LEITURA COMPLEMENTAR – 18

Lugar Geométrico das Raízes para Sistemas com Atraso no Tempo

Profa. Gabriela W. Gabriel

15 de Agosto de 2023

I Atraso no Tempo

Em alguns sistemas físicos o atraso de transporte é significativo o suficiente para interferir na análise da estabilidade do sistema. Exemplos são os sistemas térmicos em que há um tempo perceptível entre a aplicação de um comando de alteração de temperatura (aumento ou redução) e a detecção de uma alteração nos instrumentos de medição, no caso, do termômetro.

Este tempo entre a aplicação do comando e a medição do seu efeito é chamado de RETARDO DE TRANSPORTE ou TEMPO MORTO. Certamente, o retardo de transporte não decorre somente do atraso da resposta do sistema. Também são considerados retardos de transporte o atraso na ação de controle, na medição por parte do sensor, na operação do atuador, entre outros fatores.

Observe que podemos descrever um sistema com atraso de transporte como apresentado na Figura 1. Assim, a função e transferência de um bloco de atraso puro pode ser descrito por

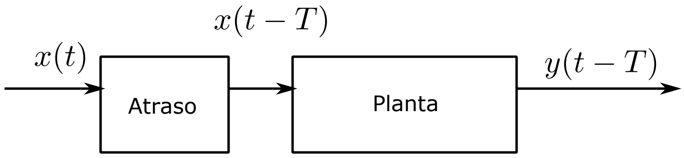

Figura 1: Exemplo de diagrama de blocos de um sistema contendo atraso de transporte.

$$A(s) = \frac{\mathcal{L}\left[x(t-T)\right]}{\mathcal{L}\left[x(t)\right]} = \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts}$$

Se inserirmos a função de transferência do atraso na função de transferência de malha aberta, teremos uma equação característica do sistema de malha fechada dada por

$$1 + KA(s)G(s) = 0 \Longrightarrow 1 + Ke^{-Ts}G(s) = 0$$

Essa modificação também influencia nas regras de esboço do LGR, uma vez que as condições de módulo e fase tornar-se-ão

1. **Condição de Módulo:**

$$\frac{1}{K} = |G(s)||e^{-Ts}|$$

2. **Condição de Fase:**

$$\underline{/e^{-Ts}} + \underline{/G}(s) = \pm(2\ell - 1)\pi \ , \quad \ell = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$$

onde $s = \mathrm{Re}(s) + \mathrm{Im}(s)j$.

I.1. Aproximação do Atraso de Transporte

A primeira forma de realizar esta aproximação é através da expansão em série de Taylor em torno de $T = 0$, neste caso, teremos para pequenos valores de T

$$e^{-Ts} = 1 - Ts$$

ou ainda

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts}$$

Por outro lado, podemos utilizar

$$e^{-Ts} = e^{-T/2s - T/2s} = \frac{e^{-T/2s}}{e^{T/2s}} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \ldots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \ldots}$$

Truncando a série nos termos de primeira ordem,

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

No Matlab, aproximações de e^{-Ts} utilizando a razão de polinômios em s podem ser obtidas através da rotina [>> `pade(T,p)`] que corresponde à **aproximação de Padé**, em que T é o valor do atraso de transporte e p a ordem dos polinômios numerador e denominador da aproximação.

As aproximações de Padé de ordem 1, 2 e 3 são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Aproximação de Padé para o atraso puro.

Ordem 1	$G(s) = \frac{2-Ts}{2+Ts}$
Ordem 2	$G(s) = \frac{T^2s^2-6Ts+12}{T^2s^2+6Ts+12}$
Ordem 3	$G(s) = \frac{-T^3s^3+12T^2s^2-60Ts+120}{T^3s^3+12T^2s^2+60Ts+120}$

Referências

[1] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1982.

[2] Castrucci, PBL.; Bittar, A.; Sales, RM. *Controle Automático*. Rio de Janeiro: LTC, 2018.