

# LEITURA COMPLEMENTAR – 15

## Lugar Geométrico das Raízes

Profa. Gabriela W. Gabriel

14 de Agosto de 2023

---

### I MAPEAMENTO DE POLOS E ZEROS

Uma forma simples de verificar se as raízes da equação característica de malha fechada estão localizadas no semiplano direito do plano complexo é mapear como elas se comportam para diferentes valores de  $\kappa$ , dada uma equação característica do tipo

$$1 + \kappa G(s) = 0 \quad (1)$$

e analisar a curva resultante, descrita no plano complexo de  $s$ .

Este mapeamento das raízes da equação característica (1) para diferentes valores de  $\kappa$  é denominado de **Lugar Geométrico das Raízes** (LGR) ou simplesmente **Lugar das Raízes**.

Para esbozá-lo, algumas premissas são necessárias. Primeiramente, observe que podemos escrever o polinômio  $G(s)$  como sendo  $G(s) = N(s)/D(s)$  com  $N(s)$  e  $D(s)$  polinômios de coeficientes reais. Assim, as raízes de (1) são também raízes de

$$D(s) + \kappa N(s) = 0 \quad (2)$$

**Premissas:** Os polinômios  $N(s)$  e  $D(s)$  possuem coeficientes de maior grau unitários, sendo o grau de  $N(s)$  igual a  $m$  e o grau de  $D(s)$  igual a  $n$ , com  $n \geq m$ . Portanto,

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad e \quad N(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i) \quad (3)$$

Neste caso,  $z_i$  são os  $m$  zeros de  $G(s)$  e  $p_i$  são os  $n$  polos de  $G(s)$ .

Assim, para todo  $\kappa \in [0, \infty)$ , o **lugar das raízes é o traçado das raízes da equação algébrica (2) no plano complexo**  $\text{Im}\{s\} \times \text{Re}\{s\}$ .

Como (2) possuirá  $n$  raízes, então dizemos que o lugar das raízes de (2) terá  $n$  **ramos** correspondentes à cada uma das  $n$  raízes de (2). Certamente, o traçado exato do lugar das raízes de (2) requer auxílio de ferramenta computacional, no entanto, o entendimento de algumas regras que nos permitem esboçá-lo é importante uma vez que facilita o uso da ferramenta no contexto de projetos de controle. Neste sentido, a seção seguinte se dedica a colocar as regras para o esboço do Lugar das Raízes de (2).

## II LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

### II.1. Condições de Módulo e Fase

Antes de estudarmos as regras práticas, vamos relembrar que

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\kappa} \quad (4)$$

Esta relação nos define duas condições que qualquer ponto pertencente ao LGR deve satisfazer:

- **Condição de Módulo (ou Condição de Módulo):**

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{\kappa} \quad (5)$$

- **Condição de Fase (ou Condição de Ângulo):**

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^n \phi_i = (2K + 1)\pi, \quad K \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

onde escrevemos cada um dos fatores de (3) como

$$s - z_i = |s - z_i| e^{j\psi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

$$s - p_i = |s - p_i| e^{j\phi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

A condição (6) indica que cada ponto do LGR deve tornar  $G(s)$  um número real negativo.

### II.2. Regras para o esboço do LGR

Deve-se notar que a numeração das regras a seguir segue o apresentado em [3]. Em outras bibliografias, é possível encontrar um número diferente de regras porém de igual teor.

- **REGRA 1**

De (2), quando  $\kappa = 0$ , as raízes de  $D(s) + \kappa N(s) = 0$  correspondem aos polos de  $G(s)$ , uma vez que devem satisfazer  $D(s) = 0$ . Por outro lado, podemos reescrever (2) conforme

$$\kappa^{-1} D(s) + N(s) = 0$$

e de forma análoga, quando  $\kappa \rightarrow \infty$ , as raízes de (2) corresponderão às raízes de  $N(s) = 0$ . Portanto, dizemos que

$m$  ramos do LGR começam nos polos de  $G(s)$  e terminam em seus  $m$  zeros.

Como sempre teremos  $n \geq m$  devido a condição de causalidade do sistema  $G(s)$ ,  $n - m$  ramos não são contemplados pela Regra 1, de onde surge a regra 2.

- **REGRA 2**

Se  $n > m$ , considerando que  $D(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^i$  e  $N(s) = \sum_{i=1}^m b_i s^i$ , então podemos escrever

os dois primeiros termos da razão  $D(s)/N(s)$ , como

$$\begin{aligned}\frac{D(s)}{N(s)} &= s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots \\ &= s^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i\right)s^{n-m-1} + \dots \\ &= s^{n-m} + (n-m)\sigma s^{n-m-1} + \dots\end{aligned}\quad (9)$$

com

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (10)$$

Note que o segundo termo da primeira igualdade de (9) decorre da divisão entre os polinômios  $D(s)$  e  $N(s)$ , enquanto a segunda igualdade decorre da propriedade das equações algébricas polinomiais sendo  $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_i$  e  $b_{m-1} = \sum_{i=1}^m z_i$ . Neste sentido, podemos escrever, para o caso de  $|s| \rightarrow \infty$ , que

$$\frac{N(s)}{D(s)} \approx \frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}} = \frac{-1}{\kappa} \quad (11)$$

As raízes da equação que se forma de (11) podem ser expressas como

$$s = \sigma + \sqrt[n-m]{-1} \sqrt[n-m]{\kappa} \quad (12)$$

em que

$$\sqrt[n-m]{-1} = e^{j\theta_K} \implies (n-m)\theta_K = (2K-1)\pi, \quad K = 1, 2, \dots, n-m \quad (13)$$

que descreve  $n-m$  ângulos da solução de (11)

$$\theta_K = \frac{(2K-1)\pi}{n-m}, \quad K = 1, 2, \dots, n-m \quad (14)$$

Assim, para  $\kappa \rightarrow \infty$ , a relação (11) descreve  $n-m$  retas com coeficientes angulares dado em (14) passando por  $s = \sigma + j0$ . Portanto, retas com coeficientes lineares dados por  $\sigma$ .

Desta forma, podemos estabelecer que

$n-m$  ramos do LGR tendem para infinito assintoticamente a  $n-m$  retas todas com coeficiente linear  $\sigma$  dado por (10) e cada uma com coeficientes angulares dados por (14).

Observe que as retas assintotas dividem o arco  $2\pi$  em  $n-m$  arcos iguais (Figura 1) que, devido a simetria do plano complexo, são simétricas em relação ao eixo real, ou encontram-se sobre ele. Neste caso, a próxima regra deverá ser respeitada.

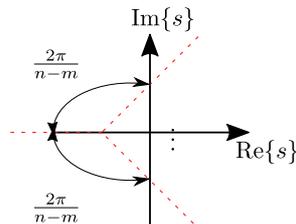


Figura 1: Coeficiente angular das  $n-m$  retas assintotas (Regra 2).

• **REGRA 3**

Se considerarmos  $s$  um ponto genérico do eixo real à direita ou à esquerda de pares de polos ou zeros complexo conjugados (exemplo  $p_1$  e  $\bar{p}_1$ ), então a soma de seus ângulos corresponderá sempre a  $2\pi$ , como pode ser visto na Figura 2. Por outro lado, para polos ou zeros reais (exemplo  $p_2$ ), observe que se estiverem à direita de  $s$ , então  $\phi = \psi = 0$ ; se estiverem à esquerda de  $s$ , então  $\phi = \psi = \pi$ . Assim, para que  $s$  pertença ao LGR, a condição de ângulo deve ser satisfeita (ver Figura 2), de onde decorre a regra 3:

Todos os pontos do eixo real localizados à esquerda de um número ímpar de polos e zeros pertencem ao LGR.

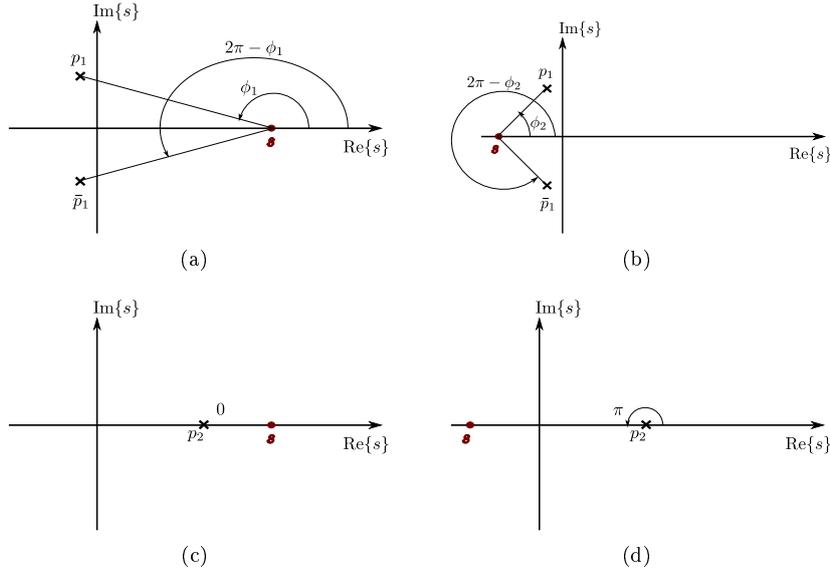


Figura 2: Composição de ângulos entre um ponto  $s$  genérico do eixo  $\text{Re}\{s\}$  e os polos de  $G(s)$ .

• **REGRA 4**

Sendo a equação característica de coeficientes reais em  $s \in \mathbb{C}$ , então se  $p$  é raiz de  $1 + \kappa G(s) = 0$ , então, seu complexo conjugado também é. Assim, o LGR é simétrico em relação ao eixo real. Ainda mais, o ponto em que ocorre o cruzamento dos ramos com o eixo imaginário é determinado pela tabela de Routh ou pelo diagrama de Nyquist. Nestes pontos as raízes de  $1 + \kappa G(s) = 0$  são imaginárias puras e, portanto, correspondem à frequência crítica do sistema em malha fechada.

O LGR é simétrico em relação ao eixo real e o cruzamento com o eixo  $\text{Im}\{s\}$  é determinado pelo critério de Routh ou pelo diagrama de Nyquist.

• **REGRA 5**

Observe que, os pontos  $c_i$  em que ocorre cruzamento de ramos do LGR correspondem a raízes múltiplas de  $1 + \kappa G(s) = 0$ . Neste caso, podemos escrever

$$1 + \kappa G(s) = (s - c_i)^2 \tilde{G}(s) = 0$$

Por isso, a derivada de  $1 + \kappa G(s)$  também possuirá raiz em  $s = c_i$ . Assim, determinamos estes pontos fazendo

$$\frac{d}{ds} (G(s)) = N(s)D(s)' - D(s)N(s)' = 0 \tag{15}$$

Certamente, esta não é uma condição suficiente, mas apenas necessária. Assim, nem todas as soluções de (15) serão pontos de cruzamento entre ramos. Uma análise criteriosa faz-se necessário.

O cruzamento entre ramos é determinado através das raízes de

$$N(s)D(s)' - D(s)N(s)' = 0$$

• **REGRA 6**

Como todos os pontos do LGR devem satisfazer as condições de fase e módulo, estas duas condições podem ser utilizadas para fins de determinação de ângulos e para projetos de controladores proporcionais, respectivamente, como exemplos. Duas condições especiais são os ângulos de saída dos polos e de chegada nos zeros. Neste caso, se for considerado um ponto  $s$  arbitrariamente próximo de um dos polos  $p_1$  (caso do ângulo de saída) ou de um dos zeros  $z_1$  (caso do ângulo de chegada), então a reta que une  $s$  a  $p_1$  será praticamente tangente à curva do LGR que sai de  $p_1$  e passa por  $s$ , determinando assim o ângulo de saída de  $p_1$ . Note que os demais ângulos podem ser medidos com bastante precisão em relação à  $p_1$  e não à  $s$ , isso devido à condição de estarem arbitrariamente próximos. O mesmo ocorre para medida do ângulo de chegada em relação a  $z_1$ .

Os ângulos de saída dos polos e de chegada nos zeros podem ser determinados através da condição de ângulo (6).

III EXEMPLOS RESOLVIDOS

- *Seja a equação característica de um sistema de controle em malha fechada dado por*

$$1 + \kappa \frac{(s+1)}{(s+2)^2} = 0$$

*O estudo de seu comportamento em função de  $\kappa$  pode ser obtido através do LGR. Para isso podemos aplicar as regras vistas até aqui considerando  $G(s) = (s+1)/(s+2)^2$ .*

*Regra 1 - Vê-se claramente que  $G(s)$  possui um zero e dois polos, portanto, sabemos que o LGR terá dois ramos, um deles saindo de um dos polos e indo para o zero e o outro saindo do outro polo e tendendo para uma assíntota.*

*Regra 2 - Haverá, portanto,  $2 - 1$  assíntotas com coeficiente linear*

$$\sigma = (-2 - 2 - (-1))/(2 - 1) = -3$$

*e coeficiente angular*

$$\theta_K = (2K - 1)\pi/(2 - 1), \quad K = 1$$

$$\theta_K = \pi$$

*O esboço das assíntotas no diagrama polar de  $s$ , pode ser obtido conforme apresentado na Figura 3(a).*

*Regra 3 - Pertencem ao LGR todos os ponto do eixo real tais que  $s < -2$  (Figura 3(b)).*

*Dadas as análises anteriores, podemos facilmente visualizar o LGR, que corresponde àquele apresentado na Figura 3(c). No entanto, podemos verificar as demais regras:*

*Regra 4 - O critério de Routh-Hurwitz aplicado a equação característica*

$$N(s) + \kappa D(s) = (s+2)^2 + \kappa(s+1) = s^2 + (4 + \kappa)s + (4 + \kappa) = 0$$

*nos fornece*

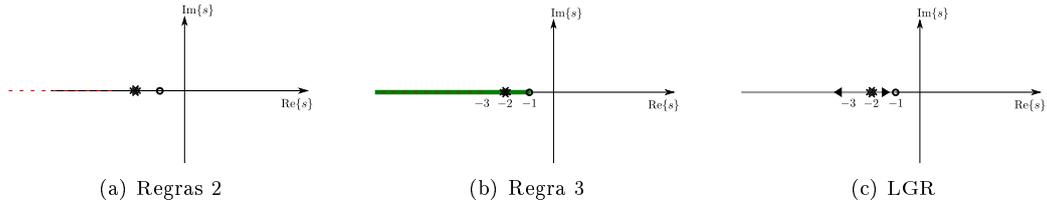


Figura 3: Esboço do LGR (Exemplo 1).

Tabela 1: Tabela de Routh

$s^2$	1	$4 + \kappa$
$s^1$	$4 + \kappa$	
$s^0$	$4 + \kappa$	

A frequência crítica corresponde a quando uma ou mais raízes cruzam o eixo imaginário. Portanto,  $\kappa = -4$ . Note que o LGR é construído para  $\kappa > 0$ . Neste caso, não há  $\kappa$  que satisfaça a condição de cruzamento com o eixo imaginário.

Regra 5 – O cruzamento entre ramos do LGR pode ser calculado como

$$N(s)D(s)' - D(s)N(s)' = (s + 1)(2s + 4) - (s^2 + 4s + 4)(1) = s^2 + 2s = 0$$

Tais pontos seriam então  $s = 0$ , que não pertence ao LGR e não deve ser considerado, e  $s = -2$  em que os dois ramos de fato se encontram, para  $\kappa = 0$ , sendo este o polo duplo de  $G(s)$ .

Regra 6 – Os ângulos de partida, neste caso, são evidentes ( $0^\circ$  e  $180^\circ$ ). De fato, para os ângulos de partida, considere um ponto  $s_1$  arbitrariamente próximo e à direita de  $s = -2$ . Os ângulos que  $s_1$  faz com os polos  $s = -2$  e o zero  $s = -1$ , são dados por  $\phi_1 = \phi_2$  e  $\psi_1 = 180^\circ$ , que segundo a condição de fase nos fornece

$$\psi_1 - 2\phi_1 = 180 \implies \phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$$

Por outro lado, para um ponto  $s_2$  arbitrariamente próximo e à esquerda de  $s = -2$ . Os ângulos que  $s_2$  faz com os polos  $s = -2$  e o zero  $s = -1$ , são dados por  $\phi_1 = \phi_2$  e  $\psi_1 = 180^\circ$ , que segundo a condição de fase nos fornece

$$\psi_1 - 2\phi_1 = -180 \implies \phi_1 = \phi_2 = -180^\circ$$

Observe que, na condição de fase, quaisquer outros valores de  $K$  levam aos mesmos valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

- Seja agora o outro exemplo da Figura 4. O LGR aplicado a este sistema corresponde ao apresentado

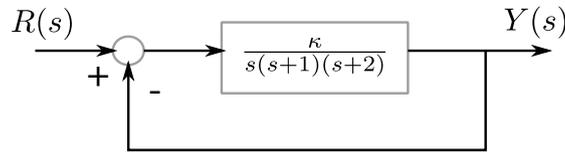


Figura 4: Sistema realimentado (Exemplo Resolvido 2).

na Figura 5. De fato, considerando o sistema da Figura 4, sua equação característica será

$$1 + \kappa \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

Verificando as regras para o esboço do LGR teremos:

Regras 1 e 2 – Para

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

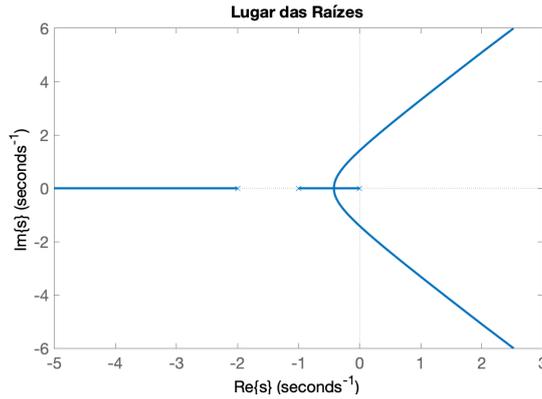


Figura 5: LGR (Segundo exemplo resolvido)

temos 3 polos e nenhum zero. Consequentemente, serão 3 assíntotas com coeficiente linear

$$\sigma = \frac{-1 - 2 - (0)}{3 - 0} = -1$$

e ângulos

$$\theta_K = \frac{(2K - 1)\pi}{3 - 0}, \quad K = 1, 2, 3$$

$$\theta_K = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

As assíntotas podem ser vistas na Figura 6(a).

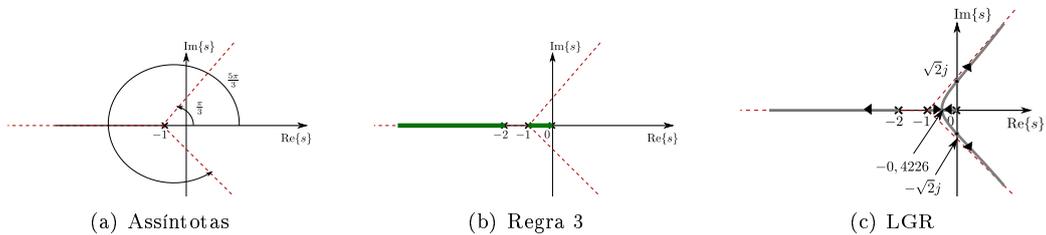


Figura 6: Esboço do LGR (Segundo exemplo resolvido).

Regra 3 - Dados os polos de  $G(s)$ , os trechos do eixo real que pertencem ao LGR são apresentados na Figura 6(b).

Regra 4 - Os pontos de cruzamento com o eixo imaginário são dados pela tabela de Routh para a equação característica

$$1 + \kappa G(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + \kappa = 0$$

Tabela 2: Tabela de Routh

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$\kappa$
$s^1$	$6 - \kappa$	
$s^0$	$\kappa$	

A condição de cruzamento com  $\text{Im}\{s\}$  ocorre para  $\kappa = 6$  e os polos de malha fechada, neste caso, serão  $s = \pm\sqrt{2}j$ .

Regra 5 - O cruzamento de ramos do LGR pode ser obtido segundo

$$N(s)D(s)' - D(s)N(s)' = 1(3s^2 + 6s + 2) = s^2 + 2s + \frac{2}{3} = 0 \implies s = \{-1.5774, -0.4226\}$$

Dentre os pontos obtidos, podemos verificar que somente  $-0.4226$  pertence ao lugar das raízes e, portanto, configura um ponto de encontro entre ramos.

Regra 6 - Considerando  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$  e  $p_3 = -2$ , os ângulos de saída dos polos podem ser facilmente calculados como

- Saída de  $p_1$

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180^\circ \implies -\phi_1 - 0 - 0 = -180^\circ \implies \phi_1 = 180^\circ$$

- Saída de  $p_2$

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180^\circ \implies -180 - \phi_2 - 0 = -180^\circ \implies \phi_2 = 0^\circ$$

- Saída de  $p_3$

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -540^\circ \implies -180 - 180 - \phi_3 = -540^\circ \implies \phi_3 = 180^\circ$$

Observe que a condição de fase requer que a soma dos ângulos seja um múltiplo ímpar de  $180^\circ$ , independente do valor de  $K$  adotado em (6).

#### IV EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considerando a equação característica do tipo  $1 + \kappa G(s) = 0$ , esboce no plano complexo o lugar de suas raízes em função do ganho  $\kappa \in [0, +\infty)$ , para as TF definidas a seguir.

(a)  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$

(b)  $G(s) = \frac{s^2+8s+20}{(s+2)(s^2+4s+7)}$

(c)  $G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s^2+4s+4)}$

(d)  $G(s) = \frac{1}{(s+5)(s^2+2s+2)}$

(e)  $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+6s+10)}$

(f)  $G(s) = \frac{5}{s(s+4)(s^2+12s+45)}$

(g)  $G(s) = \frac{(s-1)(s-3)}{s(s+5)}$

(h)  $G(s) = \frac{s^2+16s+73}{(s+1)(s^2+8s+41)}$

(i)  $G(s) = \frac{2(s^2+6s+90)}{s(s^2+4s+13)}$

(j)  $G(s) = \frac{s+10}{(s-2)(s+4)}$

(k)  $G(s) = \frac{s^2}{(s+2)(s+5)(s+10)^2}$

(l)  $G(s) = \frac{s(s-2)}{(s+3)(s+5)}$

2. Esboce o LGR para as seguintes configurações de polos e zeros de malha aberta e analise os efeitos de suas localizações relativas para cada um dos casos apresentados na Figura 7

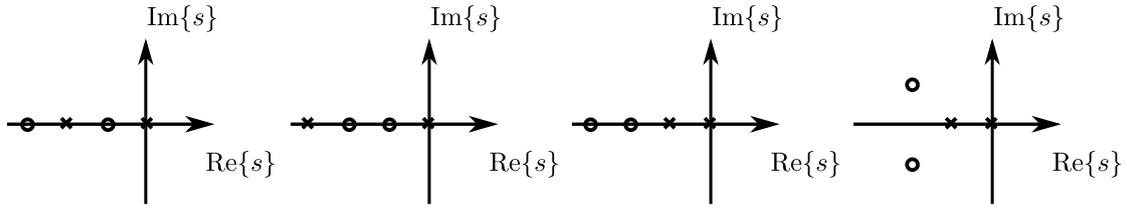


Figura 7: Configurações exercício 2.

3. Considere um sistema de controle a tempo contínuo com realimentação unitária de acordo com a Figura 8. Esboce o LGR em função do ganho  $\kappa > 0$  para cada um dos valores de  $\alpha = \{1/2; 3/2; 5\}$ . Considere as seguintes TF de malha aberta e verifique a influência de  $\alpha$  no esboço em cada caso.

(a)  $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+\alpha)}$

(b)  $G(s) = \frac{(s+2)}{(s^2+2s+5)(s+\alpha)}$

(c)  $G(s) = \frac{s+\alpha}{(s+2)^2(s+4)}$

(d)  $G(s) = \frac{(s+\alpha)}{(s^2+4s+13)(s+4)}$

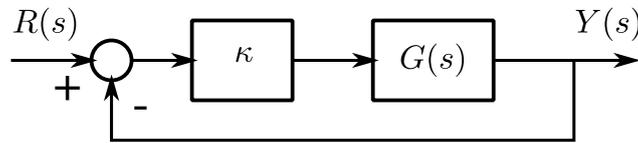


Figura 8: Realimentação unitária negativa (Exercício 3).

4. Verifique que o lugar das raízes para um sistema de controle com

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$C(s) = K$$

$$H(s) = 1$$

são arcos de circunferência centradas na origem e com raio igual a  $\sqrt{10}$ .

#### REFERÊNCIAS

- [1] Castrucci, PBL; Bittar, A; Sales, RM. *Controle Automático*, 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [2] Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Geromel, JC; Korogui, RH. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.