: Resposta em frequência para $G(s) = 10/(s(s + 1))$.

Frequência ω [rad/s]	$ G(j\omega) $	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$ [rad]
0,1	99,5	40,0	-1,67
0,3	31,9	30,08	-1,86
0,5	17,88	25,05	-2,03
0,8	9,76	19,8	-2,25
1,0	7,07	17,0	-2,35
1,5	3,7	11,36	-2,55
2,0	2,24	7,0	-2,68
10,0	0,1	-20	-3,04

Script para Obtenção dos Módulos/Fases de $G(s)$

```
>> Gs = tf(10,[1 1 0]);

>> omega = [0.1 0.3 0.5 0.8 1.0 1.5 2.0 5.0 10.0];

>> mod = []; moddB = [];

>> fase = []; phasedeg = [];

>> for w=omega

    G=evalfr(Gs,j*w);

    mod = [mod abs(G)];

    moddB = [moddB 20*log10(abs(G))];

    fase = [fase phase(G)];

    phasedeg = [phasedeg 180*phase(G)/pi];

end

>> semilogx(omega,moddB);

>> semilogx(omega,phasedeg);
```

Alternativamente

```
>> bode(Gs);
```

□ □ □

II DIAGRAMA DE BODE

O **DIAGRAMA DE BODE** corresponde a uma representação gráfica das funções de módulo $A(\omega)$ (**Diagrama de Módulo**) e de fase $\phi(\omega)$ (**Diagrama de Fase**). No **diagrama de módulo**, representamos nas ordenadas os valores do módulo $A(\omega)$, em decibéis, em uma escala linear e nas abscissas, os valores da frequência angular ω , em radianos por segundo, em uma escala logarítmica.

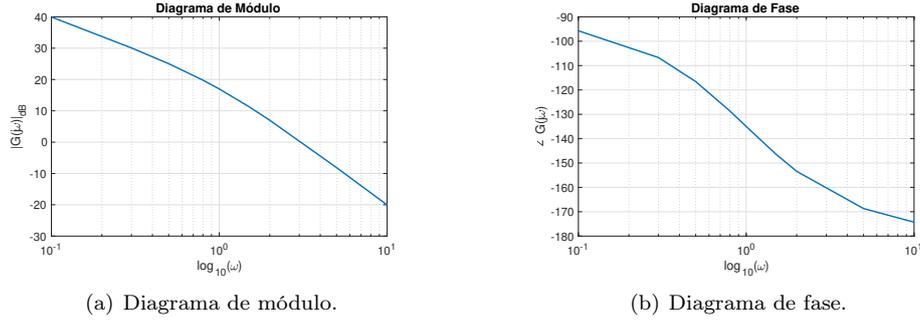


Figura 2: Gráfico logarítmico de módulo e fase de $G(s)$.

Decibel

O módulo de $A(s)$ expresso em decibéis, é dado por $A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(A(\omega))$.

Por outro lado, no **diagrama de fase**, representamos a fase $\phi(\omega)$, em graus, em uma escala linear e nas abscissas, os valores da frequência angular ω , em radianos por segundo, em uma escala logarítmica. Esta representação é de particular importância e facilmente podemos obtê-la através de ferramentas computacionais disponíveis atualmente. Sua construção manual, mesmo que aproximada, nos permite inferir o comportamento do sistema a ser controlado o que, mais a frente, será de fundamental importância.

Antes de dar início a este estudo, vamos definir o que é um sistema de **fase mínima** e de **fase não mínima**.

Sistema de Fase Mínima

Um sistema **estável** é dito de fase mínima se todos os seus zeros estiverem localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo. Em outras palavras, um sistema $G(s)$ é dito ser de fase mínima se tanto $G(s)$ (pelo fato de ser um sistema estável) quanto $G(s)^{-1}$ (pelo fato de ser de fase mínima) forem analíticas em $\text{Re}(s) \geq 0$.

A seguir, vamos analisar os dois casos distintos:

Caso fase mínima

Neste caso, todos os zeros de $G(s)$ são fatores do tipo $(s + z)$, com $z > 0$. No plano s , Figura 3a temos que, ao percorrermos ω de $0 \rightarrow +\infty$, a fase de $(s + z)$ irá variar de $0^\circ \rightarrow 90^\circ$.

Caso fase não mínima

Neste caso, pelo menos um dos zeros de $G(s)$ é um fator do tipo $(s - z)$, com $z > 0$. No plano s , Figura 3b temos que, ao percorrermos ω de $0 \rightarrow +\infty$, a fase de $(s - z)$ irá variar de $180^\circ \rightarrow 90^\circ$. É devido a este comportamento, que tais sistemas são ditos de fase não mínima.

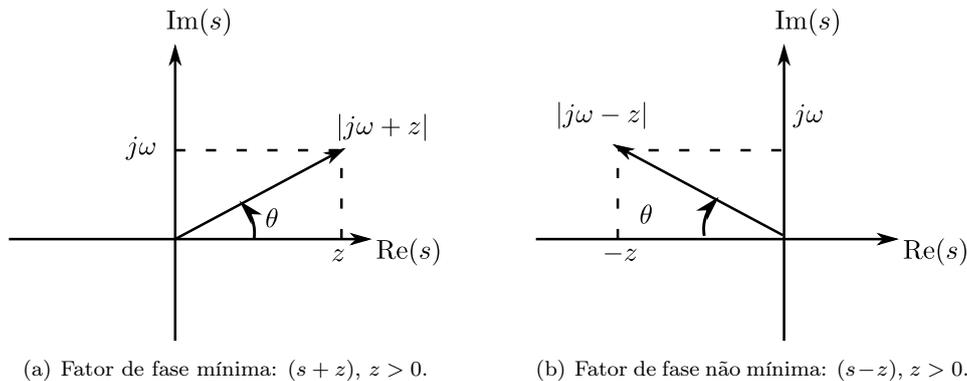


Figura 3: Análise da característica da fase mínima no plano s .

Certamente, a construção destes gráficos de forma manual não é trivial, porém facilmente realizável através de ferramentas computacionais. No entanto, para entender sua construção, vamos discutir a construção destes diagramas através de uma análise aproximada baseada nas assíntotas de alta e baixa frequências para módulo e para a fase de $G(s)$. Para isso, seja a função de transferência definida como

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

em que seus coeficientes são reais, constantes e positivos, dado que o sistema é invariante no tempo, linear, estável e de fase mínima. Para este sistema, vamos estudar a construção do Diagrama de Bode ASSINTÓTICO. Antes de iniciarmos, note que, na literatura, várias construções aproximadas podem ser encontradas. Aqui adotaremos uma simplificada que nos permitirá facilmente realizar projetos em sistemas de controle.

II.1. Diagrama Assintótico de Módulo

Vamos analisar o que ocorre com $A(\omega) = |G(j\omega)|$ para valores muito grandes e suficientemente pequenos de ω . Primeiramente, vamos fazer $\omega > 0$ muito grande. Neste caso, podemos aproximar

$$G(j\omega) \approx K_h s^{m-n}, \quad \text{sendo } K_h = \frac{b_m}{a_n} > 0$$

cujo módulo em decibel será

$$A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} K_h + 20(m-n) \log_{10} \omega$$

Em um gráfico linear nas ordenadas e logarítmico nas abscissas, esta corresponde a expressão de uma reta com coeficiente angular dado por $20(m-n)$, que significa que o gráfico varia $20(m-n)$ [dB/dec] ou $6(m-n)$ [dB/oit]. Além disso, em $\omega = 1 \text{ rad/s}$, teremos $A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} K_h$.

Década/Oitava

O intervalo de frequência angular $[a, b]$ é chamado de uma **oitava** quando $b = 2a$ e, é chamado de uma **década** quando $b = 10a$.

De fato, se considerarmos um gráfico com decaimento de 20 dB/dec (observe que em sistemas causais $(m-n) \leq 0$), teremos

$$\begin{aligned} A(\omega_1) - A(\omega_2) &= 20 \log_{10} K_h - 20 \log_{10} \omega_1 - 20 \log_{10} K_h + 20 \log_{10} \omega_2 \\ &= -20 \log_{10}(\omega_1/\omega_2) \end{aligned}$$

Se $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ e $\omega_1/\omega_3 = 1/10$, Figura 4, então

$$\frac{A(\omega_1) - A(\omega_2)}{A(\omega_1) - A(\omega_3)} = \frac{\log_{10}(\omega_1/\omega_2)}{\log_{10}(\omega_1/\omega_3)}$$

portanto,

$$A(\omega_1) - A(\omega_2) = 20 \frac{\log_{10}(1/2)}{\log_{10}(1/10)} \approx 6$$

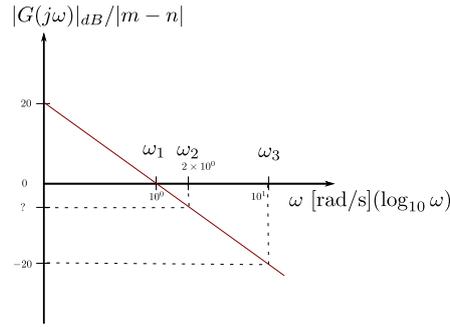


Figura 4: Conversão oitava-década.

Por outro lado, para baixas frequências ($\omega > 0$ suficientemente pequeno), teremos

$$G(j\omega) \approx K_\ell, \quad \text{sendo } K_\ell = \frac{b_0}{a_0} > 0$$

cujo módulo em decibel será

$$A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} K_\ell$$

Vamos considerar então que $n > m$, caso contrário as assíntotas de alta e baixa frequências não se cruzam. Assim, existe um ponto ω_c em que tais assíntotas se cruzam, dado por

$$\omega_c = \left(\frac{K_\ell}{K_h} \right)^{1/(m-n)}$$

Portanto, aproximamos o gráfico de módulo por

$$A_{dB}(\omega) \approx \begin{cases} 20 \log_{10}(K_\ell) & , \quad 0 < \omega \leq \omega_c \\ 20 \log_{10}(K_h) + 20(m-n) \log_{10}(\omega) & , \quad \omega \geq \omega_c \end{cases}$$

□ EXERCÍCIOS RESOLVIDO □

Vamos analisar, alguns casos simples para o diagrama de módulo

- Um polo simples não nulo

$$G(s) = \frac{p}{s+p}$$

Neste caso, teremos, para baixas frequências (menores que ω_c), $A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |p/p| = 0$. Por outro lado, para frequências maiores que ω_c ,

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{p}{j\omega} \right| = 20 \log_{10} |p| - 20 \log_{10}(\omega)$$

em que o ponto de cruzamento das assíntotas será $20 \log_{10} |p| = 20 \log_{10} \omega$ que corresponde a $\omega_c = |p|$. Portanto, o gráfico ficará como o apresentado na Figura 5, em que as assíntotas são apresentadas em linha vermelha contínua e o gráfico real em linha vermelha pontilhada. Observe que há uma diferença entre o gráfico real e o assintótico em $\omega = \omega_c$ de 3 [dB], que pode ser calculado como

$$|G(j\omega_c)| = \frac{p}{|(j+1)p|} \rightarrow |G(j\omega_c)|_{dB} = -20 \log_{10}(\sqrt{2}) = -3$$

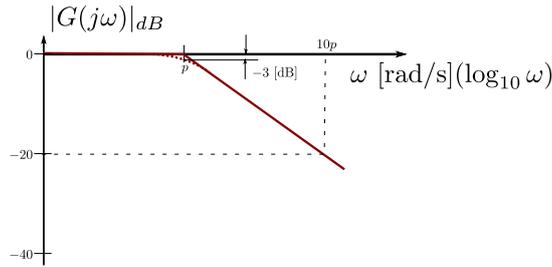


Figura 5: Diagrama de Módulo de um polo simples real.

- Um polo simples na origem

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Neste caso, para quaisquer frequências $\omega \geq 0$ teremos, no gráfico logarítmico

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(1/j\omega) = -20 \log_{10}(\omega)$$

em que o $A_{dB}(1) = 0$.

- Um zero simples não nulo

$$G(s) = \frac{1}{z}(s + z)$$

Neste caso, teremos, para baixas frequências (menores que ω_c), $A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |z/z| = 0$. Por outro lado, para frequências maiores que ω_c ,

$$A_{dB}(\omega) = -20 \log_{10} |z| + 20 \log_{10}(\omega)$$

em que o ponto de cruzamento das assíntotas ocorre em $\omega_c = |z|$. O gráfico aproximado para este caso está apresentado na Figura 6 em linha vermelha contínua. O gráfico real está apresentado em linha vermelha pontilhada.

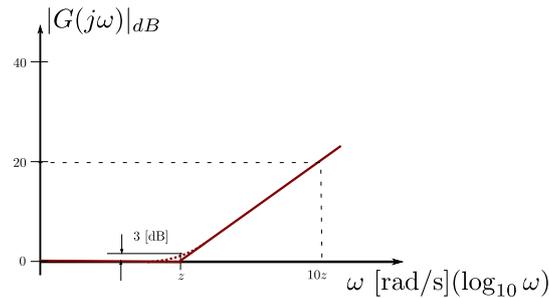


Figura 6: Diagrama de Módulo de um zero simples real.

- Um zero simples na origem

$$G(s) = s$$

Neste caso, teremos, para todas as frequências,

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(\omega)$$

que corresponde a uma reta crescente com variação de 20 [dB/dec]. Observe que em $\omega = 1$, temos $A_{dB}(\omega) = 0$.

- Polos complexos conjugados

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Neste caso, para $\omega \leq \omega_c$ teremos um gráfico assintótico do tipo

$$A_{dB}(\omega) = 40 \log_{10} \left(\frac{\omega_n}{\omega_n} \right) = 0$$

Para frequências maiores que ω_c , nosso gráfico assintótico será

$$A_{dB}(\omega) = 40 \log_{10}(\omega_n) - 40 \log_{10}(\omega)$$

que corresponde a uma reta com decaimento de 40 [dB/dec], que em $\omega = 1$ possui valor de $40 \log_{10}(\omega_n)$. Portanto, seu diagrama de módulo será aproximadamente o apresentado na Figura 7. Neste caso, a frequência de cruzamento das assíntotas será $\omega_c = \omega_n$, decorrente da igualdade das duas últimas equações.

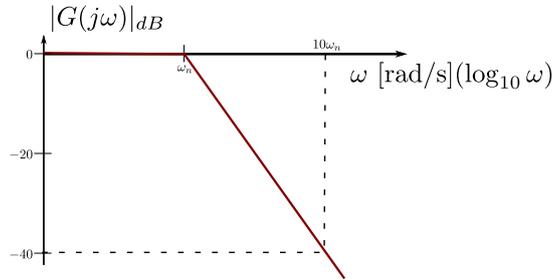


Figura 7: Diagrama de Módulo de polos complexos conjugados.

É importante ressaltar que o comportamento do diagrama de módulo para sistemas de ordem 2, nas proximidades de $\omega = \omega_n$, será definido de acordo com o valor de ξ do sistema. De fato, de acordo com a Figura 8 é possível perceber que, em relação às raízes do denominador de $G(s)$, quando:

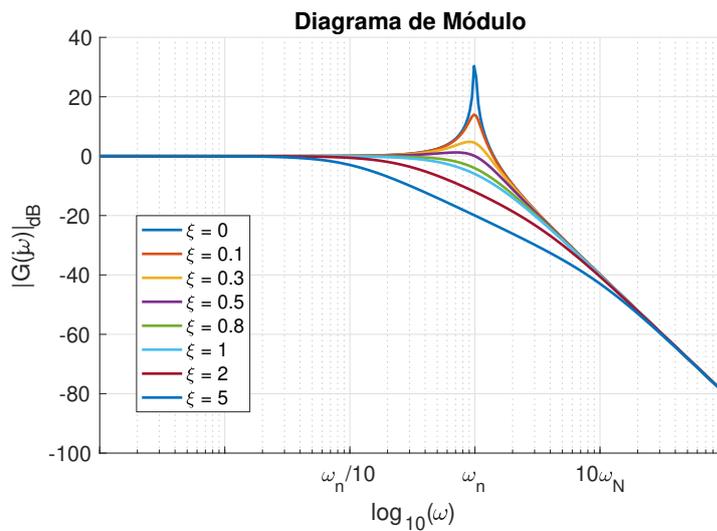


Figura 8: Diagrama de módulo para FT (função de transferência) de ordem 2, para diferentes valores de ξ .

- $\xi = 0$: Teremos duas raízes complexo conjugadas sobre o eixo imaginário. Neste caso,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

a medida que ω se aproxima de ω_n pela esquerda o valor do denominador diminui, aumentando o valor do módulo de $G(j\omega)$ até que este atinge seu máximo em $\omega = \omega_n$ passando a diminuir novamente para valores de $\omega > \omega_n$. Para frequências muito maiores que ω_n , o gráfico passa a decair assintoticamente.

- $0 < \xi < 1$: Teremos duas raízes complexas conjugadas no semiplano esquerdo. Neste caso, para frequências próximas de ω_n ,

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2]^{1/2}}$$

em que, para $\omega_n \neq 0$ e $\omega \neq 0$, teremos um comportamento similar ao do item anterior, porém com valores finitos de $|G(j\omega)|$. Podemos observar que, os diagramas de módulo de $G(j\omega)$, para $0 \leq \xi < 1$, terão valores maiores em $\omega = \omega_n$ do que o valor do diagrama para $\xi = 1$ (também avaliado em $\omega = \omega_n$). Este comportamento continua para valores de $\xi > 1$.

- $\xi = 1$: Teremos uma raiz real com multiplicidade 2. Neste caso, podemos reduzir $|G(s)|$ a

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - \omega_n)^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega^2 + \omega_n^2}$$

em que o comportamento do gráfico do módulo de $G(j\omega)$ é sempre decrescente.

- $\xi > 1$: Teremos duas raízes reais distintas. Analogamente ao caso anterior, teremos valores decrescentes de $|G(j\omega)|$ uma vez que

$$|G(j\omega)| = \frac{p_1 p_2}{[(p_1 p_2 - \omega^2)^2 + (p_1 + p_2)^2]^{1/2}}$$

□ □ □

II.2. Diagrama Assintótico de Fase

Analogamente, vamos analisar agora a fase da FT $G(s)$, para valores muito grandes e suficientemente pequenos de ω . Para isso, partiremos das aproximações já obtidas anteriormente, para os dois casos, ou seja, para grandes valores de ω , teremos

$$G(j\omega) \approx K_h s^{m-n} \implies \angle G(j\omega) \approx (m-n) \frac{\pi}{2}$$

Para ω suficientemente pequenos, teremos

$$G(j\omega) \approx K_\ell \implies \angle G(j\omega) \approx 0$$

Que é uma aproximação descontínua em $\omega = \omega_c$, com ω_c já definido no diagrama de módulo. Por este motivo, definimos, que em $\omega = \omega_c$ teremos $\phi(\omega) = \angle G(j\omega_c)$. Assim,

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega < \omega_c \\ \angle G(j\omega_c) & , \omega = \omega_c \\ (m-n) \frac{\pi}{2} & , \omega > \omega_c \end{cases} \quad (1)$$

Que é uma aproximação bastante grosseira da variação da fase de $G(j\omega)$ em função da frequência angular ω do sinal senoidal na entrada do sistema.

Uma aproximação mais apurada considera que as duas retas (para $\omega < \omega_c$ e para $\omega > \omega_c$) interceptam-se através de uma aproximação linear em torno do ponto $\omega = \omega_c$, de forma que, neste ponto, $\phi(\omega) = \angle G(j\omega_c)$ e a inclinação da aproximação linear coincide com a derivada de $\angle G(j\omega_c)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}G(j\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left[|G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \right] \\ &= \frac{d}{d\omega} [|G(j\omega)|] e^{j\angle G(j\omega)} + |G(j\omega)| \frac{d}{d\omega} \left[e^{j\angle G(j\omega)} \right] \\ &= \frac{G(j\omega)}{|G(j\omega)|} \frac{d}{d\omega} [|G(j\omega)|] + jG(j\omega) \frac{d}{d\omega} [\angle G(j\omega)]\end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{1}{G(j\omega)} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega)] = \Lambda(\omega) + j\Gamma(\omega) = \frac{1}{|G(j\omega)|} \frac{d}{d\omega} [|G(j\omega)|] + j \frac{d}{d\omega} [\angle G(j\omega)]$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\omega} [\angle G(j\omega)] = \Gamma(\omega) = \text{Im} \left[\frac{1}{G(j\omega)} \frac{d}{d\omega} (G(j\omega)) \right]$$

No gráfico logarítmico, a inclinação desta reta será então

$$\begin{aligned}\frac{d\angle G(j\omega)}{d \log_{10}(\omega)} &= \omega \ln(10) \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \\ &= \ln(10) \text{Im} \left[\frac{\omega}{G(j\omega)} \frac{d}{d\omega} (G(j\omega)) \right]\end{aligned}$$

ou ainda, para o valor de $\omega = \omega_c$, podemos escrever

$$K_\alpha = \frac{d\angle G(j\omega)}{d \log_{10}(\omega)} = \ln(10) \text{Im} \left[\frac{s}{G(s)} \frac{d}{ds} (G(s)) \right]_{s=j\omega_c}$$

Dado o coeficiente angular da reta que aproxima o diagrama de fase para $\omega \approx \omega_c$, podemos calcular os valores de ω_ℓ e ω_h correspondendo, respectivamente, aos pontos em que a reta cruza as assíntotas de baixa e alta frequências. A aproximação do diagrama passa a ser

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \leq \omega_\ell \\ \phi(\omega_c) + K_\alpha (\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_c) & , \quad \omega_\ell \leq \omega \leq \omega_h \\ (m-n) \frac{\pi}{2} & , \quad \omega \geq \omega_h \end{cases} \quad (2)$$

O diagrama da Figura 9 apresenta as diferenças entre o gráfico real e os dois diagramas assintóticos propostos. A curva em vermelho pontilhado corresponde ao gráfico assintótico descontínuo de (1), a linha azul contínua corresponde ao gráfico assintótico contínuo de (2) e a linha verde tracejada corresponde ao gráfico real da fase de $G(j\omega)$ para o caso de um polo simples real não nulo. É importante observar que este gráfico corresponde a uma FT específica. Outras FT podem apresentar diagramas assintóticos do tipo de (1) similares, porém diagramas reais de fase completamente distintos. Por este motivo, devemos ser cautelosos ao interpretar ou construir diagramas assintóticos, tanto de fase quanto de módulo. O exemplo a seguir ilustra os diferentes diagramas para diferentes FT estáveis e de fase mínima.

□ EXERCÍCIOS RESOLVIDOS □

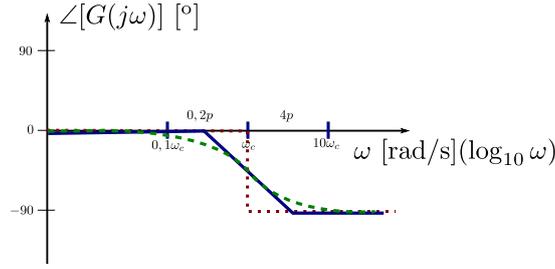


Figura 9: Diagrama de fase real e assintóticos para o caso de um polo real simples não nulo.

Vamos analisar, alguns casos simples para o diagrama de fase

- Um polo simples não nulo

$$G(s) = \frac{p}{s + p}$$

Neste caso, teremos, para baixas frequências (menores que ω_c), $\phi(\omega) = 0$. Por outro lado, para frequências maiores que ω_c ,

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Para um gráfico assintótico mais simples, teremos em $\omega = \omega_c$

$$\phi(\omega_c) = \angle \left\{ \frac{p}{j\omega_c + p} \right\} = \tan^{-1}(-\omega_c/p) = -\frac{\pi}{4}$$

uma vez que $\omega_c = p$. Por outro lado, para o gráfico assintótico com aproximação linear, teremos

$$K_\alpha = \ln(10) \operatorname{Im} \left[\frac{j\omega(j\omega + p)}{p} \frac{-p}{(j\omega + p)^2} \right]_{\omega=p} = -\ln(10) \operatorname{Im} \left[\frac{j}{j+1} \right] = -\frac{\ln(10)}{2}$$

que leva a equação linear $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{4} - \ln(10)(\log_{10}(\omega) - \log_{10}(p))/2$. Os pontos de cruzamento com as assintotas de baixa e alta frequências serão

$$\omega_\ell = e^{-\pi/2} p$$

$$\omega_h = e^{\pi/2} p$$

Os gráficos real e assintóticos estão apresentados na Figura 10.

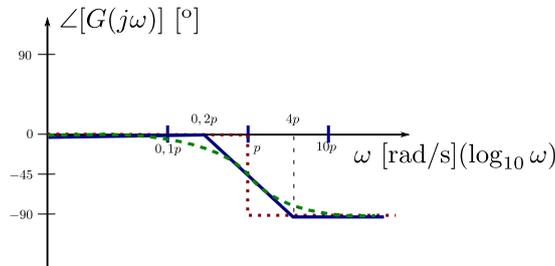


Figura 10: Diagrama de fase para um polo simples real.

- Um polo simples na origem

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Neste caso, para quaisquer frequências $\omega \geq 0$ teremos a fase de $G(j\omega)$ dada por

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\frac{\pi}{2}$$

- Um zero simples não nulo

$$G(s) = \frac{1}{z}(s + z)$$

Neste caso, teremos, para baixas frequências (menores que ω_c), $\phi(\omega) = 0$. Por outro lado, para frequências maiores que ω_c ,

$$\phi(\omega) = +\frac{\pi}{2}$$

Para um gráfico assintótico mais simples, teremos em $\omega = \omega_c$

$$\phi(\omega_c) = \angle \left\{ \frac{1}{z}(j\omega + z) \right\} = \tan^{-1}(\omega_c/z) = \frac{\pi}{4}$$

uma vez que $\omega_c = z$. Por outro lado, para o gráfico assintótico com aproximação linear, teremos

$$K_\alpha = \ln(10) \operatorname{Im} \left[\frac{j\omega z}{(j\omega + z)z} \right]_{\omega=z} = \ln(10) \operatorname{Im} \left[\frac{j}{j+1} \right] = \frac{\ln(10)}{2}$$

que leva a equação linear $\phi(\omega) = \frac{\pi}{4} + \ln(10)(\log_{10}(\omega) - \log_{10}(z))/2$. Os pontos de cruzamento com as assíntotas de baixa e alta frequências serão

$$\omega_\ell = e^{-\pi/2} z$$

$$\omega_h = e^{\pi/2} z$$

Os gráficos real e assintóticos estão apresentados na Figura 11.

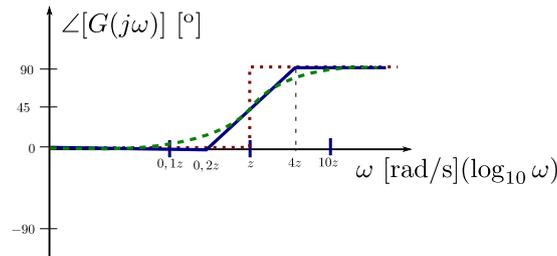


Figura 11: Diagrama de fase para um zero simples real.

- Um zero simples na origem

$$G(s) = s$$

Neste caso, teremos, para todas as frequências $\omega > 0$,

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

- Polos complexos conjugados

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para um gráfico assintótico mais simples, teremos em $\omega = \omega_c = \omega_n$

$$\phi(\omega_n) = \angle \left\{ \frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n^2 j} \right\} = -\frac{\pi}{2}$$

uma vez que $G(j\omega_n)$ é imaginário puro com sinal negativo. Por outro lado, para o gráfico assintótico com aproximação linear, teremos

$$K_\alpha = \ln(10) \operatorname{Im} \left[-2\xi\omega_n \frac{j + \xi}{2\xi^2\omega_n} \right] = -\frac{\ln(10)}{\xi}$$

que leva a equação linear $\phi(\omega) = -\pi - \ln(10)(\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_n))/\xi$. Os pontos de cruzamento com as assíntotas de baixa e alta frequências serão

$$\omega_\ell = e^{-\pi\xi/2}\omega_n$$

$$\omega_h = e^{\pi\xi/2}\omega_n$$

A Figura 12 apresenta os dois diagramas assintóticos construídos.

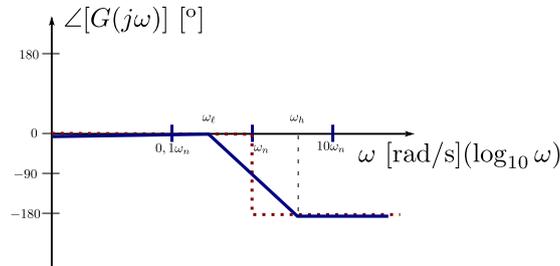


Figura 12: Diagrama de fase assintótico para um par de polos complexos conjugados.

É importante observar, novamente, que o comportamento do diagrama de fase para sistemas de ordem 2, nas proximidades de $\omega = \omega_n$, será definido de acordo com o valor de ξ do sistema. De fato, de acordo com a Figura 13 é possível perceber que, em relação às raízes do denominador de $G(s)$, quando:

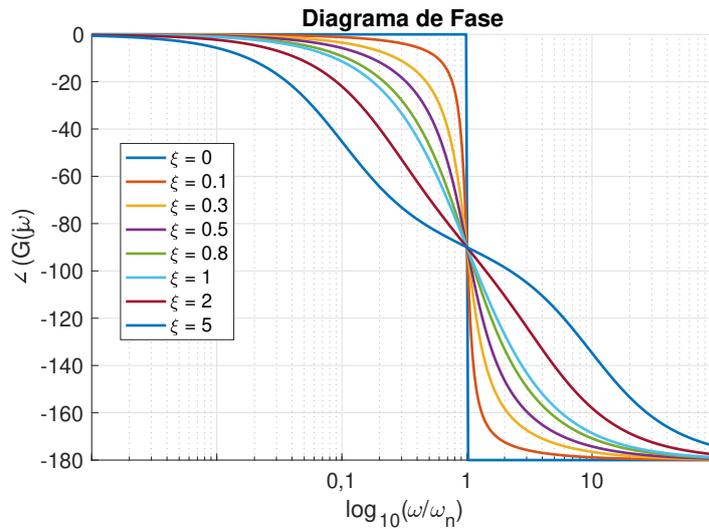


Figura 13: Diagrama de fase para FT de ordem 2, para diferentes valores de ξ .

– $\xi = 0$: Teremos duas raízes complexo conjugadas sobre o eixo imaginário. Neste caso,

temos

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

a medida que ω se aproxima de ω_n pela esquerda o valor do denominador diminui com valores positivos indicando uma fase de 0° . Quando ω passa por ω_n há uma inversão instantânea de fase de $0 \rightarrow -180^\circ$. Convém observar que a fase para frequências maiores que ω_n é negativa e não positiva. Para verificar este fato, basta analisar o ângulo do número complexo resultante. Para $\omega < \omega_n$, a FT é expressa por $G(s) = \omega_n^2 / [|\omega^2 - \omega_n^2|e^{j0}]$, cuja fase é nula. Por outro lado, para $\omega > \omega_n$, a FT é $G(s) = \omega_n^2 / [|\omega^2 - \omega_n^2|e^{j\pi}]$, cuja fase é -180° .

- $0 < \xi < 1$: Teremos duas raízes complexas conjugadas no semiplano esquerdo. Neste caso, para frequências próximas de ω_n , temos

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2 [(\omega_n^2 - \omega^2) - 2\xi\omega_n\omega j]}{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2]}$$

cuja fase pode ser calculada como $\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-2\xi\omega_n\omega/(\omega_n^2 - \omega^2))$. Para $0 < \omega < \omega_n$, seu valor estará entre 0 e -90° . Para $\omega > \omega_n$, seu valor estará entre -90° e -180° .

- $\xi = 1$: Teremos uma raiz real com multiplicidade 2. Neste caso, podemos reduzir $\angle G(s)$ a

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{-2\omega\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

Para $0 < \omega < \omega_n$, seu valor estará entre 0 e -90° , porém maior que aqueles obtidos para o caso de $0 < \xi < 1$. Para $\omega > \omega_n$, seu valor estará entre -90° e -180° , porém com valor menor que aqueles do caso anterior, como pode ser observado na Figura 2.

- $\xi > 1$: Teremos duas raízes reais distintas. Analogamente ao caso anterior, teremos valores de $\angle G(j\omega)$ tais que

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{-(p_1 + p_2)\omega}{p_1p_2 - \omega^2}$$

Verifique que o valor de $p_1 + p_2$ restrito a $p_1p_2 = \omega_n^2$ será mínimo quando $p_1 = p_2 = \omega_n$. Assim, para $0 < \omega < \omega_n$, o valor da fase de $G(j\omega)$ estará entre 0 e -90° , porém maiores que aquele obtido para o caso de $\xi = 1$. Para $\omega > \omega_n$, seu valor estará entre -90° e -180° , porém com valores menores que aquele do caso anterior, como também pode ser observado na Figura 2.

□ □ □

II.3. Notas Sobre o Diagrama de Bode

Duas observações são muito importantes a respeito dos gráficos assintóticos apresentados até aqui. A primeira delas diz respeito ao fato de que, se fatorarmos a FT original $G(s)$ em funções mais simples, como as estudadas nos exemplos até aqui, de forma a termos

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s) \\ &= |G(s)|e^{j\angle G(s)} \end{aligned}$$

então teremos $|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdots |G_n(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \cdots + \angle G_n(j\omega)$. Sendo o diagrama de módulo em [dB], então $20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + \cdots + 20 \log_{10} |G_n(j\omega)|$. Esta observação nos diz que, os diagramas de Bode de $G(s)$ corresponde à soma dos diagramas de Bode individuais de $G_1(s), \cdots, G_n(s)$.

A segunda observação diz respeito a abrangência dos Diagramas de Bode. Felizmente, esta ferramenta não se restringe às FT estáveis e de fase mínima, como já observado anteriormente. De fato, para que possamos considerar estes casos especiais, basta que utilizemos as devidas adaptações para valores de p , z e ξ menores que zero para cada um dos casos, porém todo cuidado na análise é necessário.

REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.