

LEITURA COMPLEMENTAR – 12

O Critério de Nyquist e o Princípio da Variação do Argumento

Profa. Gabriela W. Gabriel

8 de Novembro de 2023

I O CRITÉRIO DE NYQUIST

Neste material, vamos estudar outro critério muito importante na teoria de controle clássico: o critério de estabilidade de Nyquist. Novamente, queremos avaliar onde estão localizados os polos de $F(s)$, que corresponde a FT (função de transferência) de malha fechada do tipo

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (1)$$

em que $G(s)$ é a FT da planta e $C(s)$, a FT do controlador, quando considerada uma malha de controle com realimentação unitária negativa conforme apresentado na Figura 1. Para este sistema, a equação característica é do tipo

$$\Delta(s) = 1 + K\bar{G}(s) = 0 \quad (2)$$

sendo $\bar{G}(s) = C(s)G(s)/K$, para $K \neq 0$.

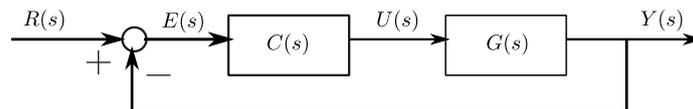


Figura 1: Malha de controle padrão

Vale lembrar que não temos conhecimento dos polos de malha fechada, mas somente dos polos de $\bar{G}(s)$. Por isso, o engenheiro Harry Nyquist, em 1932, publicou um artigo através do *Nokia Bell Labs (Regeneration theory)* que permitia analisar a estabilidade de sistemas amplificadores em cascata. A dificuldade era determinar a quantidade de amplificadores que poderiam ser colocados em cascata para um sistema de comunicação à distância considerando a estabilidade e, principalmente, atenuação do sinal. Para isso, ele desenvolveu um método gráfico que lhe permitia realizar esta análise em poucos minutos. Este método até hoje é utilizado, uma vez que permite considerar sistemas com singularidades (polos) no semi-plano fechado direito complexo! Hoje esta técnica é importante na análise de sistemas aeronáuticos.

Segundo este critério, seja $\bar{G}(s) = N(s)/D(s)$, então a equação característica $D(s) + KN(s) = 0$, para $K \neq 0$, (se definirmos uma curva fechada no plano complexo que não contenha SOBRE ela qualquer polo de $\bar{G}(s)$ (Figura 2)) será tal que

$$N_z - N_p = N_{voltas} \quad (3)$$

onde N_z é o número de zeros de $1 + K\bar{G}(s)$ localizados dentro da curva \mathcal{C} ; N_p é o número de polos de $1 + K\bar{G}(s)$, que corresponde ao número de polos de $\bar{G}(s)$, localizados dentro da curva \mathcal{C} ; e, N_{voltas} é o número de voltas que o mapeamento da curva fechada \mathcal{C} através de $\bar{G}(s)$ dá em torno do ponto $-1/K$, ou seja, é o valor de $\bar{G}(s)$ quando s percorre os pontos sobre a curva \mathcal{C} . Neste

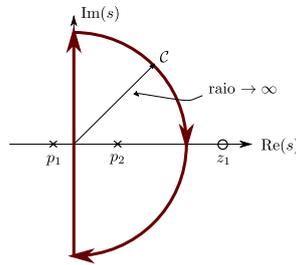


Figura 2: Curva \mathcal{C} que corresponde ao semi-plano fechado direito do plano complexo.

ponto, é importante frisar que N_z diz respeito aos polos de malha fechada e N_p os polos de malha aberta. Em outras palavras, segundo a igualdade (3) é possível determinarmos o número de raízes da equação $1 + K\bar{G}(s) = 0$ (polos de $F(s)$), que estão localizados no semi-plano direito fechado do plano complexo, a partir do conhecimento do número de polos da função $\bar{G}(s)$ e do mapeamento da curva \mathcal{C} em $\bar{G}(s)$.

Dadas estas observações, Nyquist escreveu o seguinte teorema conhecido como **critério de estabilidade de Nyquist**.

Teorema 1 *Todas as raízes da equação algébrica $1 + K\bar{G}(s) = 0$ estão localizadas no semiplano esquerdo complexo definido por $\text{Re}(s) < 0$ SE, E SOMENTE SE o mapeamento da curva fechada \mathcal{C} da Figura 2 for tal que $N_{voltas} + N_p = 0$.*

Proof: A prova deste teorema é imediata dada a discussão anterior e utilizando o princípio da variação do argumento (Seção II). \square

Dois observações são importantes a respeito deste teorema:

Observação 1 *A curva \mathcal{C} pode mapear qualquer dos dois semiplanos complexos: o **semiplano direito fechado** ou o **semiplano esquerdo aberto**. No entanto, adaptações na igualdade (3) são necessárias.*

Observação 2 *O sentido de integração ao longo da curva \mathcal{C} pode ser qualquer, desde que a curva \mathcal{C} seja fechada e a análise do número de voltas concorde com o sentido adotado para definir a curva \mathcal{C} .*

Você seria capaz de definir como seriam estas mudanças para uma curva \mathcal{C} que mapeie o semiplano esquerdo aberto do plano complexo, sendo \mathcal{C} definida no sentido anti-horário?

\square EXERCÍCIOS RESOLVIDO \square

Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

Deseja-se saber quantos polos do sistema em malha fechada com realimentação dada pela Figura 3 encontram-se no semiplano complexo direito fechado.

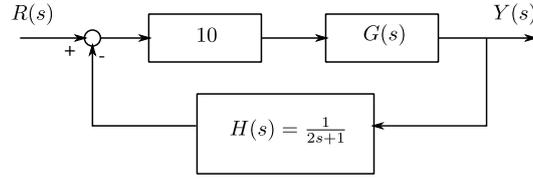


Figura 3: Diagrama de blocos de malha fechada com realimentação não unitária.

Para este sistema temos que sua função de transferência de malha aberta é tal que

$$F(s) = \frac{10 \frac{1}{(s+1)}}{1 + 10 \frac{1}{(s+1)(2s+1)}}$$

Portanto a equação característica que desejamos estudar é

$$1 + 10 \frac{1}{(s+1)(2s+1)} = 0$$

ou seja, neste caso, em relação ao critério de Nyquist, devemos analisar

$$\frac{1}{(s+1)(2s+1)} = -\frac{1}{10}$$

Para esta FT de malha aberta, $1/[(s+1)(2s+1)]$, sabemos que seus polos estão localizados todos no semiplano esquerdo complexo, o que faz com que $N_p = 0$. Para determinarmos quantos polos de $F(s)$ estão no semiplano complexo direito, devemos aplicar o critério de estabilidade de Nyquist em torno do ponto $-1/10$. Se utilizarmos o Matlab para plotar o Nyquist desta função de malha aberta (utilizando o comando `nyquist(G)`), encontraremos o gráfico apresentado na Figura 4, em que por padrão, o Matlab considera a curva C envolvendo o semiplano direito fechado (excluídos os polos sobre a curva C) orientado no sentido horário.

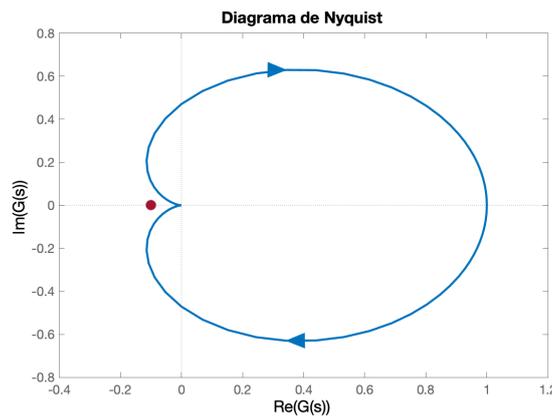


Figura 4: Mapeamento da curva C (Figura 2) através de $1/[(s+1)(2s+1)]$.

Podemos observar que o ponto $-1/10$ (ponto vermelho na Figura 4) está fora do mapeamento de C e portanto o número de voltas em torno de $-1/10$ é $N_{voltas} = 0$. Assim, utilizando a igualdade (3), concluímos que há

$$N_z = N_p + N_{voltas} = 0$$

polos de $F(s)$ no semiplano direito fechado complexo. De fato, os polos de $F(s)$ são $-0,75 \pm 2,22j$.

□ □ □

Exercícios Propostos

- Determine quantos polos de $F(s)$ encontram-se no semiplano complexo esquerdo aberto, dado que $F(s)$ corresponde a FT de malha fechada para uma malha de controle do tipo 1, sendo $C(s) = 1$ e a FT de malha aberta dada por

$$a) G(s) = \frac{4}{(5s+2)(s+1)} \qquad b) G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-3)}$$

Utilize o Matlab para obter o diagrama de Nyquist. Você pode conferir o seu resultado utilizando a função `»pole(F)`, onde F é a função de transferência de malha fechada.

II PRINCÍPIO DA VARIAÇÃO DO ARGUMENTO

Como dito anteriormente, o critério de estabilidade de Nyquist baseia-se em dois pilares: o conhecimento das funções de transferência de malha aberta e malha fechada, e no princípio da variação do argumento, o qual será apresentado aqui. O princípio da variação do argumento é baseado na **análise matemática de integrais complexas**. Basicamente, seja a equação que desejamos estudar dada por (3) (equação característica). Sabemos, que esta função é racional, e portanto, possui pontos de singularidade no plano complexo. Ou seja, pontos em que a derivada de $\bar{G}(s)$ em relação a s não existe. Do teorema integral de Cauchy, se uma função $\bar{G}(s) = N(s)/D(s)$ FOR ANALÍTICA em todos os pontos internos a uma dada curva \mathcal{C} , ou seja, não possuir polos localizados dentro de \mathcal{C} (Figura 5), então, neste caso, a igualdade

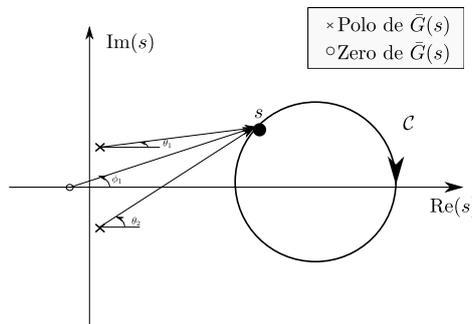


Figura 5: TF $G(s)$ analítica no interior de \mathcal{C} .

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{G}(s) ds = 0 \tag{4}$$

se verifica. De fato, se $\bar{G}(s) = A(s)e^{j\alpha}$, $N(s) = A_N(s)e^{j\sum_{i=1}^m \phi_i}$ e $D(s) = A_D(s)e^{j\sum_{i=1}^n \theta_i}$, então a variação do argumento de $G(s)$ será

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i$$

Assim, se uma integração em \mathcal{C} fechada for realizada, o que implica em iniciarmos a integração em um ponto de \mathcal{C} e retornarmos para este mesmo ponto, teremos uma variação líquida nula de α .

Porém, se houver um polo de $\bar{G}(s)$ localizados no interior de \mathcal{C} (Figura 6), então teremos uma variação líquida de α de -360° . Como a variação angular líquida não é nula, a igualdade (4) não se aplica. Neste caso, o teorema dos resíduos de Cauchy estabelece que

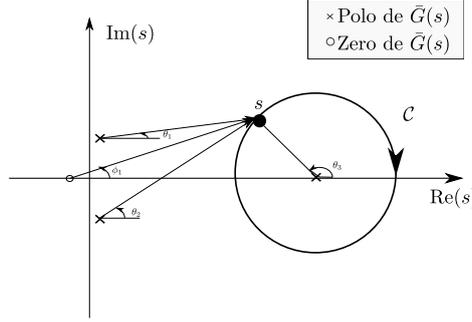


Figura 6: Curva C contendo pontos de singularidade de $\bar{G}(s)$ em seu interior.

$$\oint_C G(s)ds = 2\pi j \sum_{i=1}^r R(G, p_i)$$

sendo p_i , para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, os pontos de singularidade (finitos) de $G(s)$ no interior de C . $R(G, p_i)$ corresponde ao resíduo de $G(s)$ em relação ao ponto de singularidade p_i , lembrando que calculamos o resíduo de $G(s)$ em relação a p_i como o coeficiente do termo $1/(s - p_i)$ na expansão em frações parciais.

Agora, ao invés de analisarmos $G(s)$, vamos analisar $B(s) = G'(s)/G(s)$. Observe que esta função $B(s)$, por construção, possui $n + m$ polos, uma vez que os n polos de $G(s)$ são polos de $B(s)$ e os m zeros de $G(s)$ também são polos de $B(s)$. Vamos calcular os resíduos dos polos de $B(s)$. Em relação aos pontos p_i , podemos escrever

$$G(s) = \frac{a_i(s)}{(s - p_i)^{m_i}} \implies G'(s) = \frac{-m_i}{(s - p_i)^{m_i+1}} + \frac{a_i'(s)}{(s - p_i)^{m_i}}$$

onde a função $a_i(s)$ é analítica em p_i . Assim,

$$B(s) = \frac{a_i(s)'}{a_i(s)} - \frac{m_i}{s - p_i}$$

sendo $q_i(p_i) \neq 0$, então, $R(B, p_i) = -m_i$. Por outro lado, em relação aos zeros z_i , escrevemos

$$G(s) = b_i(s)(s - z_i)^{n_i} \implies G'(s) = n_i b_i(s - z_i)^{n_i-1} + b_i'(s)(s - z_i)^{n_i}$$

para $b_i(s)$ analítica em z_i . Neste caso,

$$B(s) = \frac{b_i(s)'}{b_i(s)} + \frac{n_i}{s - z_i}$$

sendo $b_i(z_i) \neq 0$, então, $R(B, z_i) = n_i$. Aplicando o teorema dos resíduos de Cauchy a $B(s)$, se assumirmos que há $k \leq n$ polos no interior de C e $\ell \leq m$ zeros no interior de C , teremos

$$\begin{aligned} \oint_C B(s)ds &= 2\pi j \left[\sum_{i=1}^k R(B, p_i) + \sum_{i=1}^{\ell} R(B, z_i) \right] = 2\pi j \left[\sum_{i=1}^{\ell} R(G, z_i) + \sum_{i=1}^k R(G, p_i) \right] \\ &= 2\pi j \left[\sum_{i=1}^{\ell} n_i - \sum_{i=1}^k m_i \right] = 2\pi j [N_z - N_p] \end{aligned}$$

sendo N_z o número de zeros de $G(s)$ no interior de C e N_p o número de polos de $G(s)$ no interior de C .

Por outro lado, podemos calcular a integral

$$\oint_C B(s) ds = \oint_C \frac{G(s)'}{G(s)} ds = \oint_C d \ln(G(s)) = \oint_C d \ln(A(s)e^{j\alpha}) = j \Delta \arg(G(s))$$

em que o resultado desta última igualdade será sempre múltiplo de 2π , dada a análise da Figura 6, em torno do ponto $s = 0$, dado que analisamos $G(s) \neq 0$. Daí decorre o princípio do argumento de Cauchy.

Princípio 1 O mapeamento de uma curva C através de uma função complexa $G(s)$ irá envolver a origem do plano complexo $N_z - N_p$ vezes.

É importante observar, a respeito do princípio do argumento que:

Observação 3 Há sinal no número de voltas, o qual é dado por $N_z - N_p$.

Observação 4 Se desejamos avaliar a função $G(s) = -1/\kappa$, devemos avaliar o número de voltas que o mapeamento dará em torno do ponto real $s = -1/\kappa$ e não mais em torno da origem $s = 0$.

□ EXERCÍCIO RESOLVIDO □

Vamos aplicar o critério de estabilidade de Nyquist no projeto de um controlador proporcional aplicado a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

Deseja-se saber para quais valores de κ o sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa é estável.

Do critério de estabilidade de Nyquist, vamos analisar então a equação característica do tipo

$$G(s) = -\frac{1}{\kappa}$$

Se plotarmos, utilizando o Matlab, o diagrama de Nyquist de $G(s)$, obteremos o gráfico apresentado na Figura 7.

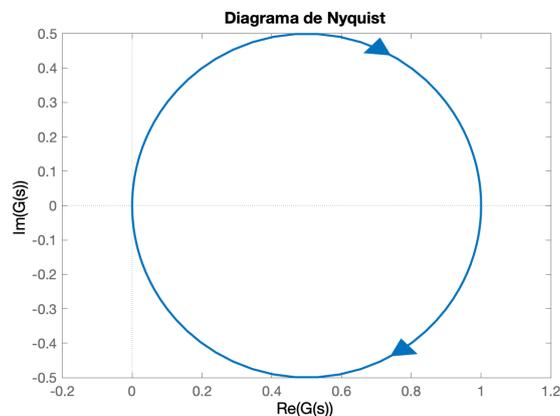


Figura 7: Mapeamento do semiplano direito complexo (SPD) através de $G(s)$.

Como o número de polos de $G(s)$ no semiplano direito (SPD) é nulo, então para que o sistema seja estável deveremos ter zero voltas do mapeamento do SPD através de $G(s)$ em torno do ponto $-1/\kappa$. Logo, o sistema será estável para

$$\begin{aligned} -\infty < -1/\kappa < 0 &\implies \kappa > 0 \\ 1 < -1/\kappa < \infty &\implies -1 < \kappa < 0 \end{aligned}$$

Logo, o sistema será estável para todo $\kappa > -1$.

□ □ □

Exercícios Propostos

- Determine os valores de κ para os quais o sistema em malha fechada, considerando realimentação negativa unitária, é estável.

$$a) G(s) = \frac{\kappa}{(s+2)(s-1)} \qquad b) G(s) = \frac{\kappa(s+2)}{(s+1)}$$

Utilize o Matlab para obter o diagrama de Nyquist correto. Você pode conferir o seu resultado fazendo a tabela de Routh para cada um dos casos.

III MAPEAMENTO DA CURVA \mathcal{C} NO PLANO $G(s)$

Um dos principais pontos relativos à aplicação do critério de Nyquist é conseguirmos mapear corretamente a curva \mathcal{C} , definida no plano polar s , no plano complexo de $G(s)$. Como vimos acima, o critério de Nyquist estabelece que para a curva \mathcal{C} definida na Figura 8, temos que, para um FT (função de transferência) do tipo

$$F(s) = \frac{K\tilde{G}(s)}{1 + K\tilde{G}(s)}$$

determinamos

- N_p , o número de polos de $G(s)$ no interior de \mathcal{C}
- N_{voltas} , o número de voltas que o mapeamento de \mathcal{C} no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$ faz em torno de $-1/\kappa$
- N_z , o número de raízes de $1 + \kappa G(s) = 0$ no interior de \mathcal{C}

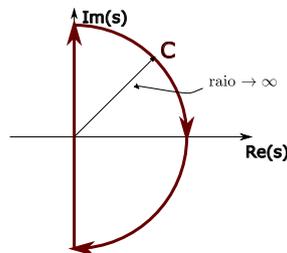


Figura 8: Curva \mathcal{C} que corresponde ao SPD (incluindo o Eixo Imaginário) do plano complexo.

Do princípio da variação do argumento, temos a relação

$$N_z = N_p + N_{voltas}$$

Assim, se fizermos a nossa curva \mathcal{C} corresponder a todo semiplano direito, incluindo o eixo imaginário $\text{Im}(s)$, o critério de Nyquist definirá a quantidade de raízes no SPD (incluindo o eixo imaginário) e, portanto, definirá se o sistema em **malha fechada** é estável ou não.

Observe que o critério de estabilidade de Nyquist permite-nos definir se o sistema em **MALHA FECHADA** (com equação característica $1 + \kappa G(s) = 0$) é estável, a partir do conhecimento da **TF DE MALHA ABERTA** (neste caso, somente $\kappa G(s)$). Novamente, se a TF de malha fechada tiver uma estrutura diferente daquela que conhecemos para realimentação unitária negativa, ou seja, da forma

$$F(s) = \frac{\kappa G(s)}{1 + \kappa G(s)}$$

então, sempre poderemos transformar a TF de malha fechada que temos em mãos ($F(s)$ mais complicada) em uma estrutura parecida com a apresentada acima.

Só conseguiremos aplicar o critério de Nyquist SE TODOS OS parâmetro variáveis estivem na posição de κ , fora de $G(s)$.

Dito isso, a curva \mathcal{C} pode ser definida com um formato qualquer. A diferença é que certas escolhas de \mathcal{C} favorecerão a nossa análise, como é o caso da curva que delimita todo o SPD (fechado no eixo imaginário). Por isso, vamos assumir, deste ponto em diante, que a nossa curva \mathcal{C} corresponde àquela apresentada na Figura 9, que delimita todo o SPD.

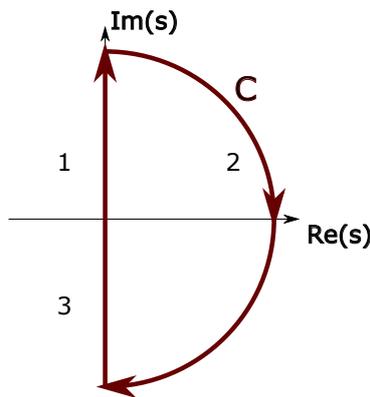


Figura 9: Segmentação da curva \mathcal{C} que mapeia o SPD.

Nesta figura, a curva fechada \mathcal{C} foi segmentada em 3 partes. Para todas elas ($i = 1, 2, 3$), vamos escrever o ponto genérico s_i do plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$ que satisfaz suas propriedades e mapear como se comporta $G(s_i)$

- **Mapeamento de 1.** Este segmento de reta, corresponde aos pontos em que $s_1 = j\omega$, com $\omega : 0 \rightarrow +\infty$. Portanto, o mapeamento de 1 através de $G(s)$ definirá a resposta em frequência de $G(s)$ desenhada no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$.

Exemplo 1: Para

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

teremos que, de acordo com os diagramas de Bode de $G(s)$ (utilize o Matlab para visualizar,

caso necessário), para $\omega \rightarrow 0$, o módulo $|G(j\omega)| = 1$ e a fase $\angle G(j\omega) = 0^\circ$. Portanto, este segmento do mapeamento partirá do ponto $s = 1$ no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$, ver Figura 10(a).

Por outro lado, para $\omega \rightarrow \infty$, teremos o módulo $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e a fase $\angle G(j\omega) = -90^\circ$. Portanto, o mapeamento deste segmento de C , sai de $s = 1$ no eixo real e tende para $s = 0$ assumindo ângulos menores que 0° até atingir -90° de forma assintótica. Como pode ser observado na Figura 10(b). Deve-se notar que o ângulo de entrada em $s = 0$ corresponde a -90° .

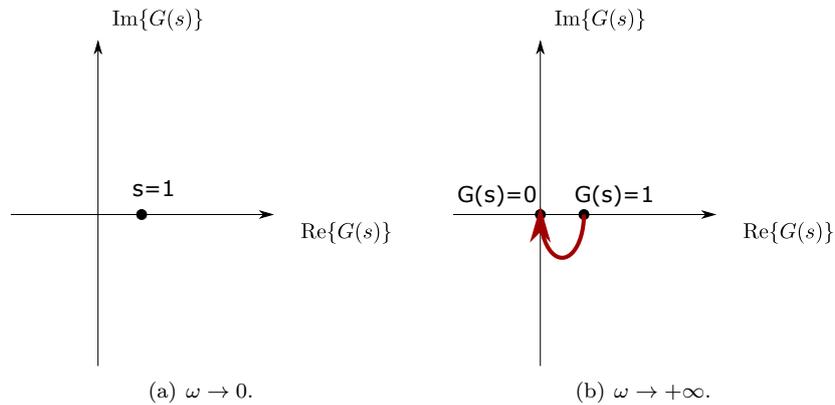


Figura 10: Mapeamento do Segmento 1 de C .

- **Mapeamento de 2.** Este segmento de reta, corresponde aos pontos que $s_2 = \epsilon e^{j\theta}$, com $\epsilon \rightarrow +\infty$ e $\theta : +90^\circ \rightarrow -90^\circ$. Portanto, substituindo-os em $G(s)$, teremos

$$G(s_2) = \frac{1}{\epsilon e^{j\theta} + 1} \approx \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}} = 0$$

uma vez que $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, todo o arco de circunferência representado por 2, será mapeado em um único ponto do plano $G(s)$.

- **Mapeamento de 3.** Por se tratar de TF real, o mapeamento de C , sendo 1 simétrico de 3 em relação ao eixo real, então, seu mapeamento (de 3), no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$, será o simétrico de 1 em relação ao eixo real ($\text{Re}\{G(s)\}$).

Exemplo 1-cont.: Neste caso, o mapeamento completo de C através de $G(s)$ é dado pela curva apresentada na Figura 11.

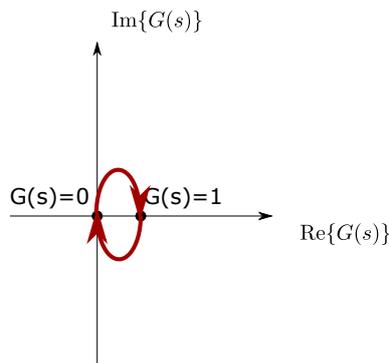


Figura 11: Nyquist referente ao Exemplo 1.

Em relação ao mapeamento da curva \mathcal{C} , algumas observações são importantes:

- Como \mathcal{C} é uma curva fechada, conseqüentemente seu mapeamento no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$ também será. Por isso, deve-se colocar especial atenção nos sentidos de cada segmento de forma que concordem gerando um mapeamento com orientação também consistente.
- Um caso que deve ser considerado com bastante atenção é aquele em que $G(s)$ possui um de seus polos sobre o eixo imaginário. Neste caso, podemos incluir ou não estes polos no interior da curva \mathcal{C} . Ver Figura 12. Vamos considerar o caso de \mathcal{C} não incluir os polos $p_{1,2} = \pm j\omega$ (caso da Figura 12(b)). Neste caso a segmentação da curva \mathcal{C} passará a ser a apresentada como na Figura 8.

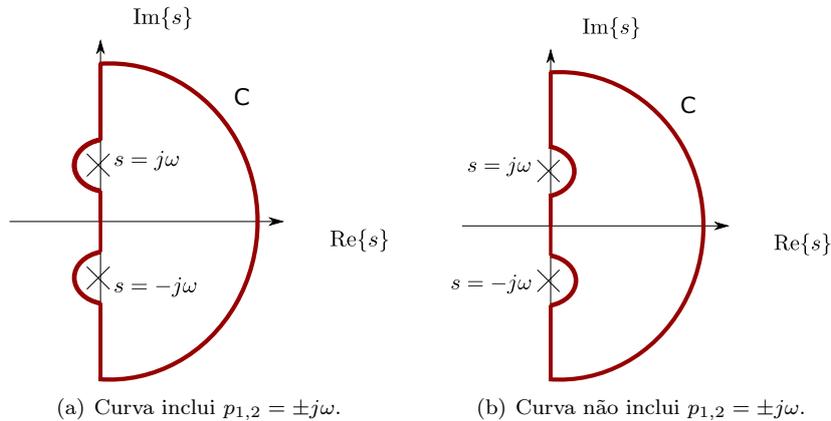


Figura 12: Caso em que há polos de $G(s)$ sobre a curva \mathcal{C} .

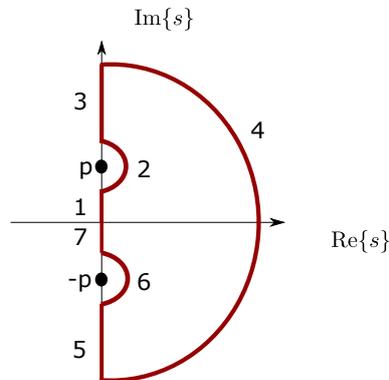


Figura 13: Segmentação da curva \mathcal{C} para o caso em que há polos sobre o eixo $\text{Im}(s)$.

Seja a curva \mathcal{C} hipotética da Figura 13. Neste caso, teremos o mapeamento descrito a seguir.

- **Mapeamento de 1:** $s_1 = j\omega$, com $\omega : 0 \rightarrow p$.

Exemplo 2: Para a TF

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

o segmento 1, neste caso, é inexistente e passamos diretamente para o segmento 2.

- **Mapeamento de 2:** Aqui, devemos utilizar o lugar geométrico dos pontos $s = p + \epsilon e^{j\theta}$, onde $\epsilon \rightarrow 0$ e $\theta : -90^\circ \rightarrow +90^\circ$ e observamos como estes valores modificam o módulo e a fase de $G(s)$.

Exemplo 2 – cont.: Aqui, teremos $s_2 = \epsilon e^{j\theta}$ e faremos $\epsilon \rightarrow 0$ e $\theta : 0^\circ \rightarrow +90^\circ$ (devido a simetria de C e de $G(s)$ em relação ao eixo real). Substituindo na TF de $G(s)$,

$$G(s_2) = \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}(\epsilon e^{j\theta} + 1)} \approx \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}(1)} = \frac{1}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

Portanto, teremos $|G(s_2)| = \infty$ e $\angle G(s_2) : 0^\circ \rightarrow -90^\circ$. Variação indicada na Figura 14(a).

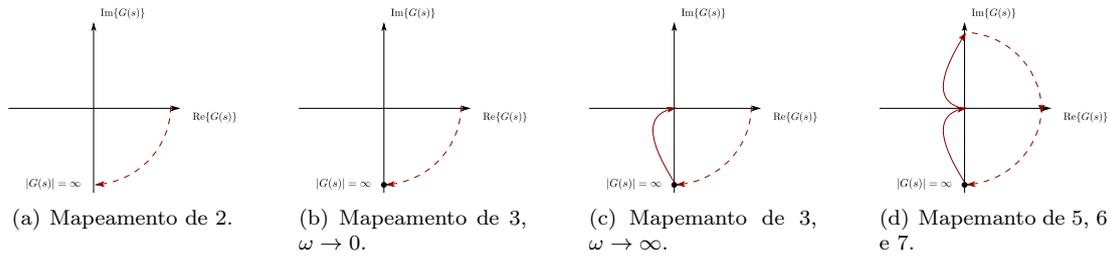


Figura 14: Mapeamento para o caso em que há polos sobre o eixo $\text{Im}(s)$.

- **Mapeamento de 3:** Este mapeamento $s_3 = j\omega$ ocorre de acordo com os diagramas de Bode de $G(s)$ (utilize o Matlab para visualizar, caso ainda não visualize com facilidade).

Exemplo 2 – cont.: Aqui, para $\omega \rightarrow 0$, o módulo $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$ e a fase $\angle G(j\omega) = -90^\circ$. Portanto, este segmento do mapeamento partirá do ponto $G(s) = -j\infty$ sobre o eixo $\text{Im}\{G(s)\}$, ver Figura 14(b). Quando $\omega \rightarrow \infty$, $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e $\angle G(j\omega) = -180^\circ$, devido ao segundo polo. Por isso, o ângulo de entrada em zero será de -180° . Ver Figura 14(c)

- **Mapeamento de 4:** Aqui, teremos $s_2 = \epsilon e^{j\theta}$ e faremos $\epsilon \rightarrow \infty$. Independentemente do número de voltas que o mapeamento dê em torno de 0, este segmento, em geral, estará concentrado no ponto $G(s) = 0$

Exemplo 2 – cont.: Aqui, o mapeamento de 4 será realizado em $G(s) = 0$

- **Mapeamento de 5, 6 e 7:** Estes ramos são o simétrico de 1, 2 e 3 em relação ao eixo real, tornando o mapeamento completo. Uma observação importante é que a curva deve ser fechada e com **orientação concordante**.

Exemplo 2 – cont.: Aqui, o restante do gráfico será o simétrico daquele apresentado na Figura 14(c). A orientação concorda com a que realizamos até aqui. O resultado é apresentado na Figura 14(d).

- O ponto de cruzamento do mapeamento da curva C com o eixo $\text{Re}\{G(s)\}$ pode ser determinado através de cálculos algébricos ou através da Tabela de Routh.

Especialmente importante são os pontos em que o mapeamento de \mathcal{C} , através de $G(s)$, cruzam o eixo $\text{Re}\{G(s)\}$. Porque?

IV EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Realize um esboço do mapeamento da curva \mathcal{C} que delimita o SPD, incluindo o eixo imaginário porém excluindo os polos que eventualmente estejam sobre ele, no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$. Na sequência, confira o resultado com o Matlab (função `>> nyquist(G)`).

$$a) G(s) = \frac{s+2}{s+10}$$

$$f) G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+9)}$$

$$b) G(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$g) G(s) = \frac{1+10s}{(1+20s)^2(1+5s)(1+s)}$$

$$c) G(s) = \frac{(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+2)^3}$$

$$h) G(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)}$$

$$d) G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)}$$

$$i) G(s) = \frac{s}{(s+2)(s+10)}$$

$$e) G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

$$j) G(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+10)}$$

V MARGENS DE ESTABILIDADE

Para a função de transferência de malha fechada

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

com função de transferência de malha aberta $G(s)$, temos a equação característica

$$1 + G(s) = 0 \implies G(s) = -1$$

ou seja, quando existir um ω , tal que $s = j\omega$ torne $G(s) = -1$, um (ou um par) de polos de $F(s)$ localiza-se sobre o eixo imaginário! Portanto, para a $F(s)$ assim definida, quando aplicarmos uma entrada degrau na função de transferência de malha fechada $F(s)$, seu comportamento em regime permanente será oscilatório! Este sistema, assim projetado, encontra-se na chamada “**estabilidade neutra**”, [2].

O que significa este ponto de estabilidade neutra?

Da explicação anterior, se o sistema em malha fechada for projetado para estar na estabilidade neutra então um de seus polos (ou par de polos complexo conjugados) estará(m) sobre o eixo imaginário! Este(s) polo(s) define o ponto crítico do sistema em malha fechada.

Por outro lado, se refizermos o projeto tomando este(s) polo(s) fora do eixo imaginário em um ponto à direita de $\text{Im}(s)$ o sistema em malha fechada ($F(s)$) será instável, pois adentrará o semiplano direito (SPD) do plano complexo. Por outro lado, se refizermos o mesmo projeto alocando este(s) polo(s) de $F(s)$ para estar(em) à esquerda de $\text{Im}(s)$, o sistema $F(s)$ será estável! Daí a importância desta análise de $G(j\omega) = -1$!

É exatamente esta distância (em módulo e fase) que analisamos ao medir as margens de fase e de ganho do sistema!

Margem de fase é o quanto podemos deslocar o sistema em malha aberta, em fase, para que o sistema atinja o ponto $G(j\omega) = -1$. Esta característica é medida em graus.

Margem de ganho é o quanto podemos multiplicar o sistema em malha aberta, em módulo, para que o sistema atinja o ponto $G(j\omega) = -1$. Esta característica é medida em dB.

Desta forma, as margens de estabilidade são uma medida de robustez do sistema de malha fechada e entram em muitos dos projetos de controle uma vez que mensura o quanto o controlador projetado (ganho K) poderia variar sem comprometer a estabilidade do sistema em malha fechada.

VI MARGENS DE ESTABILIDADE NO DIAGRAMA DE NYQUIST

A característica de estabilidade neutra pode ser facilmente medida no diagrama de Nyquist! Ela ocorre quando um dos ramos do mapeamento referente a $s = j\omega$ em $G(s)$ (resposta em frequência de $G(s)$) cruzar exatamente o ponto -1 no plano $\text{Im}\{G(s)\} \times \text{Re}\{G(s)\}$ (seria algo como o apresentado na Figura 15). Este sistema satisfaz a condição

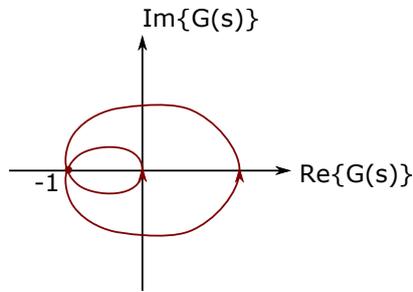


Figura 15: Sistema de malha aberta neutralmente estável.

$$|G(j\omega) = 1 \text{ e } \angle G(j\omega) = -180^\circ, \text{ para algum } 0 < \omega \in \mathbb{R}$$

Já o sistema da Figura 16 precisaria rotacionar de um ângulo θ para que $G(j\omega)$ passasse pelo ponto -1 . Portanto, a margem de fase é o ângulo θ que a reta que liga o ponto $s_c = j\omega_c$ à origem faz com

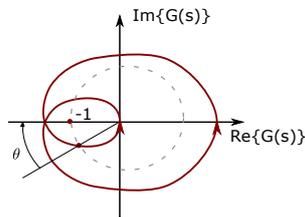


Figura 16: Medida de margem de fase no diagrama de Nyquist.

o semieixo real negativo. A **frequência de cruzamento** ω_c é aquela que define o cruzamento da resposta em frequência com a circunferência de raio unitário (Figura 16) no diagrama de Nyquist.

Por outro lado, o mesmo sistema da Figura 16, repetido na Figura 17, precisaria ser multiplicado por um ganho MG para que $G(j\omega)$ passe a cruzar o semieixo real negativo (fase de -180°) exatamente em -1 . Portanto, a margem de ganho é o inverso da distância $1/MG$ entre o ponto em que a resposta em frequência de $G(s)$ cruza o semieixo real negativo e a origem do plano (Figura 17).

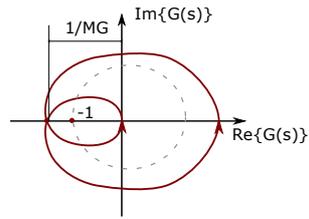


Figura 17: Medida de margem de ganho no diagrama de Nyquist.

REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.