

LEITURA COMPLEMENTAR – 09

Projeto Utilizando o Diagrama de Bode (REQUISITOS E ESTRUTURAS DE CONTROLADORES)

Profa. Gabriela W. Gabriel

30 de Outubro de 2023

I PRELIMINAR

Dando continuidade ao estudo do diagrama de Bode, nesta leitura serão apresentados novos requisitos de desempenho de sistemas de controle no domínio da frequência, obtidos a partir dos diagramas de Bode. Antes de iniciar, porém, vamos analisar um exemplo de sistema com fase não mínima. Trata-se de um sistema elétrico do tipo RC.

□ EXERCÍCIO RESOLVIDO □

Considere o circuito apresentado na Figura 1. O modelo deste sistema corresponde a

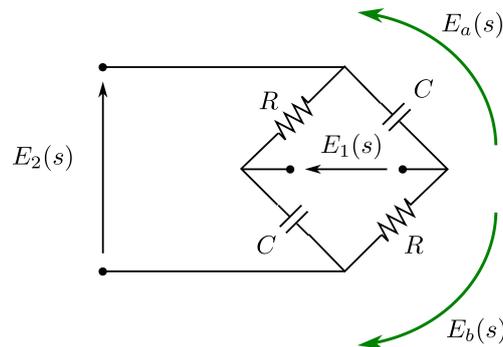


Figura 1: Circuito elétrico de fase não mínima.

$$E_2(s) = E_a(s) - E_b(s) = E_1(s) \frac{1/(sC)}{(1/(sC) + R)} - E_1(s) \frac{R}{(1/(sC) + R)} = E_1(s) \frac{1 - RCs}{1 + RCs}$$

que leva a função de transferência

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1 - RCs}{1 + RCs}$$

Para $R [\Omega] = C [F] = 1$, a FT (função de transferência) fica

$$G(s) = \frac{1 - s}{1 + s}$$

O diagrama de Bode de módulo deste sistema é bastante simples. Inicia constante com o valor de 0 [dB], em $\omega = 1$ [rad/s], o esboço do diagrama passaria crescer com taxa de 20 [dB/dec], devido a presença do zero em $z = 1$, e a decrescer com taxa equivalente, devido à presença do polo em $p = 1$. Desta forma, o comportamento do esboço é constante e igual a 0 [dB] para todo $\omega > 0$.

Por outro lado, como vimos, a maior diferença ocorrerá no diagrama de Bode de fase, uma

vez que o diagrama do zero no semi-plano direito do Plano s , tem o efeito

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle \left(\frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{-2\omega}{1 - \omega^2} = 0$$

Pela análise dos sinais das partes real e imaginária, o numerador, para valores positivos de ω , situa-se no quarto quadrante e a medida que $\omega \rightarrow 0$, encontra-se mais próximo do eixo real. Para $\omega \rightarrow \infty$, este ponto continua no quarto quadrante, porém a medida que ω cresce, aproxima-se do semi-eixo imaginário negativo. Portanto, sua variação de fase vai de 360° a 270° . A contribuição de fase do denominador nós já estudamos e sabemos que vai de 0° a -90° . Por isso, o diagrama de Bode de fase desta FT corresponde a uma fase de 360° para baixas frequências e 180° , para altas frequências, confirmado através do MATLAB, Figura 2.

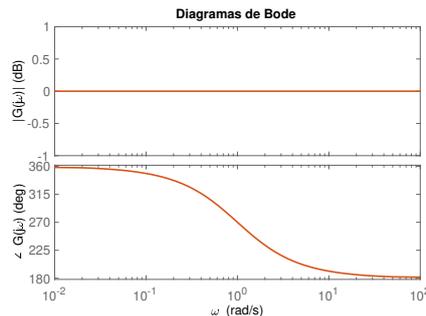


Figura 2: Diagramas de Bode para o circuito elétrico de fase não mínima.

Sabemos que este sistema trata-se de um sistema estável com determinados requisitos de desempenho. Vamos, agora, estudar para quais valores de $K > 0$, teremos um sistema estável em malha fechada, considerando realimentação negativa unitária com FT de caminho direto dada por $KG(s)$. Neste caso, a FT de malha fechada, nos fornece

$$F(s) = \frac{K - Ks}{s(1 - K) + (1 + K)}$$

que rapidamente, aplicando o critério de Routh-Hurwitz, nos fornece

$$\begin{cases} 1 - K > 0 \\ 1 + K > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 - K < 0 \\ 1 + K < 0 \end{cases}$$

Observe que os dois conjuntos de solução obedecem o critério recém mencionado. Estas condições nos levam ao intervalo $0 < K < 1$, uma vez que o segundo conjunto não possui solução factível.

□ □ □

Neste exemplo pudemos identificar a estabilidade do sistema utilizando Routh-Hurwitz. Outra forma, seria analisar o LGR para este sistema. A pergunta agora é: É possível identificar a estabilidade e medir características de desempenho do sistema utilizando o Diagrama de Bode? A resposta é: Sim. Por isso, nosso objetivo agora é analisar outros critérios de desempenho definidos no domínio da frequência, correlacioná-los com os critérios no domínio do tempo, sempre que possível, e projetar sistemas de malha fechada que atendam diferentes critérios de desempenho.

II CRITÉRIOS DE DESEMPENHO

Sistemas de ordem superior a 2 podem ter suas FT aproximadas, caso possuam polos dominantes, por sistemas de ordem 1 ou 2. Vimos alguns critérios de desempenho no domínio do tempo que caracterizam as FT de sistemas dinâmicos de ordem 1 ou ordem 2. Estes definem uma

região (região $\Omega \subset \mathbb{C}$) do plano complexo dentro da qual os polos do sistema devem estar localizados para que o sistema cumpra os requisitos desejados. Como exemplo, requisitos de tempo de acomodação/estabilização (t_s) e do valor do máximo sobressinal (M_p) atingido durante o período transitório do sistema impõem condições sobre sua constante de tempo (caso o sistema seja de ordem 1) ou sobre seu coeficiente de amortecimento ξ e sua frequência natural de oscilação ω_n (caso trate-se de um sistema de ordem 2).

Analisando o Diagrama de Bode, verificamos que outras características são relevantes e também podem especificar os sistemas de controle quanto ao seu desempenho no domínio do tempo. De fato, podemos definir as características de **bf** valor de pico máximo e de **largura de faixa** através da análise do diagrama de Bode de módulo.

DEFINIÇÃO

O **VALOR DE PICO MÁXIMO** corresponde ao valor do módulo da função de transferência calculada na frequência de ressonância ω_r de forma que

$$|G(j\omega_r)| = \max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)|$$

DEFINIÇÃO

A **LARGURA DE FAIXA**, definida pela frequência W , é o menor intervalo do tipo $[0, W]$ tal que

$$|G(jW)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |G(j0)|$$

A largura de faixa também é chamada de **FREQUÊNCIA DE CORTE**.

Neste caso, para encontrar o valor de W , basta determinarmos o ponto do gráfico que está $20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 3$ [dB] abaixo do seu valor em $\omega = 0$. Vale ressaltar que tanto o pico máximo em frequência quanto a largura de faixa têm significados físicos bastante importantes. De fato, a pico máximo indica para qual frequência de sinal de entrada o sinal de saída assumirá seu valor máximo e qual este valor. Conceito similar é o máximo sobressinal estudado no domínio do tempo, que naquele caso indicava o instante de tempo em que o valor máximo da saída para uma entrada degrau unitário ocorrerá, e qual seu valor. O tempo do máximo sobressinal corresponde ao tempo de pico, enquanto a frequência de pico máximo corresponderá à frequência de ressonância do sinal.

Por outro lado, a largura de faixa corresponde a faixa de frequências em que o sinal é transmitido através do sistema de controle sem ter uma atenuação significativa. Observe que conceitualmente, uma queda de $3dB$, corresponde à potência do sinal cair pela metade. Nestas condições, os ruídos presentes no sistema podem ser relevantes e não permitirem uma correta leitura do sinal de saída. Desta forma, a largura de faixa nos diz em quais frequências o sinal de saída será lido corretamente e quais frequências serão significativamente atenuadas ao serem transmitidas através do sistema. Muitos ruídos na natureza apresenta-se em altas frequências, por este motivo é conveniente que a largura de faixa seja a menor possível.

Como vimos há uma correspondência direta entre o encontro das assíntotas no gráfico de módulo do Diagrama de Bode e os polos e zeros do sistema. Assim, podemos dizer que em sistemas de primeira e segunda ordem, quanto menor a largura de faixa, menor a velocidade de resposta do sistema, dado que seus polos estarão mais próximos da origem do sistema cartesiano. Por isso, o projeto de sistemas de controle é um compromisso entre velocidade de resposta e a possibilidade de conviver com ruídos em uma faixa de frequências cada vez maior.

Vamos analisar estas duas quantidades para cada um dos casos de FT de ordem 1 e 2.

- FT de ordem 1

$$G(s) = \frac{p}{s+p}, \quad p > 0$$

Esta função $G(s)$ é decrescente para todos os valores de p . Assim, podemos concluir que $\omega_r = 0$ e, portanto, o máximo do seu diagrama de módulo é dado por

$$|G(j\omega_r)| = |G(j0)| = 1$$

Por outro lado, para a faixa de passagem, calculamos

$$|G(jW)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|G(j0)| \implies \frac{p^2}{W^2 + p^2} = 1/2$$

que leva a $W = p$. Como exposto anteriormente, quanto maior o valor de p , mais rápida será a resposta do sistema, porém maior será sua largura de faixa, o que significa que o sistema torna-se mais vulnerável a ruídos de alta frequência eventualmente presentes.

- FT de ordem 2

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Observe que, para os casos de $\xi \in [1, \infty)$ a solução será decrescente, com $\omega_r = 0$. Caso $\xi \in [0, 1)$, precisaremos resolver o problema de máximo de

$$|G(s)| = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\xi(\omega/\omega_n)j|}$$

em que o denominador de $|G(s)|$ corresponde à função $(\omega/\omega_n)^4 + 1 - 2(\omega/\omega_n)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2$. Portanto, resolver o problema anterior equivale a resolver o problema de mínimo

$$\min_{\alpha \geq 0} \alpha^2 - 2(1 - 2\xi^2)\alpha + 1$$

em que $\sqrt{\alpha} = \omega/\omega_n$ e que corresponde a um problema de solução única.

Resolvendo o problema anterior teremos

$$\frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 - 2(1 - 2\xi^2)\alpha + 1] = 2\alpha - 2(1 - 2\xi^2) = 0 \implies \alpha = 1 - 2\xi^2$$

Note porém que, para uma solução da função quadrática negativa, teremos ω_r complexo, o que não é factível. Assim, esta solução é válida para $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$. Caso contrário, o ponto de mínimo da função quadrática situa-se em $\alpha < 0$, uma vez que todas as raízes da função serão negativas, o que equivale a termos $\omega_r = 0$. Portanto,

$$\omega_r = \begin{cases} \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} & , \quad 0 \leq \xi \leq 1/\sqrt{2} \\ 0 & , \quad \xi < 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Para $\omega_r = 0$, $\max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)| = |G(j0)| = 1$. Para $0 \leq \xi \leq 1/\sqrt{2}$, teremos

$$\max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)| = \mathcal{M}(\xi) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

que depende unicamente do fator de amortecimento ξ . Se quisermos verificar quais valores de ξ verificam uma especificação de $\mathcal{M}(\xi) \leq \mathcal{M}_q$, sendo $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}(\xi_q)$, teremos que a desigualdade é válida $\forall \xi \mid 0 < \xi_q \leq \xi \leq 1/\sqrt{2}$, uma vez que a função $\mathcal{M}(\xi)$ é decrescente

em ξ , Figura 3.

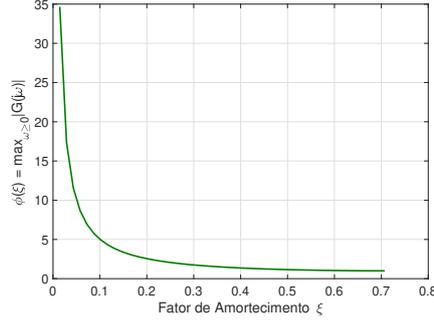


Figura 3: Máximo valor do módulo de $G(j\omega)$ em função de ξ .

Para o cálculo da largura de faixa W , sendo $|G(j0)| = 1$, precisamos encontrar o valor de W que satisfaça $|G(jW)|^2 = 1/2$. Resolvendo a equação em W encontramos

$$|G(jW)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |G(j0)| \implies \left| \frac{\omega_n^2}{-W^2 + 2j\xi W\omega_n + \omega_n^2} \right| = 1/\sqrt{2}$$

$$2\omega_n^4 = W^4 - 2W^2\omega_n^2(1 - 2\xi^2) + \omega_n^4 \implies W = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}}$$

O gráfico da Figura 4 mostra como W/ω_n varia em função de ξ . Observe que, para valores de $0 \leq \xi \leq 1/\sqrt{2}$, $W/\omega_n \approx 1$, o que nos permite dizer que $W \approx \omega_n$. Em que a aproximação torna-se exata em $\xi = 1/\sqrt{2}$.

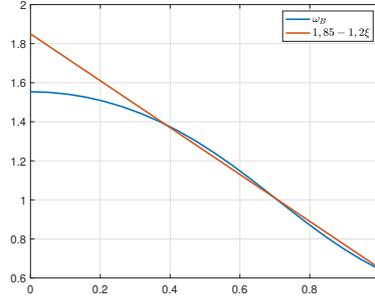


Figura 4: Gráfico de W/ω_n em função de ξ .

Note que na Figura 4 acima, a linha em azul é muito próxima da curva de W/ω_n para determinando valores de ξ . De fato, esta é outra aproximação bastante utilizada na literatura que corresponde a reta $W = \omega_n(1,85 - 1,2\xi)$, para valores de $0,35 \leq \xi \leq 1$.

Considerando as análises acima, podemos verificar que há uma correspondência entre as especificações no domínio do tempo, dadas por $(\xi_q, (\xi\omega_n)_{\max}, (\xi\omega_n)_{\min})$ e os requisitos no domínio da frequência $(\phi_q, W_{\max}, W_{\min})$. Relembrando, $(\xi\omega_n)_{\max}$ e $(\xi\omega_n)_{\min}$ correspondem, respectivamente, aos valores máximo e mínimo da parte real das raízes de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$. No caso de uma FT de ordem 1, se seu polo p estiver situado na região definida por $[(\xi\omega_n)_{\min}, (\xi\omega_n)_{\max}]$, garantimos os seus requisitos temporais.

III MARGENS DE ESTABILIDADE

Uma das grandes vantagens de se utilizar as respostas em frequência para analisar e/ou projetar sistemas de controle é, no domínio da frequência, podermos analisar sistemas contendo atrasos puros ou com múltiplas malhas. Além disso, a determinação das margens de estabilidade do sistema são de fácil leitura quando utilizamos esta abordagem.

De uma forma geral, as **margens de estabilidade** de um sistema indicam o quanto de variações na fase e módulo deste sistema são suportados sem que o sistema perca sua estabilidade.

Matematicamente, para um sistema com FT de malha aberta $C(s)G(s)$ e realimentação negativa unitária, para garantir a estabilidade, desejamos (novamente) que $1 + C(s)G(s) = 0$ tenha raízes localizadas no semi-plano complexo esquerdo. Convém observar que podemos reescrever a equação característica como

$$C(s)G(s) = -1 \implies |C(s)G(s)| = 1 \text{ e } \angle C(s)G(s) = (2\kappa - 1)180^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Então, se existir um $\omega_c \in \mathbb{C} \mid C(j\omega_c)G(j\omega_c) = -1$, então o sistema realimentado com equação característica $\Delta(s) = 1 + C(s)G(s) = 0$ é oscilatório puro. De fato, nesta condição, $K = 1$ no lugar geométrico das raízes de $C(s)G(s)$ corresponde ao ponto crítico de cruzamento com o eixo imaginário puro. Assim, vamos definir que as frequências ω_f e ω_g como

$$\angle C(j\omega_f)G(j\omega_f) = (2\kappa - 1)180^\circ$$

e

$$|C(j\omega_g)G(j\omega_g)|_{dB} = 0$$

As **margens de estabilidade** são as quantidades que “faltam” para que o sistema em malha fechada atinja os valores requeridos, ou seja, ou acrescentando fase cheguemos a $C(j\omega_f)G(j\omega_f) = C(j\omega_c)G(j\omega_c) = -1$, ou acrescentando ganho cheguemos a $C(j\omega_g)G(j\omega_g) = C(j\omega_c)G(j\omega_c) = -1$.

DEFINIÇÃO

A **MARGEM DE GANHO** expressa em [dB] corresponde a $MG = -|C(j\omega_f)G(j\omega_f)|$, sendo $\omega_f \in \mathbb{R}_+$ a frequência em que diagrama de Bode de fase de $C(j\omega)G(j\omega)$ cruza a fase de $(2\kappa - 1)180^\circ$.

DEFINIÇÃO

A **MARGEM DE FASE** expressa em [°] é $MF = (2\kappa - 1)180^\circ + \angle C(j\omega_g)G(j\omega_g)$, sendo $\omega_g \in \mathbb{R}_+$ a frequência em que diagrama de Bode de módulo de $C(j\omega)G(j\omega)$ cruza o valor de 0 [dB].

Ao especificarmos as margens do sistema estamos impondo não apenas que o sistema seja estável, mas o seja com alguma “margem de folga”. Não há dificuldades em observarmos que para FT de malha fechada de ordem 1 (polo simples) teremos

$$F(s) = \frac{p}{s+p} = \frac{p/s}{1+p/s} \implies C(s)G(s) = \frac{p}{s}$$

que imediatamente nos fornece $MF = 90^\circ$ e $MG = +\infty$.

Por outro lado, para uma FT de malha fechada de ordem 2 (dois polos) podemos escrever

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s)}{1 + \omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s)} \implies C(s)G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

em que verificamos que a fase cruzará o valor de 180° de forma assintótica quando $\omega \rightarrow \infty$. Portanto, uma vez que a FT de malha aberta possui dois polos reais, um na origem e outro no semi-plano complexo esquerdo, teremos o sistema estável com o valor de $|C(j\omega_g)G(j\omega_g)|_{dB} = -\infty$. Assim, $MG = +\infty$.

Para a margem de fase,

$$|C(j\omega_f)G(j\omega_f)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_f |\omega_f j + 2\xi\omega_n|} = 1 \implies \omega_f^2(\omega_f^2 + 4\xi^2\omega_n^2) = 1$$

cuja solução de interesse de $(\omega_f/\omega_n)^4 + 4\xi^2(\omega_f/\omega_n)^2 - 1 = 0$ corresponde a

$$\omega_f = \omega_n \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2)^2 + 1}}$$

Além disso, podemos reescrever

$$C(j\omega_f)G(j\omega_f) = \frac{\omega_n^2}{j\omega_f(j\omega_f + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n^2(\omega_f j - 2\xi\omega_n)}{\omega_f(\omega_f^2 + 4\xi^2\omega_n^2)}$$

que leva a fase de

$$\angle C(j\omega_f)G(j\omega_f) = 90 + \tan^{-1} \frac{\omega_f}{2\xi\omega_n} = 90 + 90 - \tan^{-1} \frac{2\xi\omega_n}{\omega_f}$$

Assim,

$$MF = 180 - 180 + \tan^{-1} \frac{2\xi\omega_n}{\omega_f} = \tan^{-1} \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2)^2 + 1}}}$$

que depende somente do fator de amortecimento ξ . A Figura 5 apresenta o gráfico da margem de fase em função de ξ . Para fins práticos, adotamos a aproximação $MF \approx 100\xi$, para $0 \leq \xi \leq 0,7$, em que MF é dado em $[\circ]$.

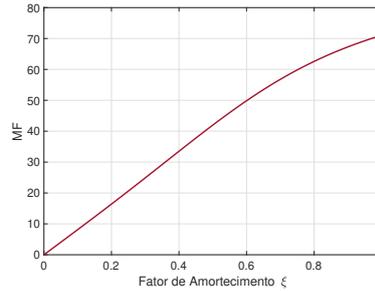


Figura 5: Gráfico de margem de fase em função de ξ para uma FT de malha fechada de ordem 2.

Por outro lado, podemos observar ainda que tanto a expressão para ω_f quanto para W , para FT de segunda ordem, dependem de ξ , sendo

$$W = \frac{\sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}}}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2)^2 + 1}}} \omega_f$$

A Figura 6 apresenta o gráfico de $W/\omega_f \times \xi$, em que podemos observar que na faixa de passagem pode ser aproximada por $W \approx 1,5\omega_f$ para $\xi \in (0, 1)$.

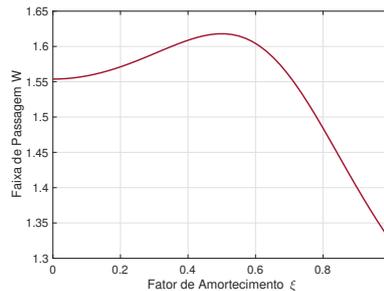


Figura 6: Gráfico de W/ω_f em função de ξ .

IV PROJETO UTILIZANDO O DIAGRAMA DE BODE

Uma grande utilidade do Diagrama de Bode é a possibilidade de realizar projetos de controle, de sistemas de malha fechada com equação característica do tipo $\Delta(s) = C(s)G(s) + 1 = 0$, através da ferramenta gráfica. Sendo especialmente indicada esta ferramenta para o projeto sempre que os requisitos de **largura de faixa**, **pico máximo em frequência**, **margem de fase** ou **margem de ganho** estiverem disponíveis, ou rapidamente puderem ser calculados.

Antes de iniciarmos o projeto utilizando o Diagrama de Bode, é importante entendermos o comportamento da adição de algumas estruturas de controladores, através do Diagrama de Bode.

IV.1. Estruturas de Controladores

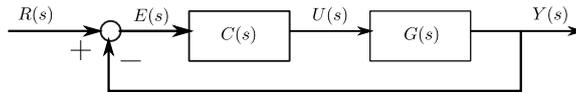


Figura 7: Malha de controle para projeto utilizando Diagrama de Bode.

Inicialmente, considere uma planta $G(s)$ que realimentada segundo a estrutura da Figura 7 fornece a função de transferência de malha fechada do tipo

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Assim como no Lugar Geométrico das Raízes, para entender o comportamento de malha fechada devemos analisar a equação característica $\Delta(s) = C(s)G(s) + 1$. Como vimos, desejamos analisar $C(s)G(s)$ e a partir das informações de margens de estabilidade inferir o comportamento da malha fechada. Sendo $C(s) = |C(s)|e^{j\angle C(s)}$ e $G(s) = |G(s)|e^{j\angle G(s)}$, podemos escrever que para $s = j\omega$, no diagrama de Bode,

$$|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} = |C(j\omega)|_{dB} + |G(j\omega)|_{dB} \quad (1)$$

$$\angle C(j\omega)G(j\omega) = \angle C(j\omega) + \angle G(j\omega) \quad (2)$$

Assim, para diferentes estruturas de controladores produzimos um efeito diferente no comportamento de módulo e fase de $C(s)G(s)$, facilmente visualizado no Diagrama de Bode.

- **Controlador Proporcional:** Neste caso, $C(s) = K$ e, portanto,

$$|C(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K, \quad \forall K \neq 0$$

$$\begin{cases} \angle C(j\omega) = 180^\circ & , K < 0 \\ \angle C(j\omega) = 0^\circ & , K \geq 0 \end{cases}$$

que leva ao diagrama de Bode apresentado na Figura ??.

- **Controlador de Avanço de Fase** Neste caso, vamos considerar o problema de compensação de fase em que a estrutura do controlador é da forma

$$C(s) = k \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1}$$

com $0 < \alpha < 1$ que, no plano complexo corresponde à composição apresentada na Figura 8 Seu Diagrama de Bode é apresentado na Figura 9. Como pode ser observado, este tipo de controlador é utilizado diretamente para aumentar a margem de fase do sistema, reduzindo o sobressinal da resposta temporal e frequência, como visto. O compensador de avanço de

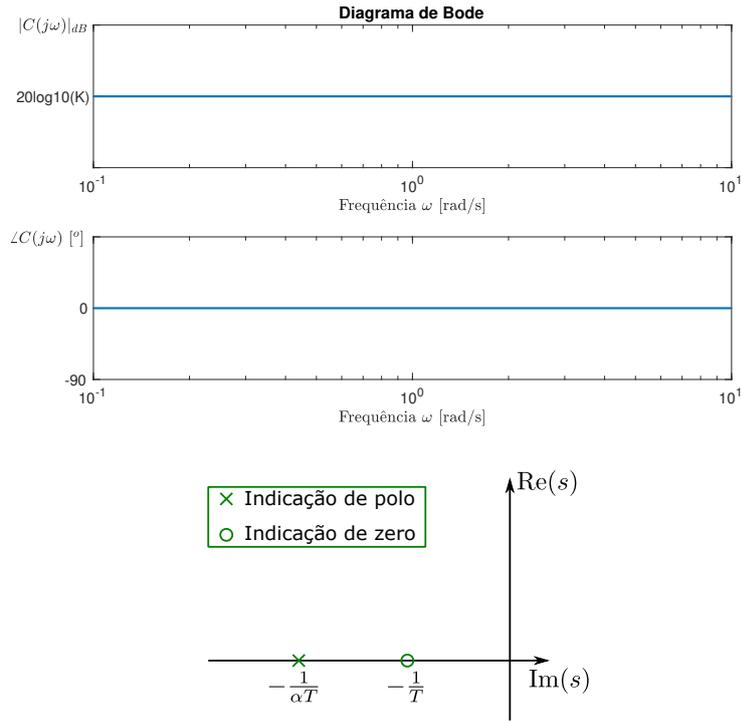


Figura 8: Diagrama de polos e zeros para um compensador de avanço de fase.

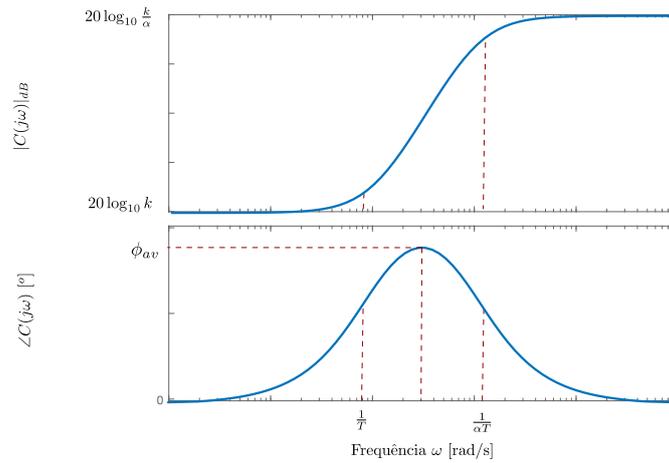


Figura 9: Diagrama de Bode para um compensador de avanço de fase (*phase lead*).

fase acrescentará ao sistema uma fase positiva na região em torno de ω_m , sendo este valor calculado como o máximo do diagrama de Bode de fase. Assim,

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{\alpha T}{1 + \alpha^2 \omega^2 T^2} = 0 \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

Consequentemente, para esta frequência teremos um ganho de fase de

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} T} T \right) - \tan^{-1} \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha} T} T \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

$$\text{sen}(\phi) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

O valor do ganho do compensador nesta frequência será

$$|G(j\omega_m)| = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}$$

- **Controlador de Atraso de Fase** Analogamente, aqui teremos

$$C(s) = k \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

porém com $\alpha > 1$ que no plano complexo corresponde à composição apresentada na Figura 10. Aqui, o Diagrama de Bode do controlador indica claramente a redução na fase promo-

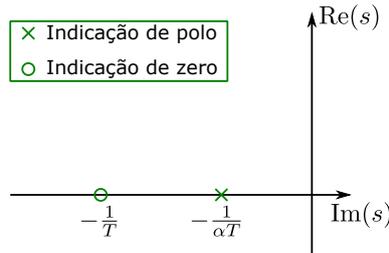


Figura 10: Diagrama de polos e zeros para um compensador do tipo atraso de fase.

vida quando este é colocado em cascata com a planta a ser controlada. O diagramas de Bode é apresentado na Figura 11. Claramente podemos perceber que o ganho para baixas

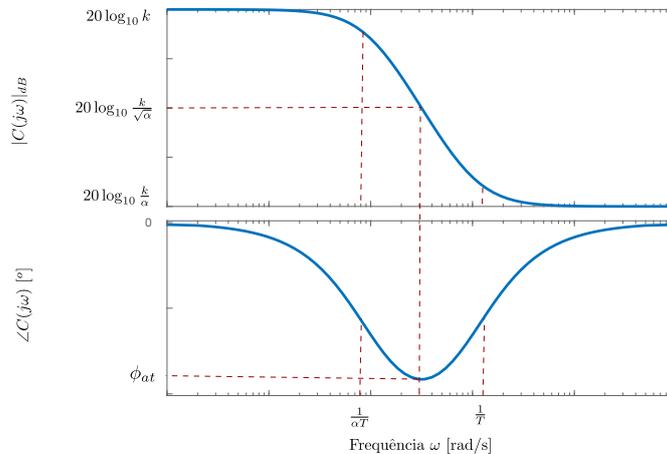


Figura 11: Diagrama de Bode para um compensador do tipo atraso de fase (*phase lag*).

frequências é alto e para altas frequências, baixo. deste modo, para altas frequências este compensador é utilizado para reduzir o ganho e melhorar a margem de fase do sistema. Por outro lado, em baixas frequências, este compensador reduz o erro estacionário. É importante observar, no entanto, que na faixa em que esta estrutura começa a reduzir em ganho, sua contribuição de fase é negativa, o que pode levar o sistema à instabilidade.

Dada a característica de análise do Diagrama de Bode apresentada em (1) e (2), estruturas mais complexas, dasdas as apresentadas acima, podem facilmente ser obtidas. Além disso, é importante lembrar que os controladores PID podem ser implementados segundo a estrutura de controladores de avanço e atraso de fase, dadas as particularidades de cada estrutura pretendida: PI, PD, PID.

REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.