EES-32
CONTROLE CLÁSSICO II

Sistemas Discretos. Amostragem de Sinais. Seguradores. Discretização de sistemas.

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 24/03/2025.

TÓPICOS

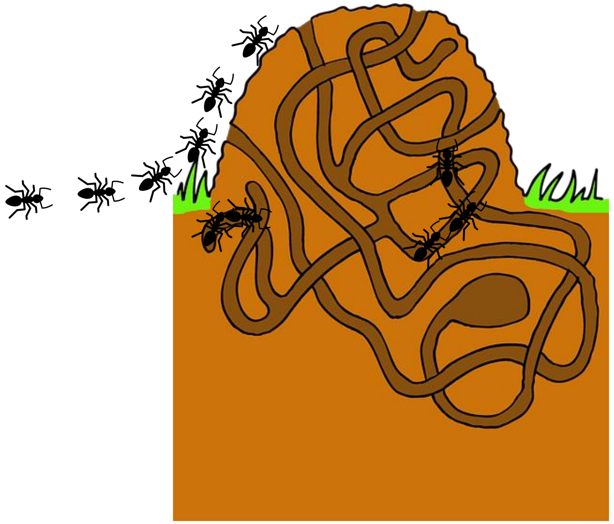
- Introdução aos sistemas a tempo discreto.
- Amostragem de sinais.
- Continuação de sinais / Seguradores.
- Discretização de sistemas.

SISTEMAS A TEMPO DISCRETO

- Definimos um sistemas dinâmicos discretos como aqueles que, dada uma condição inicial, **evoluem instantaneamente em intervalos de tempo** que podem ser fixos ou não, regidos por uma equação a diferenças. Se o intervalo de tempo é fixo, o chamamos de período ou passo. São exemplos: sistemas financeiros, controle de populações, entre outros. Aqui, adotaremos:

$$t \in \{t_k\}, k \in \mathbb{N}$$
$$T_k = t_{k+1} - t_k > 0, \mathrm{t}_0 = 0, \lim_{\mathrm{k}\to\infty} \mathrm{t}_\mathrm{k} \to \infty$$

EXEMPLO: SISTEMAS A TEMPO DISCRETO



- Considere uma população de formigas em um determinado formigueiro. As equações descrevem a relação entre a quantidade de formigas, sua taxa de natalidade e a capacidade do ambiente acomodar estes indivíduos. Este sistema é descrito por uma equação a diferenças e, portanto, originalmente discreto.

$$N[k+1] = rN[k]\frac{(C - N[k])}{C}$$ (May, 1976)

$\boldsymbol{N[k]}$ é a quantidade de indivíduos no instante k

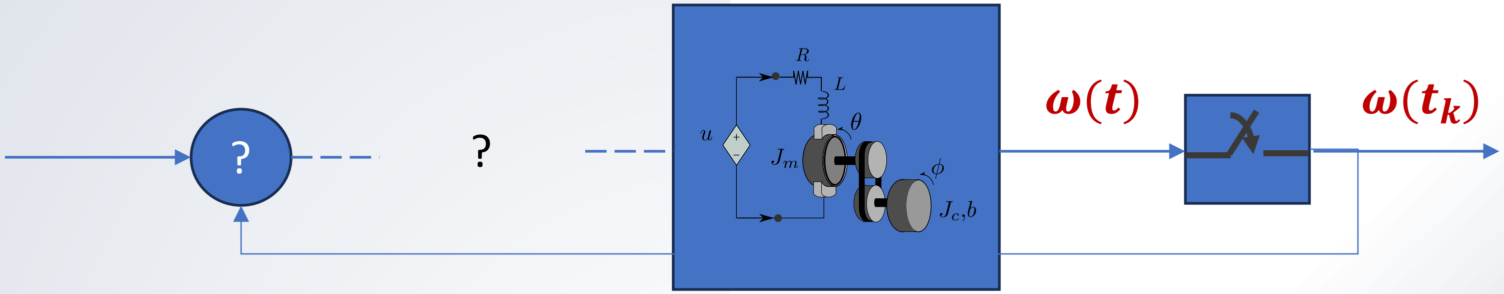
$\boldsymbol{r}$ é a taxa de natalidade

$\boldsymbol{C}$ é a quantidade máxima de indivíduos que o ambiente pode suportar

EXEMPLO: SISTEMAS AMOSTRADOS

- Por outro lado, o sistema de controle digital de uma máquina elétrica introduz na malha de controle da planta contínua sinais discretos. Estes podem ser decorrentes da leitura da velocidade angular de forma discreta ...
  - As leituras são consideradas em intervalos discretos no tempo:

$$\boldsymbol{\omega(t) = \omega(t_k), \forall t = t_k}$$

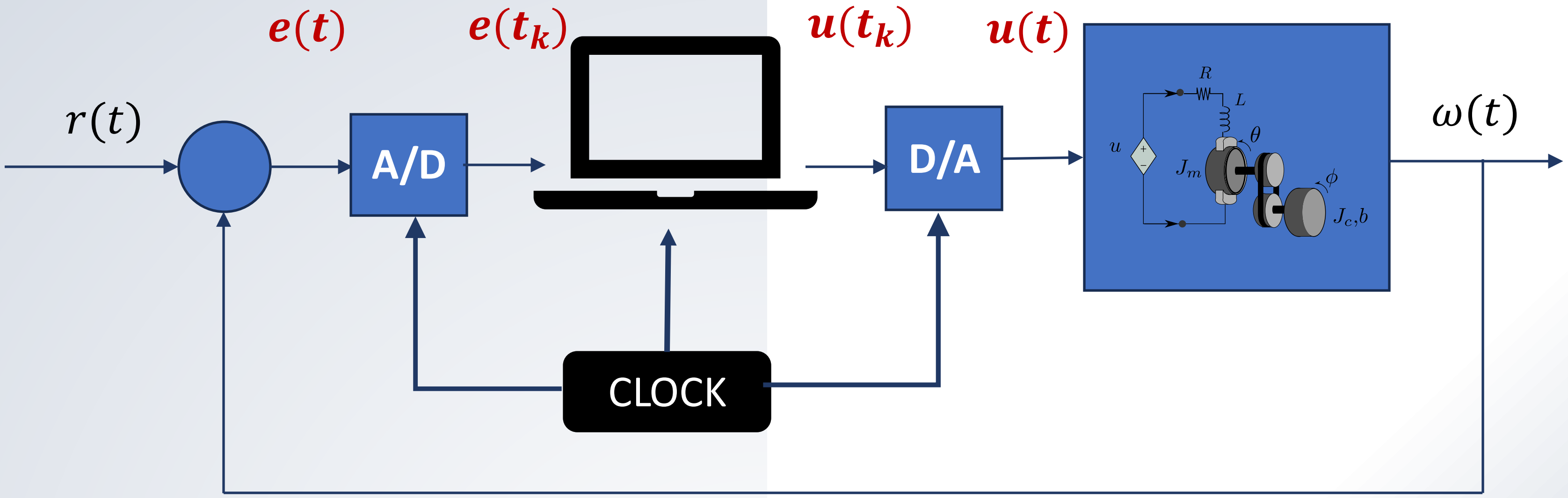


Como definir o sinal nos intervalos entre instantes de leitura dos sensores?

EXEMPLO: SISTEMAS AMOSTRADOS

... ou decorrente da aplicação de uma lei de controle discreta.

- Neste caso, devido ao uso de um computador, por exemplo:



Como projetar um controlador que possa ser implementado pelo computador?

EXEMPLO: CONTROLE DIGITAL

- Vamos tomar como exemplo um motor de corrente contínua cujo modelo é dado por

$$G(s) = \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{14s^2 + 15s + 2}$$

Com um controlador integral projetado no domínio contínuo dado por:

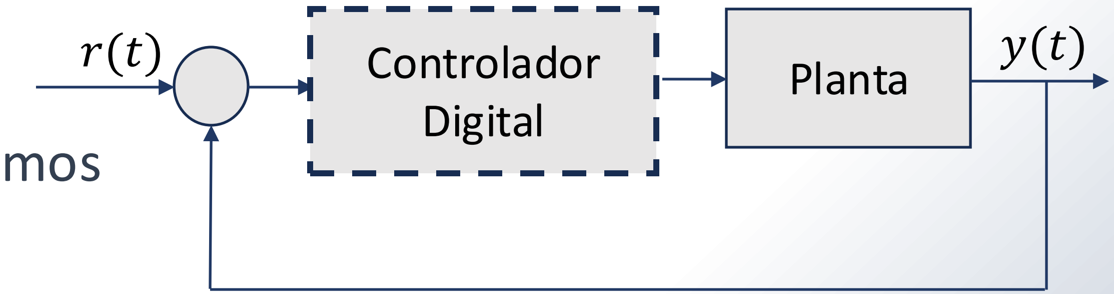
$$\boxed{U(s) = \frac{0{,}05}{s}E(s)} \rightarrow sU(s) = 0{,}05E(s) \rightarrow \dot{u}(t) = 0{,}05e(t)$$

$$\frac{u[k+1] - u[k]}{\boldsymbol{T_s}} = 0{,}05e[k] \rightarrow \boxed{u[k+1] = u[k] + 0{,}05\boldsymbol{T_s}e[k]}$$

Esta é uma forma simples de implementar uma lei de controle discrete no computador.

CONTROLE DIGITAL DE SISTEMAS

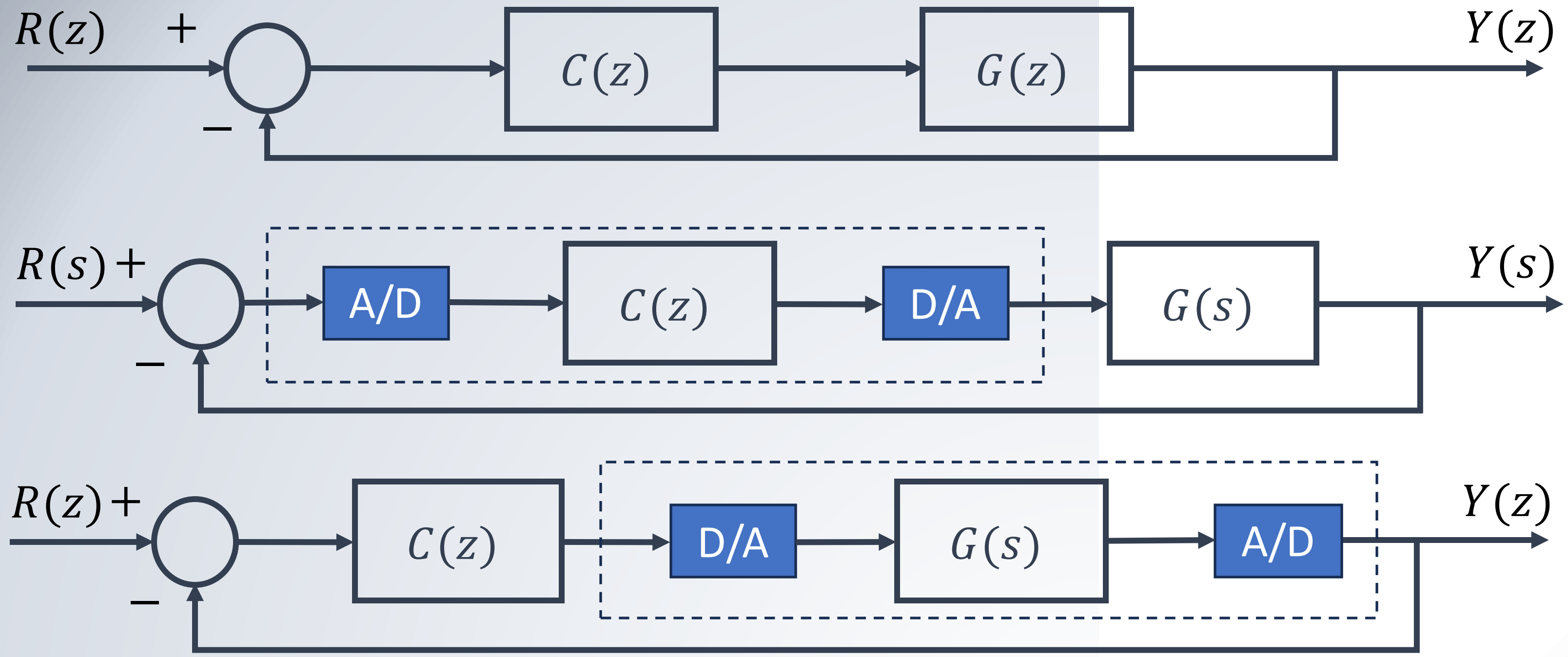
- Assim como no exemplo anterior, o controle digital em sistemas contínuos têm sido bastante utilizados. Isso deve-se ao fato do computador:
  - Ser facilmente **reconfigurado**
  - Ter baixo custo de **instalação** e **manutenção**



- No entanto, para tratar tais sistemas precisaremos estudar novas ferramentas. A saber:
  - **Amostragem/Continuação** de sinais
  - **Discretização** de sistemas
  - Projeto de **sistemas discreto**

CONTROLE DE SISTEMAS DISCRETOS

- Alguns cenários serão considerados ao longo do curso, que refletem o problema que desejamos resolver: controlar digitalmente uma planta continua ou discreta (discretizada).



Projeto de controle discreto para um sistema discreto

Projeto de controle contínuo discretizado para sistema contínuo

Projeto de controle discreto para sistema discretizado

AMOSTRAGEM DE SINAIS

- O processo de amostragem toma **amostras** do sinal (contínuo ou discreto) $r(t)$ em determinados instantes de tempo chamados de instantes de amostragem

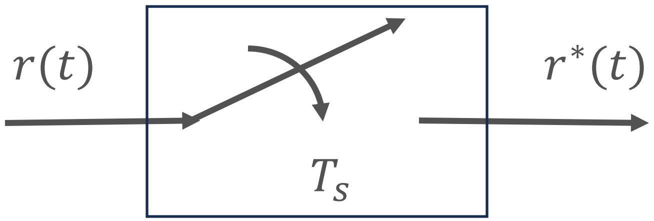
$$\boxed{\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,, t_k \in \mathbb{R}_+\,, T_s = t_{k+1} - t_k > 0\,, t_0 = 0}$$

Note que $t_k = kT_s$, em que $T_s \in \mathbb{R}_+^*$ é chamado **PERÍODO DE AMOSTRAGEM**. Assim definimos $r(t_k) = r(kT_s)$.

- Este processo gera um sinal discreto que existe apenas nos instantes de amostragem. O chamaremos de $r_s[k], \mathrm{k} \in \mathbb{N}$. Para trabalhar no sistema amostrado é conveniente definir um equivalente contínuo de r_s. Por conveniência, o definiremos como:

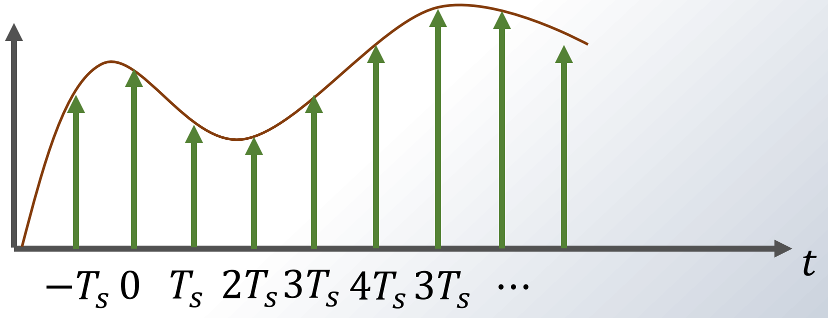
$$\boxed{r^*(t) = r(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)}$$

AMOSTRAGEM DE SINAIS



- Para o sinal anterior, note que $\boldsymbol{r^*(t) = 0}, \forall \boldsymbol{t} \in (\boldsymbol{t_k}, \boldsymbol{t_{k+1}})$.
- Um amostrador é um elemento do tipo **MODULADOR IMPULSIVO**, que produz em sua saída um sinal $r^*(t)$ a partir do sinal contínuo $r(t)$.
- A representação contínua ($r^*(t)$) associada ao sinal discreto $r_s[k] = r(kT_s), \forall k \in \mathbb{N}$, possui as seguintes propriedades:

1. $r^*(t)$ é periódico de período T_s.
2. $r^*(t)$ depende apenas das amostras de $r(t_k) = r_s[k]$.

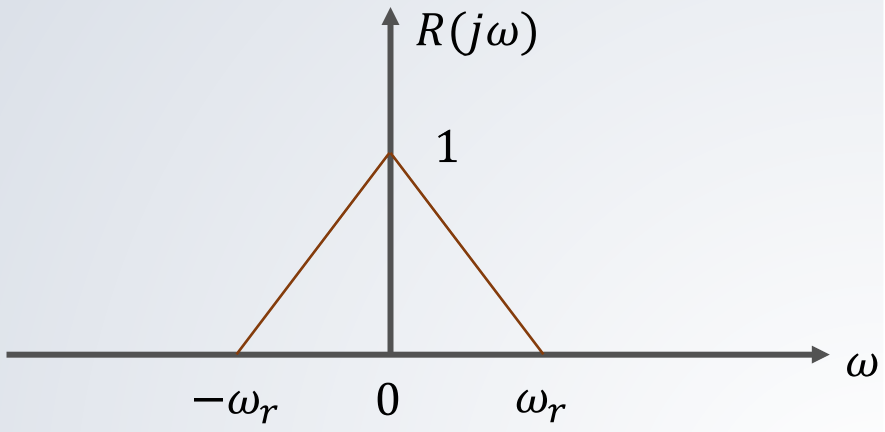


AMOSTRAGEM DE SINAIS

- Definindo o trem de impulsos como:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \quad \rightarrow \quad p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)kt}$$

- Assim, se $r(t)$ é limitado em frequência, então



$$R^*(j\omega) = \frac{1}{T_s} \mathcal{F}\left\{ r(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)kt} \right\}$$

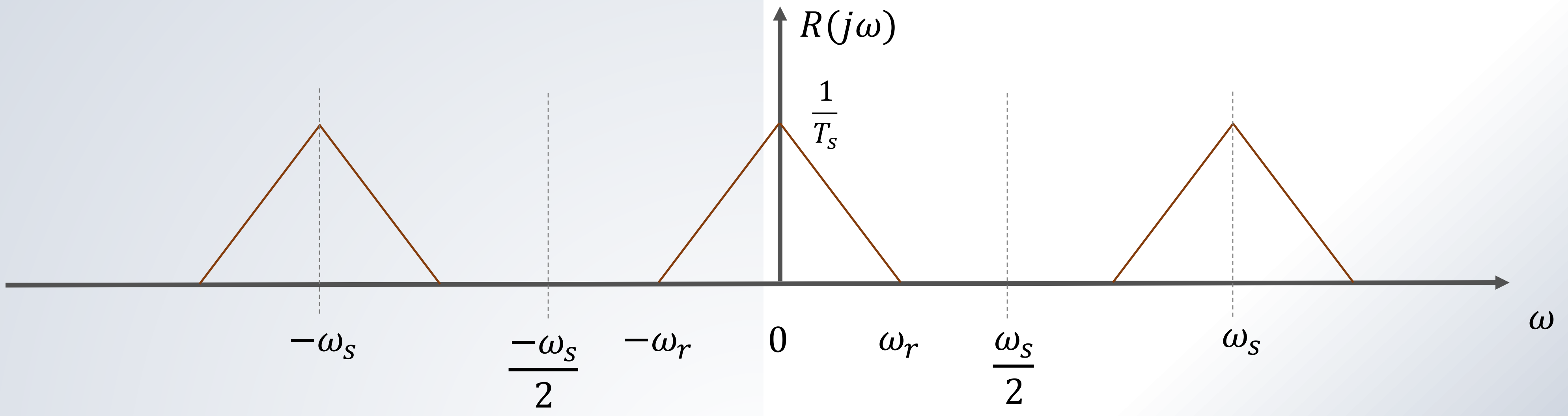
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{R\big(j(\omega - k\omega_s)\big)}$$

AMOSTRAGEM DE SINAIS

- O sinal $r(t)$ amostrado tem transformada de Fourier

$$\boxed{R^*(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R\big(j(\omega - k\omega_s)\big)}$$

em que $R^*(j\omega)$ contém $R(j\omega)$, basta fazer $k = 0$.

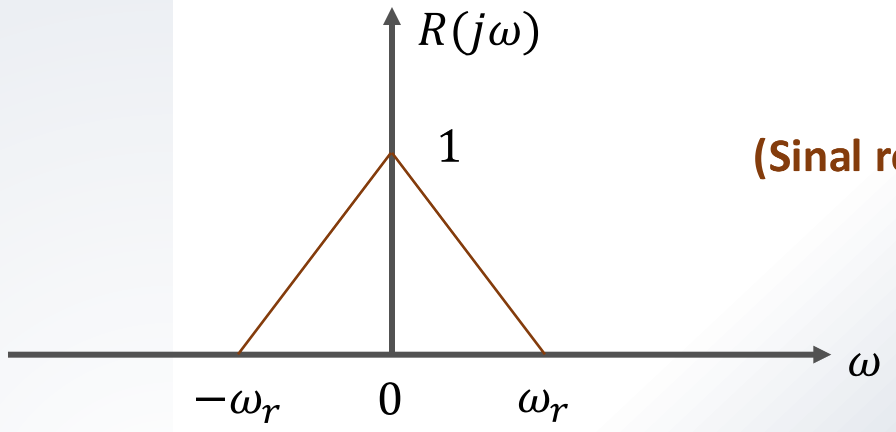


AMOSTRAGEM DE SINAIS

- Além disso, $R^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)kT_s} = R_T(jT_s\omega)$, sendo $R_T(j\omega)$ a Transformada de Fourier discreta do sinal amostrado $r_s[k]$.

- Desta forma, recuperamos o sinal original, filtrando o sinal resultante da amostragem com de um filtro passa-baixas, em que a escolha de ω_s deve satisfazer o Teorema da Amostragem.

  - Frequência de corte $\frac{\omega_s}{2}$
  - Amplitude T_s



AMOSTRAGEM DE SINAIS

- **(TEOREMA DA AMOSTRAGEM)** Seja $r(t)$ contínua e limitada em frequência, sendo $R(j\omega) = 0, \forall|\omega| \geq \omega_r$. É possível recuperar unicamente o sinal $r(t)$ através de suas amostras $r_s[k] = r(kT_s), k \in \mathbb{N}$, se o período de amostragem for tal que

$$\boxed{T_s \leq \frac{\pi}{\omega_r} \quad \rightarrow \quad \left(\omega_r \leq \frac{\omega_s}{2}\right)}$$

- Nota-se que um conversor **Analógico-Digital** ideal pode ser entendido como um amostrador ideal, que na prática não pode ser implementado em decorrência da definição do sinal impulso unitário.
- Caso a condição do Teorema acima não seja verificada, observamos a ocorrência de um falso sinal (*aliasing*).

AMOSTRAGEM DE SINAIS

- Considere então que possamos implementar este filtro ideal:

$$\boxed{F(\omega) = \begin{cases} T_s, |\omega| \leq \omega_r \\ 0, |\omega| > \omega_r \end{cases}}$$

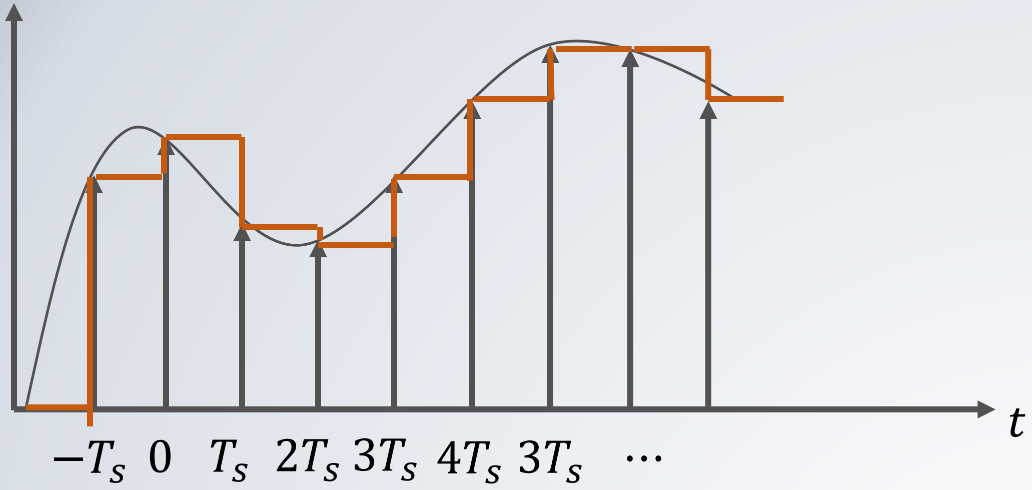
Neste caso, para $\omega_r = \pi/T_s$, a função no domínio do tempo torna-se

$$f(t) = sinc(\omega_r t)$$

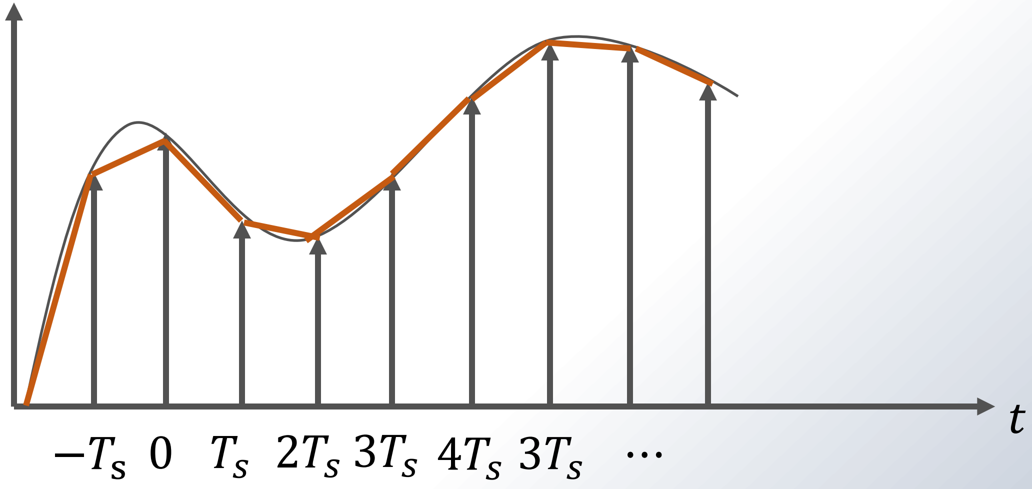
- Este filtro é NÃO REALIZÁVEL, uma vez que depende de valores não nulos para $t < 0$. Resta-nos aproximar o sinal recuperado.

CONTINUAÇÃO DE SINAIS

- Para o tratamento de sistemas digitais, outro elemento importante é aquele que toma amostras de $r(kT_s)$ e as transformam em um sinal contínuo. Estes elementos são responsáveis por recuperar (de forma aproximada) o sinal original a partir das suas amostras. Tais elementos são chamados **SEGURADORES**. Dois deles são importantes, a saber:



(Segurador de Ordem Zero – ZOH)



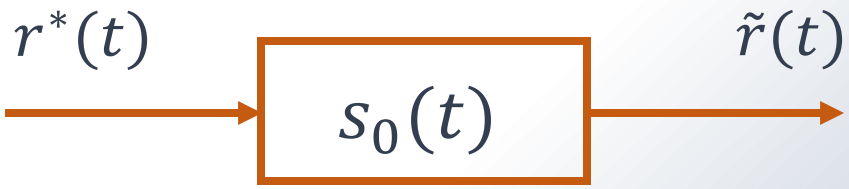
(Segurador de Primeira Ordem – FOH)

SEGURADOR DE ORDEM ZERO (ZOH)

- Neste caso, o sinal de saída do segurador de ordem zero, representado pela função de transferência $S_0(s)$, é constante durante todo o intervalo de amostragem $[kT_s, (k+1)T_s)$, sendo dado por

$$\tilde{r}(t) = r(kT_s), \qquad \forall kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

- Desta forma, o sinal $\tilde{r}$ é tal que



$$\tilde{r}(t) = s_0(t) * r^*(t)$$

$s_0(t) = u(t) - u(t - T_s)$; em que $u(t)$ é o degrau unitário

SEGURADOR DE ORDEM ZERO (ZOH)

- Assim,

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty \tilde{r}(t)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{-st}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)\frac{e^{-(k+1)Ts} - e^{-kT_s s}}{-s}$$

$$= \underbrace{\frac{1-e^{-T_s s}}{s}}_{S_0(s)} \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)e^{-kT_s s} = \boldsymbol{S_0(s)R^*(s)}$$

SEGURADOR DE ORDEM ZERO (ZOH)

- Observe que a resposta em frequência do ZOH é

$$S_0(j\omega) = \frac{e^{\frac{j\omega T_s}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_s}{2}}}{j\omega} e^{-\frac{j\omega T_s}{2}} = T_s sinc\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-\frac{j\omega T_s}{2}}$$

  - $sinc(x) = \sin(x)/x$.
  - Sua amplitude é dada por $|\mathrm{S}_0(\mathrm{j}\omega)| = \left|T_s sinc\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)\right| \approx T_s$ para $|\omega| \ll 2\pi/T_s$;
  - Este elemento introduz um atraso de $T_s/2$ no sinal de entrada $\left(r^*(t)\right)$; $\angle S_0(j\omega) = -\,\omega T_s/2$

SEGURADOR DE ORDEM ZERO (ZOH)

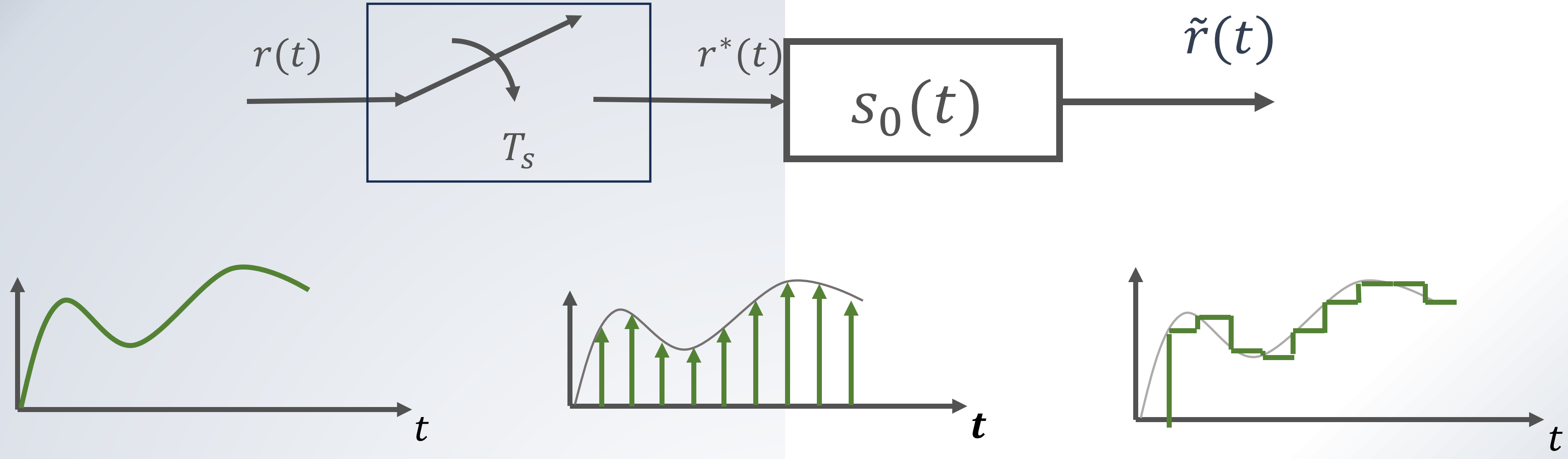
- Por outro lado, analisando a **Transformada Z, nos instantes de amostragem, das funções $\tilde{r}(t)$ e $r(t)$**, são tais que

$$\boxed{\frac{\tilde{R}(z)}{R(z)} = 1}$$

  - Nos instantes de amostragem, o segurador de ordem zero **mantém** o valor da função $r(t)$: $r(kT_s)$
  - Entre os instantes de amostragem, o segurador **completa** os valores de $\tilde{r}(t)$ com uma aproximação constante e igual a $r(kT_s)$
  - Além disso, a **precisão** com que $\tilde{r}(t)$ aproxima $r(t)$ pode ser controlada através de escolhas adequadas (pequenas) do período de amostragem T_s.

SEGURADOR DE ORDEM ZERO (ZOH)

- O processo de discretização pode ser entendido como



O elemento amostrador uniformiza os intervalos de amostragem.

SEGURADOR DE PRIMEIRA ORDEM (FOH)

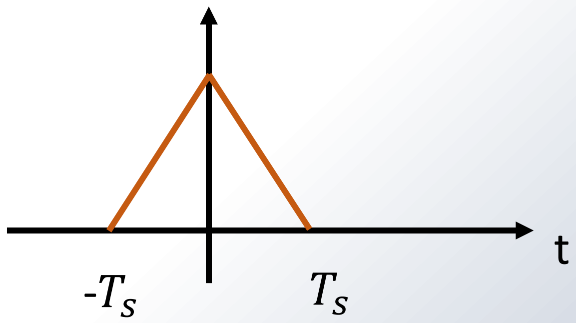
- Para o segurador de primeira ordem, o sinal de saída, representado pela função de transferência $S_1(s)$, é linear por partes durante todo o intervalo de amostragem $[kT_s, (k+1)T_s]$, sendo dado por

$$\tilde{r}(t) = \frac{r\big((k+1)T_s\big) - r(kT_s),}{T_s}(t - kT_s) + r(kT_s), \qquad \forall kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

Observe que deve haver continuidade entre as funções $\tilde{r}(t)$ entre dois intervalos consecutivos.

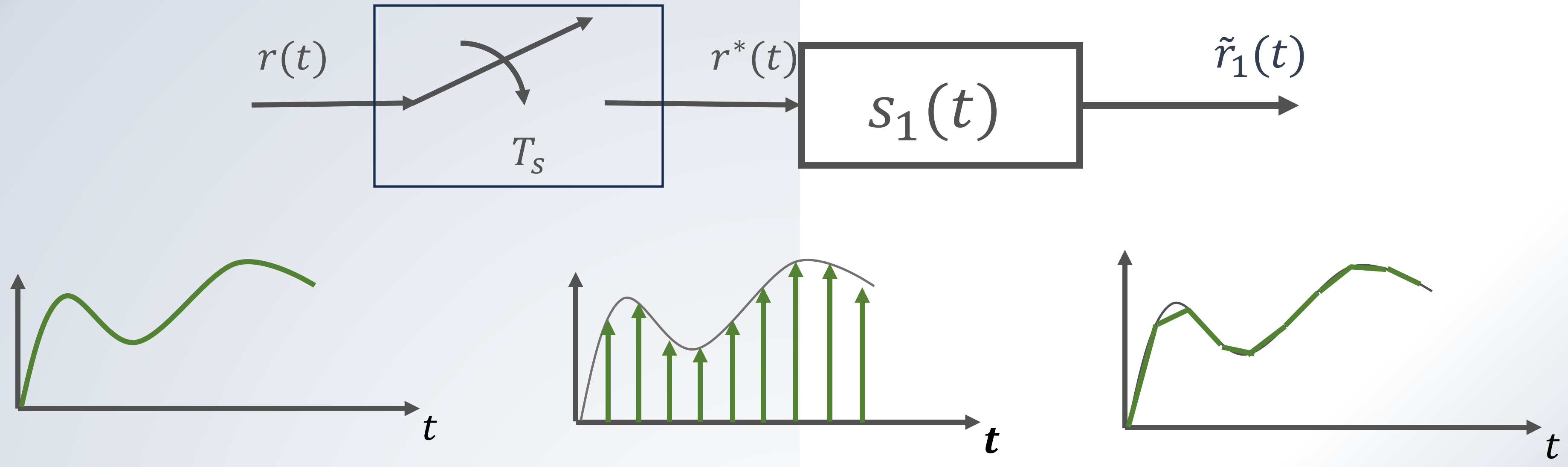
- Desta forma, o sinal $s_1(t)$ é tal que

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T_s}, & |t| \leq T_s \\ 0, & |t| > T_s \end{cases}$$



SEGURADOR DE PRIMEIRA ORDEM (FOH)

- Para este tipo de segurador o processo de discretização pode ser representado por



SEGURADOR DE PRIMEIRA ORDEM (FOH)

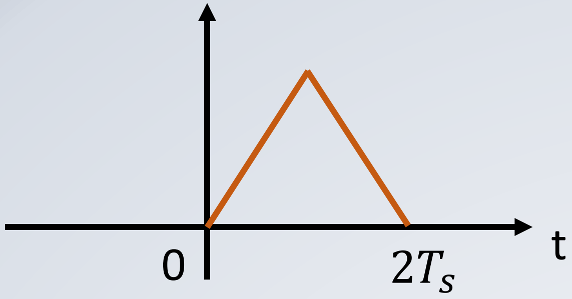
- Sua resposta em frequência é

$$S_1(j\omega) = T_s\left(sinc\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)\right)^2 \; ; \; |S_1(j\omega)| = \left|T_s\left(sinc\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)\right)^2\right| ; \; \angle S_1(j\omega) = 0$$

- **Embora este sinal tenha a propriedade de não inserir atrasos, ele é NÃO CAUSAL.** Para contornar este fato, algumas variações são admitidas. Uma delas corresponde ao segurador de primeira ordem atrasado (DFOH) também conhecido como segurador de primeira ordem causal. O sinal de saída continua linear por partes (PWL), sendo a função interna do DFOH construída a partir de uma função triangular atrasada.

SEGURADOR DE PRIMEIRA ORDEM CAUSAL (DFOH)

- A saber,



$$s_1(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t - T_s|}{T}, & |t - T_s| \leq T_s \\ 0, & |t - T_s| > T_s \end{cases}$$

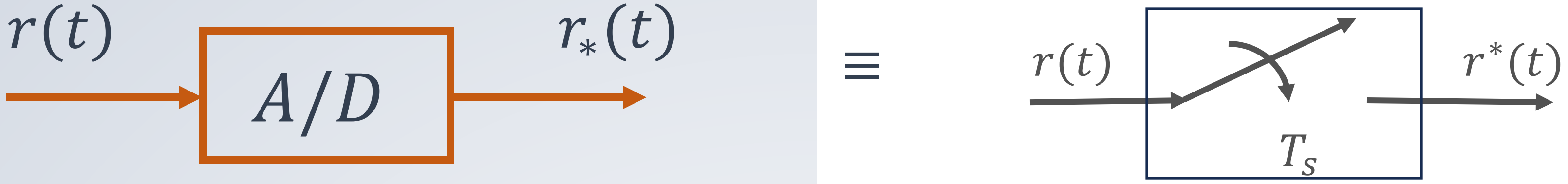
- Agora sua resposta em frequência passa a ser dada por

$$S_1(j\omega) = T_s e^{-j\omega T_s}\left(sinc\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)\right)^2 \; ; \; |S_1(j\omega)| = \left|T_s\left(sinc\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)\right)^2\right| ; \; \angle S_1(j\omega) = -\omega T_s$$

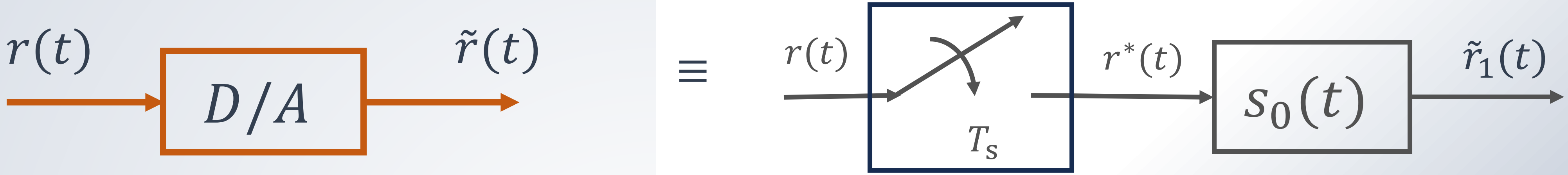
- Este elemento introduz um atraso maior que aquele do ZOH. Por este motivo o ZOH é preferível em detrimento do FOH.

CONVERSORES IDEAIS

- Um conversor ANALÓGICO-DIGITAL ideal é representado por um elemento amostrador

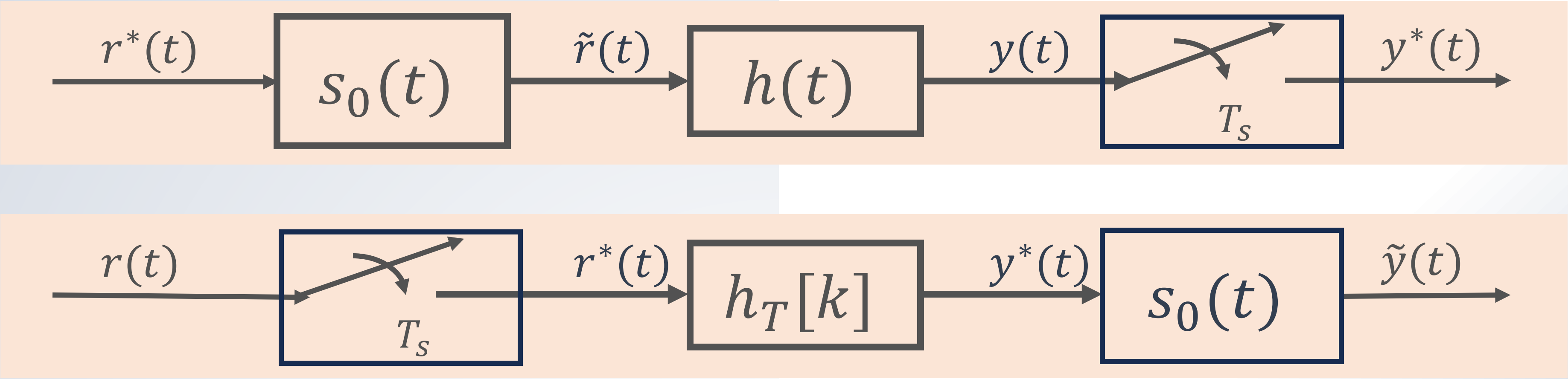


- Um conversor DIGITAL-ANALÓGICO ideal é representado por um elemento amostrador seguido de um elemento segurador de ordem zero



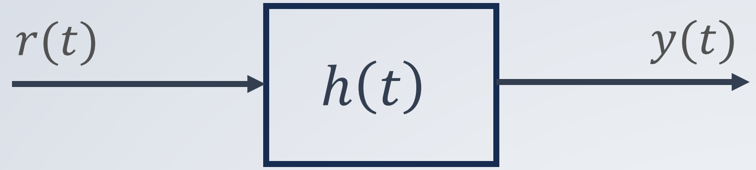
DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- Nosso desafio agora é dado um sistema contínuo descrito por uma EDO, $h(t)$, como o reescrevemos em termos de uma equação a diferenças? Analogamente, dado um sistema discreto descrito por uma equação a diferenças, como a reescrevemos em uma EDO equivalente? Para isso trabalharemos com os elementos básicos que estudamos até aqui.



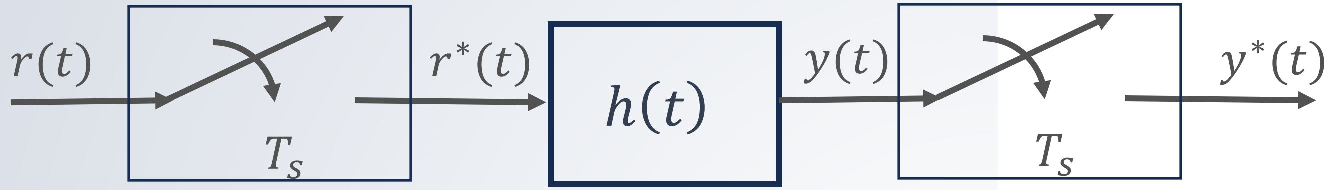
DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- Desejamos obter o equivalente discreto de um sistema contínuo (**Função de Transferência Pulsada**), de forma que dadas amostras do sinal de entrada produzam na saída do sistema equivalente, o sinal de saída original amostrado.



$$r(t) = 0, \forall t < 0$$

$$y(t) = h(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{t} r(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



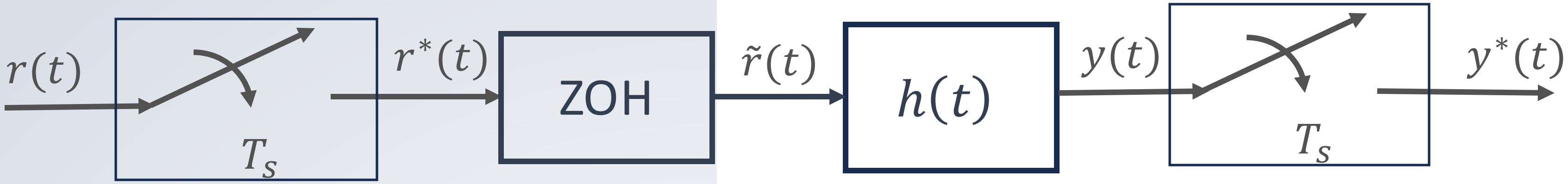
$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$y(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT_s)h(nT_s - kT_s)$$

$$y(nT_s) = h(nT_s) * r(nT_s)$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- Vamos considerer agora o caso em que temos disponível na entrada do sistema apenas uma aproximação do sinal original $\tilde{r}(t)$. Neste caso, teremos



$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$y(t) = h(t) * \tilde{r}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT_s) \int_{-\infty}^{t} s_0(\tau - kT_s)h(t-\tau)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT_s)h_s(t - kT_s)$$

$$y(nT_s) = r(nT_s) * h_s(nT_s)$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- Para os dois casos acima, o equivalente discreto pode ser obtido escrevendo-se

$$H_s(z) = \mathcal{Z}\left\{h_s(t)|_{t=kT_s,k\in\mathbb{N}}\right\}, \text{ onde } h_s(t) = h(t) * s(t)$$

- PRIMEIRO CASO – Discretização invariante ao impulso, $s(t) = T_s\delta(t)$

$$h_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{T_s H(s)\} \ ; \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

(O fator T_s compensa o fator $1/T_s$ do processo de amostragem).

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- SEGUNDO CASO – Discretização via segurador de ordem zero, $s(t) = \frac{1-e^{-sT_s}}{s}$

$$H_s(z) = H_u(z)(1 - z^{-1}) \quad , H_u(z) = \mathcal{Z}\left\{ \int_0^t h(t)dt \,\Big|_{t=kT_s} \right\}$$

  e que equivale a fazer

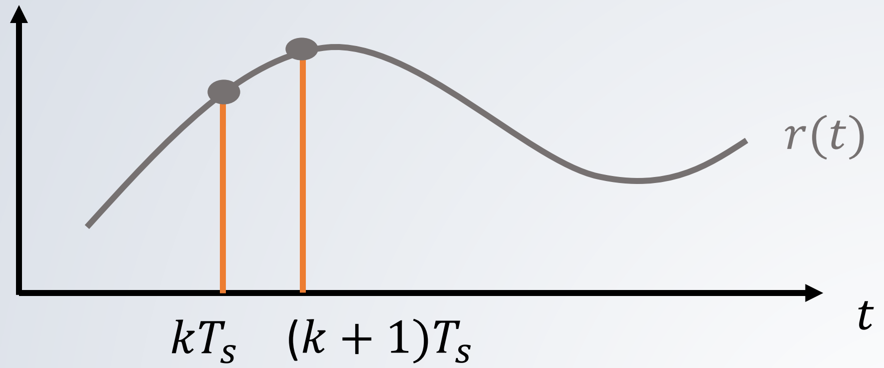
$$h_s(t) = h(t) * [u(t) - u(t - T_s)]$$

  sendo $u(t)$ o degrau unitário.

- Em seguida outras técnicas de discretização que aproximam o sistema contínuo em um sistema discreto são apresentadas.

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- **APROXIMAÇÃO POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**:
  - Esta técnica de discretização considera a aproximação do sinal de acordo com a **APROXIMAÇÃO** que se faz para a **INTEGRAL NUMÉRICA** do sinal.
  - Para este sistema desejamos obter um equivalente discreto cujo sinal de saída $u(t)$ seja uma aproximação discreta do sinal de entrada $r(t)$.



$$U(s) = R(s)/s$$

$$u\big((k+1)T_s\big) = \int_0^{kT_s} r(t)dt + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} r(t)dt$$

$$u\big((k+1)T_s\big) = u(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} r(t)dt$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- APROXIMAÇÃO POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
  - **Retangular *Forward***

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} r(t)dt = T_s r(kT_s) \quad \Longrightarrow \quad u\big((k+1)T_s\big) = u(kT_s) + T_s r(kT_s)$$

$$(z-1)U(z) = T_s R(z) \quad \Longrightarrow \quad U(z) = \frac{T_s}{z-1}R(z) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s = \frac{z-1}{T_s}}$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- APROXIMAÇÃO POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
  - **Retangular *Backward***

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} r(t)dt = T_s r\big((k+1)T_s\big) \quad \Longrightarrow \quad u\big((k+1)T_s\big) = u(kT_s) + T_s r\big((k+1)T_s\big)$$

$$(z-1)U(z) = T_s z R(z) \quad \Longrightarrow \quad U(z) = \frac{T_s z}{z-1} R(z) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s = \frac{z-1}{T_s z}}$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- APROXIMAÇÃO POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
  - **Trapezoidal**

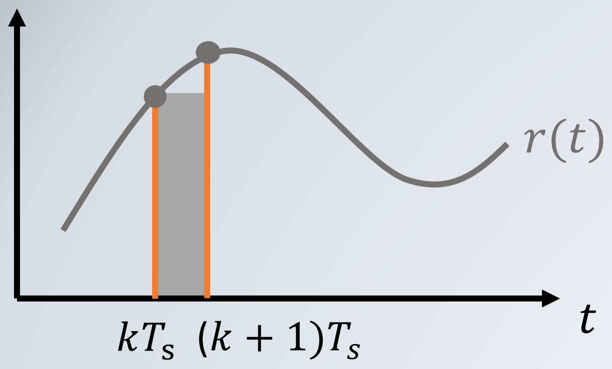
$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} r(t)dt = \frac{T_s}{2}\Big(r\big((k+1)T_s\big) + r(kT_s)\Big) \quad \Longrightarrow \quad u\big((k+1)T_s\big) = u(kT_s) + \frac{T_s}{2}\Big(r\big((k+1)T_s\big) + r(kT_s)\Big)$$

$$(z-1)U(z) = \frac{T_s}{2}(z+1)R(z) \Longrightarrow \quad U(z) = \frac{T_s}{2}\frac{z+1}{z-1}R(z) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

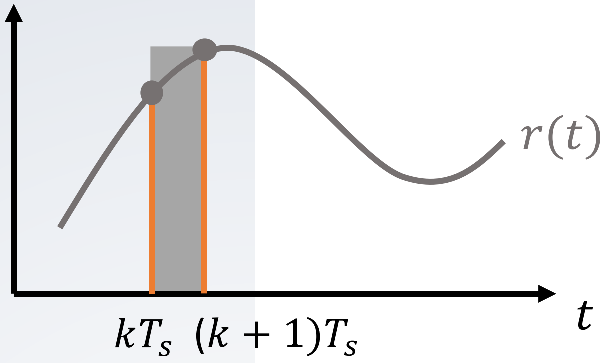
- Comparativamente os três métodos podem visualmente ser interpretados como mostrado nas figuras abaixo.

Área aproximada: $T_s r(kT_s)$



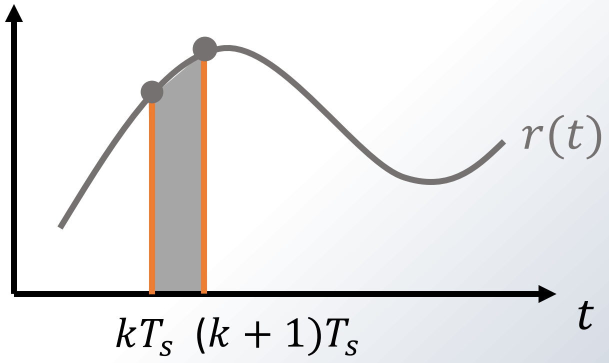
Integração Retangular *Forward*

Área aproximada: $T_s r\big((k+1)T_s\big)$



Integração Retangular *Backward*

Área aproximada: $\frac{T_s}{2}[r(k+1)T_s) - r(kT_s)]$



Integração Trapezoidal

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- MÉTODO DE TUSTIN
  - Tomando o degrau unitário discretizado

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} u(t-kT_s)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT_s} = \frac{1}{1-e^{-sT_s}} \; ; \quad \mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Logo, podemos estabelecer uma relação entre o Plano-s e o Plano-z, sendo $\boldsymbol{z = e^{sT_s}}$.

  - Uma forma de realizarmos este mapeamento é utilizando as aproximações de Padé de primeira ordem

$$e^{sT_s} = \frac{1+\frac{sT_s}{2}}{1-\frac{sT_s}{2}} = z \implies \frac{sT_s}{2}(z+1) = z-1 \implies \boxed{s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$

(INTEGRAÇÃO NUMÉRICA TRAPEZOIDAL)

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- **MAPEAMENTO CASADO DE POLOS E ZEROS**:
  - Neste caso os polos e zeros são mapeados diretamente do plano-s para o plano-z através da relação $\boldsymbol{z = e^{sT_s}}$, sendo $T_s > 0$ o período de amostragem.
  - Procedimento:
    1. Mapear todos os zeros e polos finitos através da relação $z = e^{sT_s}$;
    2. Os zeros $s \to \infty$ são mapeados em $z = -1$
       - Sistema PRÓPRIO : todos os zeros $s \to \infty$ são mapeados em $z = -1$
       - Sistema ESTRITAMENTE PRÓPRIO : um zero $s \to \infty$ é mapeado em $z \to \infty$, os demais em $z = -1$
    3. Ajusta-se o ganho em alguma frequência de interesse, em geral, $C(s)|_{s=0} = C_D(z)|_{z=1}$.

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- Exemplo: Considere o sistema $G(s) = 1/(s+2)$. Desejamos encontrar uma lei de controle por computador que faça com o sistema estabilize com erro nulo à entrada degrau unitário e que tenha tempo de estabilização máximo de 2[s] e overshoot máximo de 16,5%.

Neste caso, $\xi\omega_n \geq 2; \xi \geq 0{,}5$.

$C(s) = \frac{K}{s}\frac{s+a}{s+b} = C_1(s)C_2(s)$.

A equação característica desejada é

$$\Delta_{\mathrm{TARGET}}(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}+\mathrm{p}_1)(\mathrm{s}^2 + 8s + 25)$$

$$F(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+b)(s+2) + K(s+a)}$$

$$\Delta(s) = s^3 + (2+b)s^2 + (2b+K)s + Ka$$

$$\begin{aligned} 2+b &= p_1 + 8 \\ 2b + K &= 8p_1 + 25 \\ Ka &= 25p_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= 10 \\ b &= 16 \\ K &= 73 \\ a &= 3{,}42 \end{aligned}$$

DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

- Neste caso,

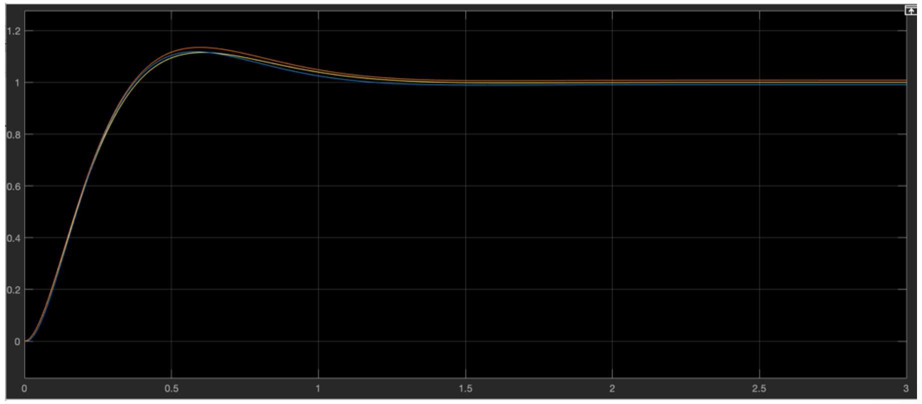
$$C(s) = 73\frac{s + 3{,}42}{s(s + 16)}$$

- A discretização para $T_s = 0{,}01[s]$ leva aos controladores indicados:

$$C_1(s) = \frac{0{,}6864z - 0{,}6634}{z^2 - 1{,}852z + 0{,}8521} \text{ (ZOH)}$$

$$C_2(s) = \frac{0{,}3437z^2 + 0{,}01156z - 0{,}3322}{z^2 - 1{,}852z + 0{,}8519} \text{ (Tustin)}$$

$T_s = 0{,}01[s]$



$T_s = 0{,}1[s]$