

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 24/03/2025.

EES-32

CONTROLE CLÁSSICO II

Equação a Diferenças. Transformada Z.
Função de Transferência Discreta.



Prof. G. W. Gabriel

TÓPICOS

- Sistemas a tempo discreto.
- Equações a diferenças.
- Resolução de equações a diferenças.
- Transformada Z.
- Função de transferência em Z.

EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

■ Sistemas dinâmicos discretos são descritos por **equações a diferenças** do tipo

$$f(y[k+n], \dots, y[k+1], y[k]) = g[k]$$

$$D(y[k]) = g[k], \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$g(k)$ é conhecida $\forall k \in \mathbb{N}$; a solução é desejada em $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, t_f\} \subset \mathbb{N}$.

■ Dados $y[n-1], \dots, y[1], y[0], g[k], \forall k \in \mathbb{N}$, **a solução de (1) será única** se for possível escrever $y[k+n] = \bar{f}(y[k+n-1], \dots, y[k], g[k])$.

EQUAÇÃO A DIFERENÇAS

■ Sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT) excitados por uma entrada $u[\cdot]$ podem ser descritos por

$$\begin{aligned} a_n y[k+n] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] \\ = b_m u[k+m] + \dots + b_1 u[k+1] + b_0 u[k] \end{aligned}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ constante e $a_n \neq 0$, ou ainda

$$D(y[k]) = \sum_{i=0}^n a_i y[k+i]; \quad N(u[k]) = \sum_{i=0}^m b_i u[k+i] \quad (2)$$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

■ A solução genérica de (1)-(2) é dada por

$$y[k] := y_h[k] + y_p[k]$$

Assim,

$$D(y[k]) = D(y_h[k]) + D(y_p[k]) = g[k]$$

$D(y[k]) = 0$ é dita equação homogênea $\rightarrow y_h[k]$ é a solução da homogênea

$D(y[k]) = g(k)$ é dita equação particular $\rightarrow y_p[k]$ é a solução da particular

MÉTODO DO COEFICIENTE A DETERMINAR

■ Dizemos que $\Delta_D(\mu) := a_n\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + a_1\mu_1 + a_0$ é o polinômio característico de $D(\cdot)$ e que $\mu_i, i \in \{1, 2, \dots, s\}$, são as raízes distintas de $\Delta_D(\mu) = 0$.

LEMA – Dada $D(y[k]) = 0$ com $\Delta_D(\mu) = 0$. Se $\mu_i, i \in \{1, \dots, s\}$ são as soluções distintas de $\Delta_D(\mu) = 0$, cada uma com multiplicidade h_i , então a solução de $D(y[k]) = 0$ é

$$y_h[k] = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{h_i} c_{ij} \mu_i^k k^{j-1}$$

■ Se todas as raízes de $\Delta_D(\mu) = 0$ são distintas, então $y_h[k] = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i^k$!

MÉTODO DO COEFICIENTE A DETERMINAR

LEMA – Dada $D(y[k]) = g(k)$ com $N(g(k)) = 0$. Se $\lambda_i, i \in \{1, \dots, m\}$ são as soluções distintas de $\Delta_N(\lambda) = 0$ e não são solução de $\Delta_D(\mu) = 0$, então existem constantes $d_i, i \in \{1, \dots, m\}$, tais que

$$y_p[k] = \sum_{i=1}^m d_i \lambda_i^k$$

É solução de $D(y[k]) = g[k]$.

- Caso alguma das soluções tenha multiplicidade maior que 1, ou seja também solução de $D(y[k]) = 0$, então devemos modificar a solução de forma a ser linearmente independente das demais soluções encontradas.

MÉTODO DO COEFICIENTE A DETERMINAR

■ Considere a equação a diferenças

$$y[k + 2] - y[k] = 3 \cdot 2^k, \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1$$

- Solução da homogênea: $\Delta_D(\mu) = \mu^2 - 1 \Rightarrow \mu = \pm 1 \Rightarrow y_h = c_1(1)^k + c_2(-1)^k$
- Solução da particular: $\Delta_N(\lambda) = \mu - 2 \Rightarrow \mu = 2 \Rightarrow y_p = d(2)^k$
- Utilizando as condições iniciais: $\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1 \quad e \quad c_2 = 0$
- Sendo $y_p = d(2)^k$ solução da eq. a diferenças, $d(2)^{k+2} - d(2)^k = 3 \cdot 2^k \Rightarrow 3d = 3 \Rightarrow d = 1$

MÉTODO DA TRANSFORMADA Z

■ Dada uma função discreta (ou amostrada) $\rightarrow y[k] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

Sua Transformada Z, $Y(z) : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathbb{C}$, é definida por

$$\mathcal{Z}(y) = Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]z^{-k}$$

onde $\mathcal{D}(Y) = \{z \in \mathbb{C} : \exists Y(z)\}$. **(Indica que a soma converge e é finita)**

MÉTODO DA TRANSFORMADA Z

■ Considere que $f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Esta função é tal que

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2z}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^k$$
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2z)^k - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^k$$

Esta função não possui Transformada Z pois $\mathcal{D}(F) = \emptyset$.

MÉTODO DA TRANSFORMADA Z

■ Por outro lado, a Transformada Z de $f[k] = \begin{cases} 0 & , \quad k \in (-\infty, -1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k & , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$ é

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

■ A Transformada Z de $f[k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} & , \quad k \in (-\infty, -1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k & , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$ é

$$F(z) = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^k = -1 + \frac{2}{2 - z} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}z}{(z - 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

MÉTODO DA TRANSFORMADA Z

- Dado que nossos sistemas são causais, restringiremos a definição da Transformada Z de uma função $f[k]$ para

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}$$

- Dado que $F(z)$ é racional com polos p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, seu domínio pode ser expresso por

$$\mathcal{D}(F) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > b\}, \quad b = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |p_i|$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA Z

Sejam $f_1[k]$, $f_2[k]$ e $f[k]$, com transformadas $F_1(z)$, $F_2(z)$ e $F(z)$, respectivamente, com domínios $\mathcal{D}(F_1)$, $\mathcal{D}(F_2)$ e $\mathcal{D}(F)$, e sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{C}^*$.

■ Linearidade:

$$h[k] = c_1 f_1[k] + c_2 f_2[k] \implies H(z) = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$$

■ Deslocamento em k – atraso:

$$h[k] = f[k - l] \implies H(z) = z^{-l} F(z)$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA Z

- Deslocamento em k – avanço:

$$h[k] = f[k + l] \Rightarrow H(z) = z^l \left[F(z) - \sum_{i=0}^{l-1} f[i] z^{-i} \right]$$

- Escalamento

$$h[k] = a^{-k} f[k] \Rightarrow H(z) = F(az)$$

- Valor final

$$\text{Se } 1 \in \mathcal{D}((z - 1)F(z)), \text{ então } \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f[k]$$

- Convolução

$$h[k] = f_1[k] * f_2[k] \Rightarrow H(z) = F_1(z)F_2(z)$$

INVERSA DA TRANSFORMADA Z

- Dada uma função $F(z)$, com domínio $\mathcal{D}(F)$, obter sua Transformada Z significa obter a função $f[k]$, $k \in \mathbb{N}$, de forma que

$$f[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$$

- Exemplo: Obter a transformada inversa de $F(z) = \frac{z-1}{(z-2)^2}$.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z-1}{z(z-2)^2} = -\frac{\frac{1}{4}}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-2)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{z-2} \Rightarrow f[k] = \frac{1}{4}(2)^k + \frac{1}{2}k(2)^k - \frac{1}{4}\delta[k], k \in \mathbb{N}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM Z

- A obtenção da função de transferência de um sistema discreto segue as **mesmas regras** da obtenção da função de transferência de um sistema contínuo, reservadas as diferenças entre a Transformada Z e a Transformada de Laplace.
- Exemplo: Obter a função de transferência do sistema com saída $y[k]$, entrada $u[k]$, descrito pela equação a diferenças

$$y[k + 2] - y[k] = u[k], k \in \mathbb{N}, f[0], f[1]$$

$$z^2 Y(z) - (f[0] + zf[1]) - Y(z) = U(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{1}{z^2 - 1} U(z) + \frac{zf[1] + f[0]}{z^2 - 1}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM Z

- A resposta do sistema, aplicada a Transformada Z, possuirá sempre duas parcelas,
 - Resposta do sistema a condições iniciais nulas;
 - Resposta do sistema a entrada nula.
- A função de transferência corresponde a resposta do sistema a condições iniciais nulas! Sendo representada por

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

