LEITURA COMPLEMENTAR – 17

Lugar Geométrico das Raízes para Realimentação Positiva

Profa. Gabriela W. Gabriel

15 de Agosto de 2023

I LGR com Realimentação Positiva

Recapitulando aulas anteriores, o Lugar Geométrico das Raízes (LGR) é o diagrama que apresenta, no plano polar de s, a posição de todas as raízes do sistema em malha fechada $F(s)$ para diferentes valores de um determinado parâmetro K. Dado que $F(s)$ possui equação característica da forma $1 + KG(s) = 0$, em que $G(s)$ corresponde a função de transferência de malha aberta, podemos esboçar o LGR de $F(s)$ a partir do conhecimento de $G(s)$.

Este esboço (construção) do lugar das raízes de $1 + KG(s) = 0$ tem como premissa o fato de $K \in \mathbb{R}_+$, em um contexto de realimentação negativa. E, se o sistema a ser estabilizado precisar de um realimentação positiva? Seria possível estabelecermos novas regras para a análise e projeto utilizando a técnica do LGR? A resposta para esta pergunta é SIM. Porém algumas adaptações serão necessárias.

I.1. Condição de Módulo e Fase

Para esta análise, partiremos do pressuposto que nossa equação característica é do tipo

$$1 - KG(s) = 0$$

Para estabelecermos as regras para a construção do LGR, vamos considerar, ao longo desta seção que a função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

em que assumimos ainda que tanto $N(s)$ quanto $D(s)$ possuem coeficientes unitários no termo de maior grau. Além disso, $N(s)$ é um polinômio de grau m e $D(s)$, um polinômio de grau $n \geq m$, ambos com coeficientes constates e reais. Estas características decorrem do tipo de sistema analisado: sistema físico linear, invariante no tempo e causal!

Vamos definir ainda,

$$\begin{aligned} s - z_i &= |s - z_i|e^{j\psi_i}, \quad i = \{1, 2, \ldots, m\} \\ s - p_i &= |s - p_i|e^{j\phi_i}, \quad i = \{1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

A partir da equação característica, poderemos escrever de forma equivalente (considerando a realimentação unitária positiva)

$$KG(s) = 1$$

que gera, no conjunto dos números complexos, duas condições necessárias e suficientes para que o ponto do plano polar de s pertença ao LGR. São elas:

1. **Condição de módulo** (*INALTERADA!*)

$$|G(s)| = \frac{1}{K}$$

em que vamos estabelecer que $K \in \mathbb{R}_+$.

2. **Condição de fase** (*MODIFICADA!*)

$$\underline{/G}(s) = 0^{\text{o}} \pm \ell 360^{\text{o}} \ , \quad \ell = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Neste ponto, é importante ressaltar que nesta condição reside a diferença fundamental entre o LGR para realimentação negativa unitária e o LGR para sistemas com realimentação positiva unitária.

I.2. Regras Para a Construção do LGR

i. **REGRA 1 : Quantidade de ramos do LGR** (*INALTERADA!*)

A quantidade de raízes do sistema de malha fechada será igual ao número de polos de $G(s)$, n, uma vez que $n \geq m$. Assim como para o caso do realimentação negativa, aqui teremos que os ramos do LGR iniciarão nos polos de malha aberta. Isso, deve-se a

$$KN(s) - D(s) = 0$$

Para $K = 0$ teremos a raízes da equação característica de malha fechada igual aos polos de malha aberta.

Por motivo semelhante, para o caso de $K \to \infty$ e sendo

$$N(s) - \frac{1}{K} D(s) = 0$$

m ramos do LGR terminarão nos m zeros de $G(s)$.

ii. **REGRA 2 : Assíntotas do LGR** (*MODIFICADA!*)

Podemos aproximar $G(s)$ como

$$\begin{aligned} \frac{D(s)}{N(s)} &= s^{n-m} + (\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i) s^{n-m-1} + \ldots \\ &= s^{n-m} + (n-m)\sigma s^{n-m-1} + \ldots \approx (s-\sigma)^{n-m} \end{aligned}$$

Assim, $n - m$ ramos do LGR tenderão para assíntotas com coeficientes lineares, calculados por

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

(mesma condição para o caso de realimentação negativa unitária).

Por outro lado,

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}} = \frac{1}{K}$$

portanto,

$$s = \sigma + \sqrt[n-m]{K}$$

que, para $K \to \infty$, correspondem a assíntotas com coeficiente linear σ e coeficiente angular dado por

$$(n-m)\theta_\ell = (2\pi)\ell \Longrightarrow \theta_\ell = \frac{2\pi}{n-m} \ , \quad \ell = \{1, 2, \ldots, n-m\}$$

iii. **REGRA 3 : Pontos do eixo** Re(s) **que pertencem ao LGR** (*MODIFICADA!*)

Como a condição de fase foi alterada, agora, pertencerão ao LGR todos os pontos sobre o eixo Re(s) localizados à esquerda de uma quantidade **par** de polos e zeros. Um exemplo é apresentado na Figura 1.

Figura 1: Exemplo de pontos do eixo real que pertencem ao LGR (linhas azuis).

iv. **REGRA 4 : Cruzamento dos ramos do LGR com o eixo** Im(s) (*INALTERADA!*)

Uma vez que o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz pode ser utilizado para qualquer equação característica, incluindo o caso de realimentação positiva unitária. Esta regra permanece inalterada, sendo estes pontos calculados a partir do referido critério.

v. **REGRA 5 : Cruzamento entre ramos do LGR** (*INALTERADA!*)

Analogamente ao caso de realimentação negativa unitária, sabemos que haverá cruzamento de ramos nos pontos $s = c_i$ que forem raízes duplas de

$$1 - KG(s) = 0$$

Assim,

$$1 - KG(s) = (s - c_i)^2 \bar{G}(s) = 0$$

Consequentemente, a derivada de $1 - KG(s)$ também terá raiz em $s = c_i$ e podemos calcular este ponto, fazendo

$$N(s)D(s)' - D(s)N(s)' = 0$$

vi. **REGRA 6 : Ângulos de partida dos polos e chegada nos zeros** (*MODIFICADA!*)

Esta regra corresponde à aplicação da condição de ângulo (fase) nos pontos arbitrariamente próximos dos polos e zeros de malha aberta.

II Atraso no Tempo

Em alguns sistemas físicos o atraso de transporte é significativo o suficiente para interferir na análise da estabilidade do sistema. Exemplos são os sistemas térmicos em que há um tempo perceptível entre a aplicação de um comando de alteração de temperatura (aumento ou redução) e a detecção de uma alteração nos instrumentos de medição, no caso, do termômetro.

Este tempo entre a aplicação do comando e a medição do seu efeito é chamado de RETARDO DE TRANSPORTE ou TEMPO MORTO. Certamente, o retardo de transporte não decorre somente do atraso da resposta do sistema. Também são considerados retardos de transporte o atraso na ação de controle, na medição por parte do sensor, na operação do atuador, entre outros fatores.

Observe que podemos descrever um sistema com atraso de transporte como apresentado na Figura 2. Assim, a função e transferência de um bloco de atraso puro pode ser descrito por

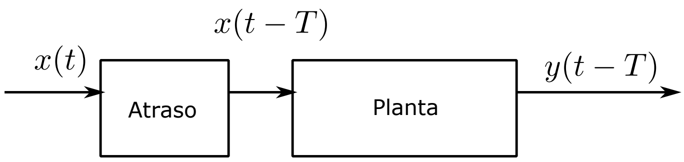

Figura 2: Exemplo de diagrama de blocos de um sistema contendo atraso de transporte.

$$A(s) = \frac{\mathcal{L}\left[x(t-T)\right]}{\mathcal{L}\left[x(t)\right]} = \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts}$$

Se inserirmos a função de transferência do atraso na função de transferência de malha aberta, teremos uma equação característica do sistema de malha fechada dada por

$$1 + KA(s)G(s) = 0 \Longrightarrow 1 + Ke^{-Ts}G(s) = 0$$

Essa modificação também influencia nas regras de esboço do LGR, uma vez que as condições de módulo e fase tornar-se-ão

1. **Condição de Módulo:**

$$\frac{1}{K} = |G(s)||e^{-Ts}|$$

2. **Condição de Fase:**

$$\underline{/e^{-Ts}} + \underline{/G}(s) = \pm(2\ell - 1)\pi \ , \quad \ell = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

onde $s = \mathrm{Re}(s) + \mathrm{Im}(s)j$.

Referências

[1] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.

[2] Castrucci, PBL.; Bittar, A.; Sales, RM. *Controle Automático*. Rio de Janeiro: LTC, 2018.