

LEITURA COMPLEMENTAR – 10

Projeto Utilizando o Diagrama de Bode (PROJETO DE CONTROLADORES)

Profa. Gabriela W. Gabriel

31 de Outubro de 2023

I PRELIMINAR

No Material Complementar 09, foi introduzido o Diagrama de Bode dos controladores proporcional, de avanço e de atraso de fase. Para abarcar as 3 estruturas, vamos considerar um controlador do tipo

$$C(s) = K \frac{s+z}{s+p} \quad (1)$$

A estrutura de caminho direto, neste caso, está apresentado na Figura 1.

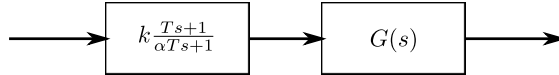


Figura 1: Configuração cascata entre o controlador $C(s)$ e a planta $G(s)$.

É evidente que, em (1), o controlador por avanço de fase terá $z < p$, o controlador por atraso de fase, $z > p$ e $z = p$, caracteriza um controlador proporcional, para fins de cálculos, sendo para qualquer caso $z > 0, p > 0, K > 0$. Vamos deixar o controlador proporcional um pouquinho de lado, uma vez que apenas o ganho será impactado (em todas as frequências) à planta, neste caso. Relembrando o Diagrama de Bode para os casos de avanço, Figura 2, e de atraso, Figura 3, o pico do gráfico de Fase do Diagrama se dará em

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right) \right] = \frac{1/z}{1 + (\omega/z)^2} - \frac{1/p}{1 + (\omega/p)^2} = \frac{z}{z^2 + \omega^2} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} = 0$$

que leva a $(zp - \omega^2)(p + z) = 0$ e, portanto, $\omega_{max} = \sqrt{zp}$ [rad/s]. Neste caso, o valor de pico ocorre em

$$\phi_{av} = \angle C(j\omega_{max}) = \tan^{-1} \frac{1 - z/p}{2\sqrt{z/p}} = \sin^{-1} \frac{1 - z/p}{1 + z/p} \quad (2)$$

Por outro lado, o ganho introduzido pelo controlador no gráfico de módulo do Diagrama de Bode, é dado por $20 \log_{10} Kz/p$ para baixas frequências no compensador por avanço ou atraso de fase, e para a frequência ω_{max} , tem-se $|C(j\omega_{max})| = K\sqrt{z/p}$

II PROJETO DE CONTROLADORES UTILIZANDO A RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

II.1. Controlador Proporcional

Ao adicionarmos um ganho K em cascata com uma planta $G(s)$ (em termos da resposta em frequência) ao introduzirmos um ganho $C(s) = K$ na malha direta do sistema. A Figura 4

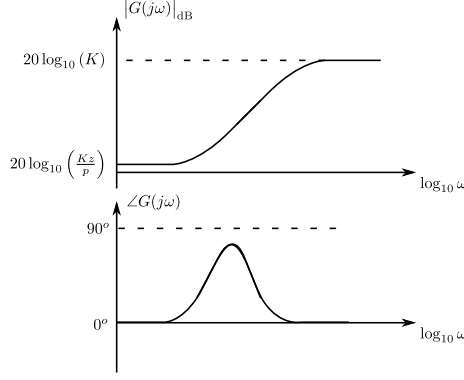


Figura 2: Diagrama de Bode para controladores do tipo avanço de fase $C(s)$ com $\alpha = \sqrt{z/p}$.

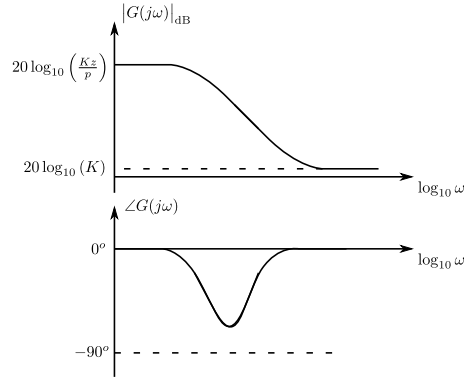


Figura 3: Diagrama de Bode para controladores do tipo atraso de fase $C(s)$ com $\alpha = \sqrt{z/p}$.

mostra o diagrama de bode de um sistema com $C(s)G(s) = K/(s^3 + 2s^2 + s)$ para diferentes valores de K . Observe que a introdução de um controlador proporcional desloca o gráfico de

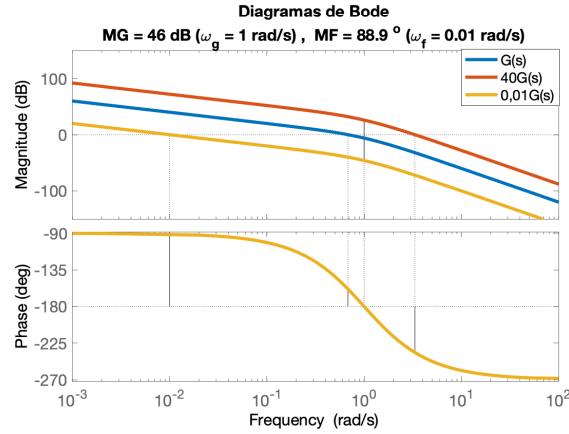


Figura 4: Diagrama de Bode para $KG(s)$.

módulo para baixo ou para cima, a depender do valor de $K > 0$, sem alterar o seu **formato**. Consequentemente, as frequências de cruzamento de ω_f mudam e as **margem de fase** também muda. Embora o diagrama de fase permaneça inalterado (e, portanto, ω_g também permaneça inalterado), a variação introduzida no diagrama de módulo implica em alterar também a **margem de ganho** do sistema.

Neste sentido, alguns projetos utilizando controladores proporcionais são imediatos, bastando verificar o ganho que se pretende no gráfico de módulo do Diagrama de Bode para:

- Diretamente alterar o valor da margem de ganho;

- Deslocar a curva de ganho para alterar o cruzamento com 0 [dB] e alterar, consequentemente, a margem de fase.

II.2. Compensadores por Avanço de Fase

Compensadores por avanço de fase aumentam a margem de fase do sistema através do ganho de fase decorrente de (2). Assim, vamos considerar um sistema $G(s)$ tal que chamaremos

$$|G(j\omega)| = A(\omega) \quad ; \quad \angle G(j\omega) = \phi(\omega)$$

Para a margem de fase, verificamos a frequência ω_f em que o gráfico de módulo do Diagrama cruza o valor de 0 [dB], ver Figura 5. Nesta frequência, calculamos $MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_f)$.

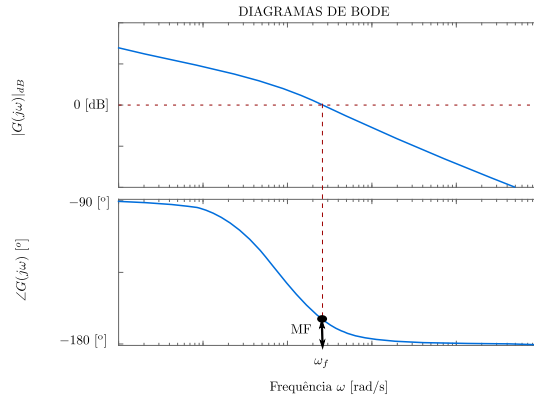


Figura 5: Diagrama de Bode para $G(s)$ genérica.

Ao adicionarmos a estrutura de um compensador por avanço de fase $C(s)$ em cascata com a planta $G(s)$, teremos uma **função de transferência de caminho direta** dada por $C(s)G(s)$. Neste caso, os gráficos do Diagramas de Bode da nova FT (função de transferência) $C(s)G(s)$ serão as somas dos gráficos do Diagrama de Bode individuais de $C(s)$ e de $G(s)$, como vimos nos Materiais Complementares 08 e 09. Ver Figura 6.

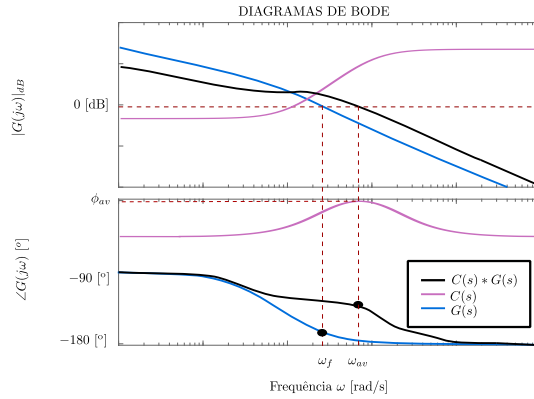


Figura 6: Diagrama de Bode para $G(s)$ e $C(s)$ de avanço de fase.

Observe que a inserção de um compensador de avanço de fase, desloca o ponto de cruzamento do diagrama de Bode de módulo com o nível de 0 [dB]. Portanto, a primeira providência é determinar o ganho que leva à margem de fase desejada. Neste caso, a margem de fase desejada (compensada) será dada por

$$MF_c = MF + \phi_{av}$$

onde ϕ_{av} corresponde à fase do compensador $C(s)$ e MF, a margem de fase de $G(s)$. Neste caso,

devemos considerar o ganho de fase ϕ_{av} na frequência desejada e estabelecida pelas condições de projeto. De fato, observe que devemos forçar que ω_{av} ocorra na frequência em que

$$|C(j\omega_{av})||G(j\omega_{av})| = 1 \implies |G(j\omega_{av})| = 1/|C(j\omega_{av})|$$

Além disso, é importante observar que, como dito anteriormente, as estruturas de compensadores de fase não introduzem um ganho constante ao longo de toda faixa de frequências, portanto, ao final do projeto, devemos verificar sempre se as condições iniciais foram de fato satisfeitas e ajustar o valor do ganho, caso necessário.

Um procedimento geral para projeto de compensador por avanço de fase do tipo (1), em castata com uma planta com FT $G(s)$, pode ser estabelecido através dos seguintes passos:

1. Determinar a constante K de acordo com requisito de regime estacionário;
2. Determinar a margem de fase MF de $C(s)G(s)$ sem compensação (através do Diagrama de Bode de $kG(j\omega)$);
3. Determinar o ganho de fase necessário $\phi_{av} = \text{MF}_{desejado} - \text{MF}$. Fazer ϕ_{av} 10° acima do necessário;
4. Determinar a razão z/p a partir de ϕ_{av} em (2);
5. Determinar $|C(j\omega_{av})| = Kz/p$, que independe do conhecimento de ω_{av} ;
6. Determinar ω_{av} através da relação de ganho $|C(j\omega_{av})||G(j\omega_{av})| = 1$;
7. Determinar os valores de p e z através da relação $\omega_{av} = \sqrt{z/p} = p\sqrt{z/p}$.
8. Verificar se o projeto atende os requisitos iniciais. Caso não atendam, refazer o projeto introduzindo compensação adicional em ϕ_{av} e alterando o valor de ω_{av} .

II.3. Compensadores por Atraso de Fase

O projeto de um compensador por atraso de fase é bastante similar ao projeto do compensador por avanço de fase. No entanto, **quase nunca este tipo de controlador é utilizado para reduzir a MF do sistema realimentado, uma vez que esta redução pode causar a instabilidade do sistema.**

Como dito anteriormente, este tipo de controlador pode ser utilizado para melhorar a fase de determinados tipos de sistema através da alteração do ganho em altas frequências, o que desloca o valor de ω_f . Observando a Figura 3, o compensador de atraso de fase, por ser um filtro passa-baixas, introduz uma atenuação relativa nas altas frequências, uma vez que $z/p > 1$. Esta atenuação faz com que a frequência de cruzamento ω_f se desloque para a esquerda, ω'_f , alterando a margem fase, ver Figura 7.

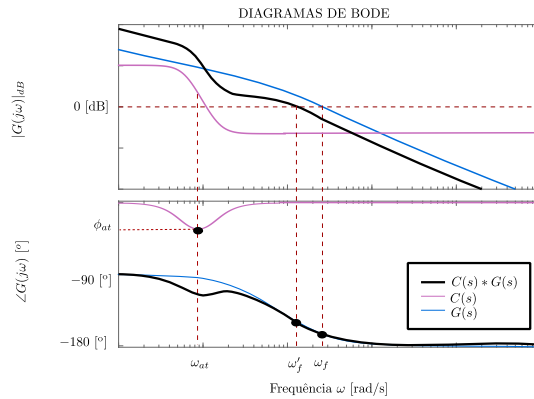


Figura 7: Diagramas de Bode para $G(s)$ e $C(s)$ de atraso de fase.

Alternativamente, este tipo de controlador pode ser utilizado para aumentar o ganho em baixas frequências e, conseqüentemente, diminuir o erro em regime do sistema. De fato, para

$$0 \in \mathcal{D}(sY(s)),$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - F(s)R(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right] R(s)$$

para um sistema com realimentação unitária e ganho de caminho direto conforme o da Figura 1. De uma forma geral, aumentando-se o valor de $C(s)G(s)$, em $s = 0$, reduzimos o erro em regime. Conforme dito, a **redução de fase não é o parâmetro a ser utilizado no projeto de compensação por atraso de fase**, mas sim a alteração do ganho promovida nas altas frequências. Para isso, devemos projetar a frequência ω_{at} do compensador bem abaixo de ω_f . Uma forma de conseguir isso é alocando o polo e zero do compensador com magnitude bem inferior ao menor polo dos sistema.

Um procedimento geral para o projeto de um compensador por atraso de fase do tipo (1), em castata com uma planta com FT $G(s)$, pode ser estabelecido através dos seguintes passos:

1. Determinar a constante K que satisfaça a especificação de erro em regime solicitada.
2. Analisando o Diagrama de Bode de $KG(j\omega_f)$, dado que K não altera o diagrama de fase, determinar em qual frequência ω_f , o diagrama de fase produz $MF + (5^\circ \text{ a } 12^\circ) - 180^\circ$.
3. A partir de ω_f , determinar no gráfico de módulo de $KG(j\omega_f)$, qual o ganho $|C(j\omega_f)|$ é necessário para que o gráfico de módulo de $KG(j\omega)$ cruze o valor de 0 [dB] na frequência determinada. (ver Figura 4);
4. Neste caso, a razão z/p será determinado de acordo com o ganho em alta frequência por $|C(j\omega_{at})| = 20 \log_{10} K \frac{p}{z}$.
5. O valor de z e p são determinados de forma a $z \ll \omega_f$ (tipicamente 10) e da relação z/p ;
6. Verificar se o projeto atende os requisitos iniciais. Caso não atendam, refazer o projeto alterando todos os parâmetros.

É notório observar, neste procedimento, que trazendo o zero de $C(s)$ para a esquerda, diminuímos a largura de banda do sistema realimentado, o que por um lado é positivo, porém aumentamos os seus tempos de resposta, o que não é desejável.

II.4. Compensadores por Avanço e Atraso de Fase

Além das estruturas de compensadores por avanço e por atraso de fase, ainda é possível mesclar ambas de forma a aproveitar os efeitos positivos das duas. De fato, podemos utilizar um compensador de atraso de fase em baixas frequências e, um compensador por avanço de fase para melhorar as margens de estabilidade, ver Figura 8.

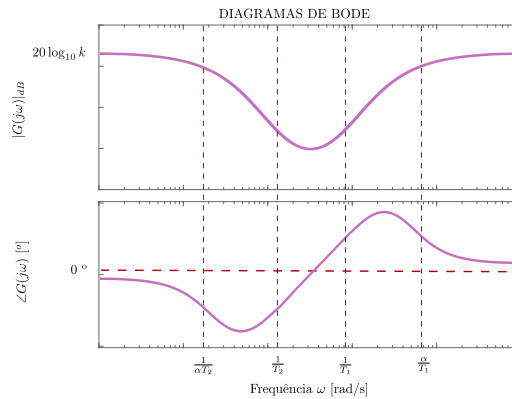


Figura 8: Diagramas de Bode para $G(s)$ e $C(s)$ de atraso de fase.

III EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Esboce os diagramas de Bode dos sistemas abaixo, compare com o obtido utilizando o Matlab[®] através do comando (`>> bode(·)`) e obtenha as margens de estabilidade verificando os valores corretos das frequências. Compare os valores utilizando o comando (`>> margin(·)`).

(a) $G(s) = \frac{10}{2s+1}$

(b) $G(s) = 100 \frac{s+10}{s^2+100s}$

(c) $G(s) = \frac{2,5}{s^3+3s^2+25s}$

2. Esboce o diagrama de Bode para o sistema

$$G(s) = \frac{100[(s/10) + 1]}{s[(s/1) - 1][(s/100) + 1]}$$

Verifique seu esboço utilizando a rotina (`>> bode(·)`) do Matlab[®].

3. Considere um sistema em malha aberta do tipo

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)^2}$$

Determine o valor de K que torna o sistema **marginalmente estável** (no limite de sua estabilidade). Para quais valores de K temos $MF = 30^\circ$? (Utilize o Matlab[®])

4. Considere o mesmo sistema de malha aberta do item anterior. Determine o valor de K que fornece $MF \geq 30^\circ$ e a maior largura de banda possível. Use o Matlab[®] para determinar a largura de banda.
5. Seja um sistema compensado com realimentação unitária negativa, para

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s/5+1)}$$

- (a) Esboce os diagramas de Bode.
 - (b) Projete um compensador de avanço $C(s)$, sendo seu ganho DC unitário e margem de fase $MF \geq 40^\circ$. Refine seu projeto utilizando o Matlab[®]. Qual a largura de banda aproximada do sistema?
6. Um sistema de pêndulo invertido apresenta TF similar a

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

Esboce seus diagramas de Bode para projetar um compensador por avanço de fase que fornece margem de fase $MF \geq 30^\circ$. Verifique e refine seu projeto utilizando o Matlab[®].

7. Considere um sistema realimentado (realimentação negativa unitária) tal que

$$G(s) = \frac{1}{s(s/20+1)(s^2/100^2+0,5s/100+1)}$$

- (a) Um compensador de avanço é introduzido com $\alpha = 1/5$ e um zero em $1/T = 20$. Em quanto o ganho deve ser alterado para obter uma frequência de cruzamento de $\omega_f = 31,6$ [rad/s] e qual o valor resultante de K_v ?
- (b) Com o compensador de avanço instalado, qual o valor de K necessário para um compensador de atraso reajustar o valor de K_v para 100?
- (c) Escolha o valor do polo do compensador de atraso em $\omega = 3,16$ [rad/s] e a posição do zero que mantém o valor da frequência de cruzamento em $\omega_f = 31,6$ [rad/s].
- (d) Trace o esboço dos sistemas não compensado e compensado.

- (e) Determine o valor da margem de fase (MF) do projeto compensado.

REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.