

Prof. Gabriela W. Gabriel
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IEE-S / ITA - Sala 195 - Ramal 5991
ggabriel@ita.br / gabriela.gabriel@gp.ita.br
www.ele.ita.br/~ggabriel

São José dos Campos, 13/04/2025.

EES-32 CONTROLE CLÁSSICO II

Estabilidade de sistemas discretos.



Prof. G. W. Gabriel

TÓPICOS

- BIBO Estabilidade de Sistemas Discretos.
- Método de Tustin com Prewarping.
- Discretização de Requisitos.
- Extensão do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz para Sistemas Discretos.
- Lugar Geométrico das Raízes
- Resposta em Frequência de Sistemas Discretos.



BIBO ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETOS

(BIBO Estabilidade) Um sistema discreto causal descrito pela sua resposta ao impulso $g[k]$ é BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) estável se, e somente se,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| < \infty$$

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETOS

Um sistema discreto com função de transferência $G(z)$ é estável se, e somente se, todos os polos de $G(z)$ encontram-se dentro do círculo de raio unitário.

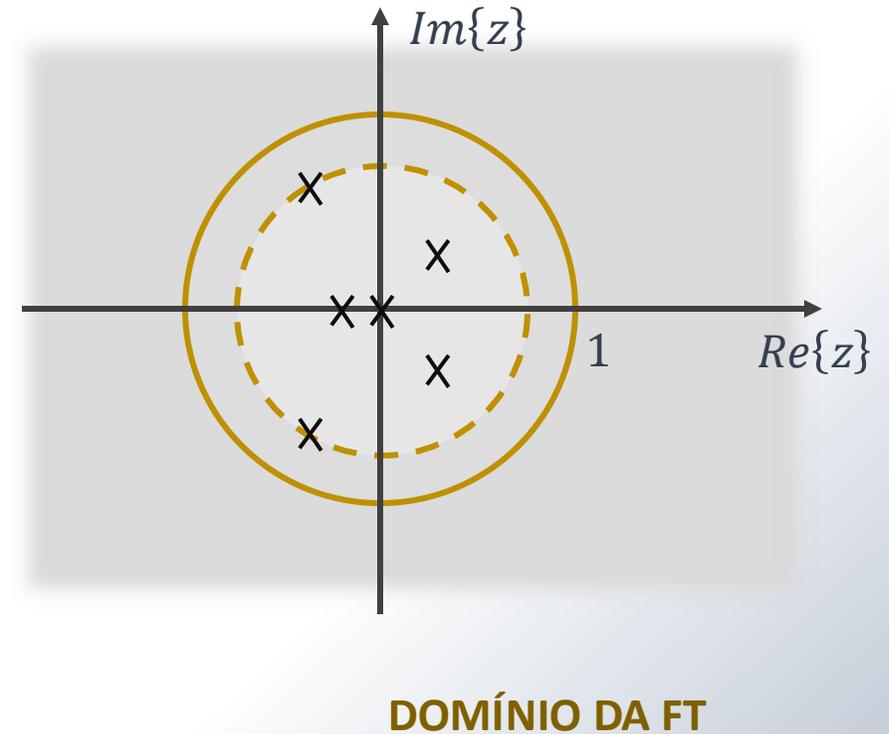
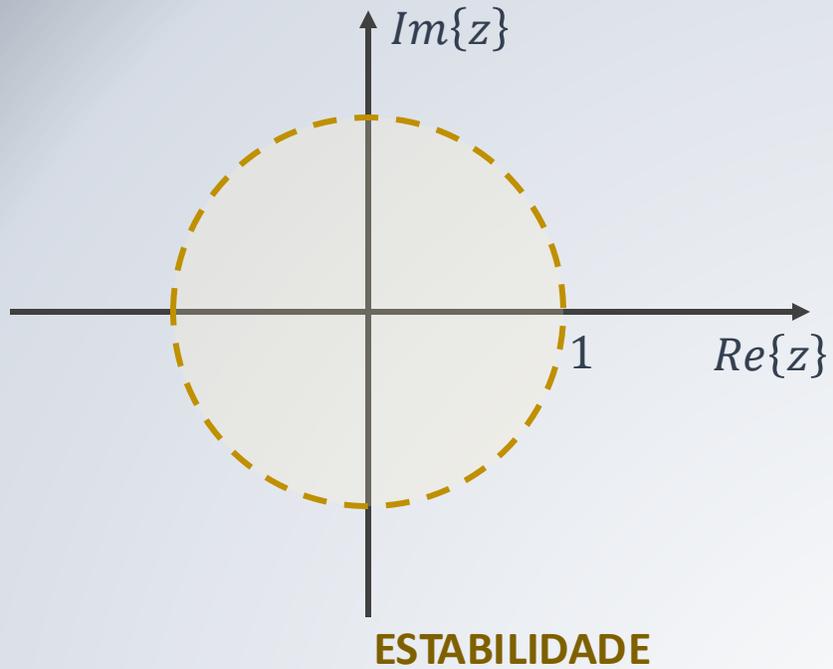
- Neste caso, se $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, são todos polos simples do sistema $G(z)$

$$g[k] = \sum_{i=1}^n a_i (p_i)^k$$

- Então $|p_i| < 1$ garante a convergência da resposta ao impulso de $G(z)$. Por outro lado, o domínio de validade de $G(z)$ é dado por $|z| > \max_i |p_i|$.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETOS

■ Neste caso, estas regiões, no plano complexo, são



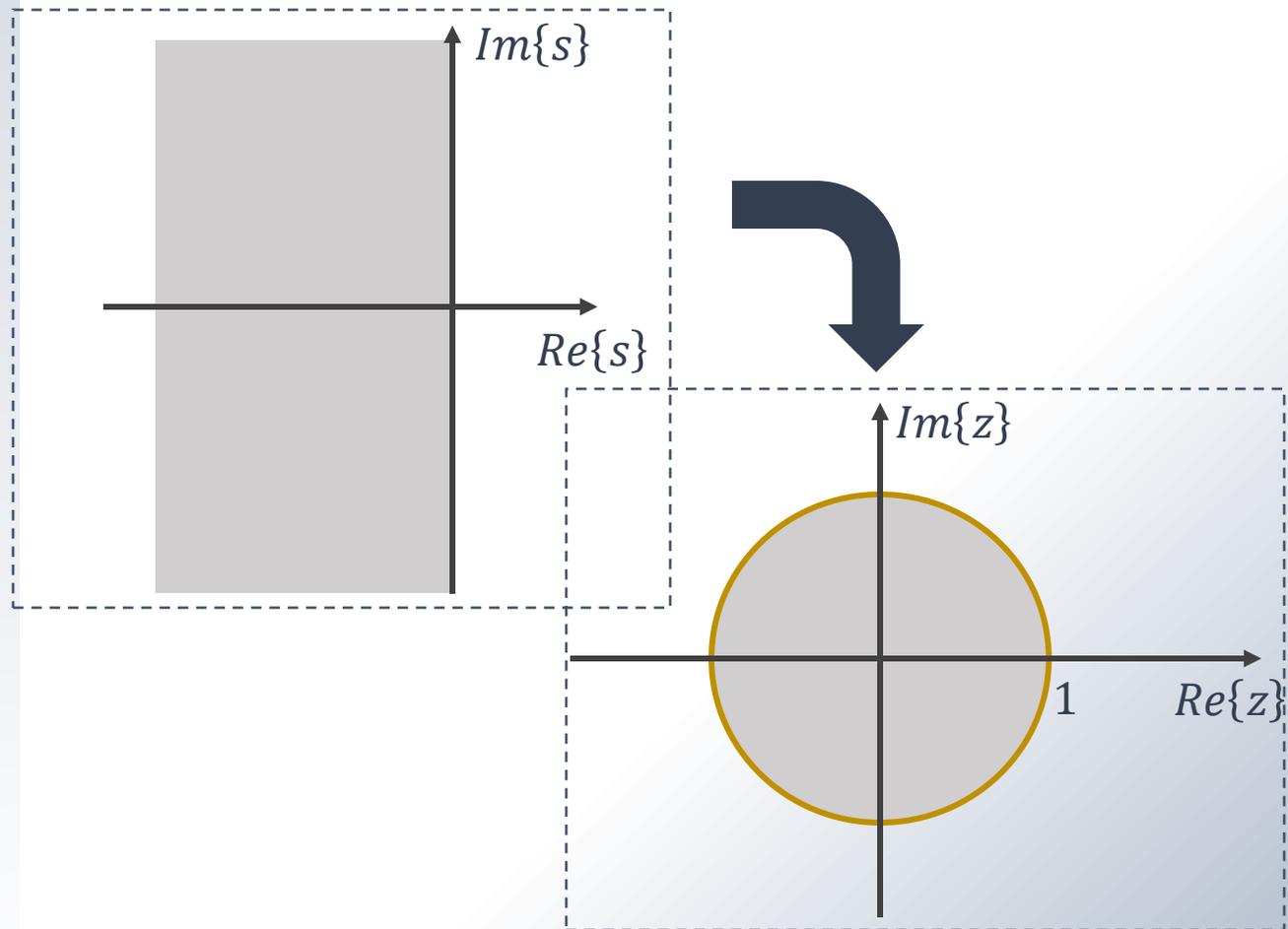
ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS ($s \rightarrow z$)

- Note que, da discretização pelo **Mapeamento Casado de polos e zeros**

$$z = e^{pT}, p = \alpha + \beta j$$

$$z = e^{\alpha T} e^{\beta T j}$$

- Assim, $Re\{s\} < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$
- **Sistema estável em s gera um sistema estável em z .**



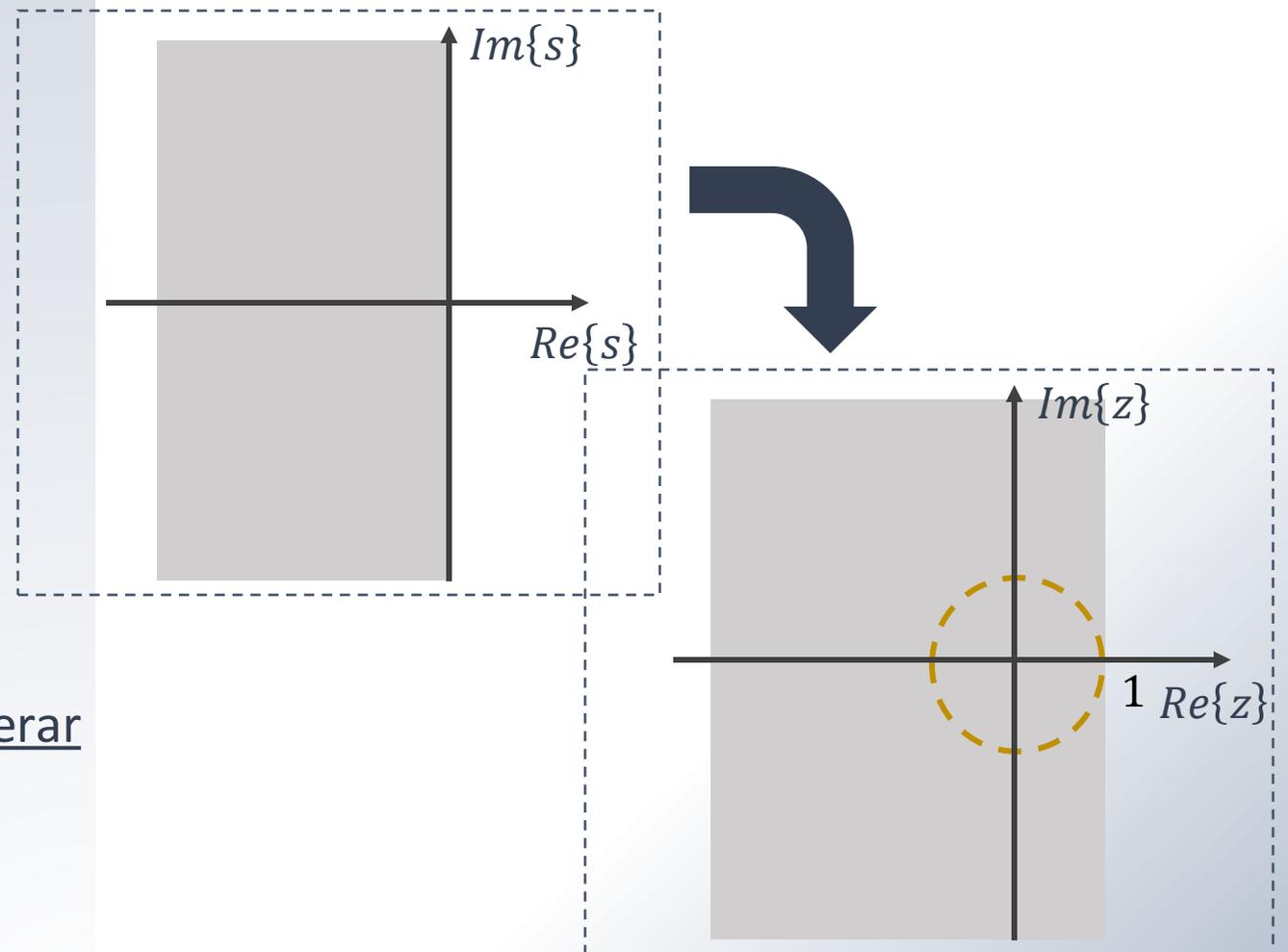
ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS ($s \rightarrow z$)

■ Para a integração **Retangular Forward**

$$s = \frac{1}{T}(z - 1), s = \alpha + \beta j \rightarrow$$
$$z = (T\alpha + 1) + T\beta j$$

$$Re\{s\} < 0 \Leftrightarrow Re\{z\} < 1$$

■ Sistemas **estáveis em s** , podem gerar sistemas **instáveis em z** .



ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS ($s \rightarrow z$)

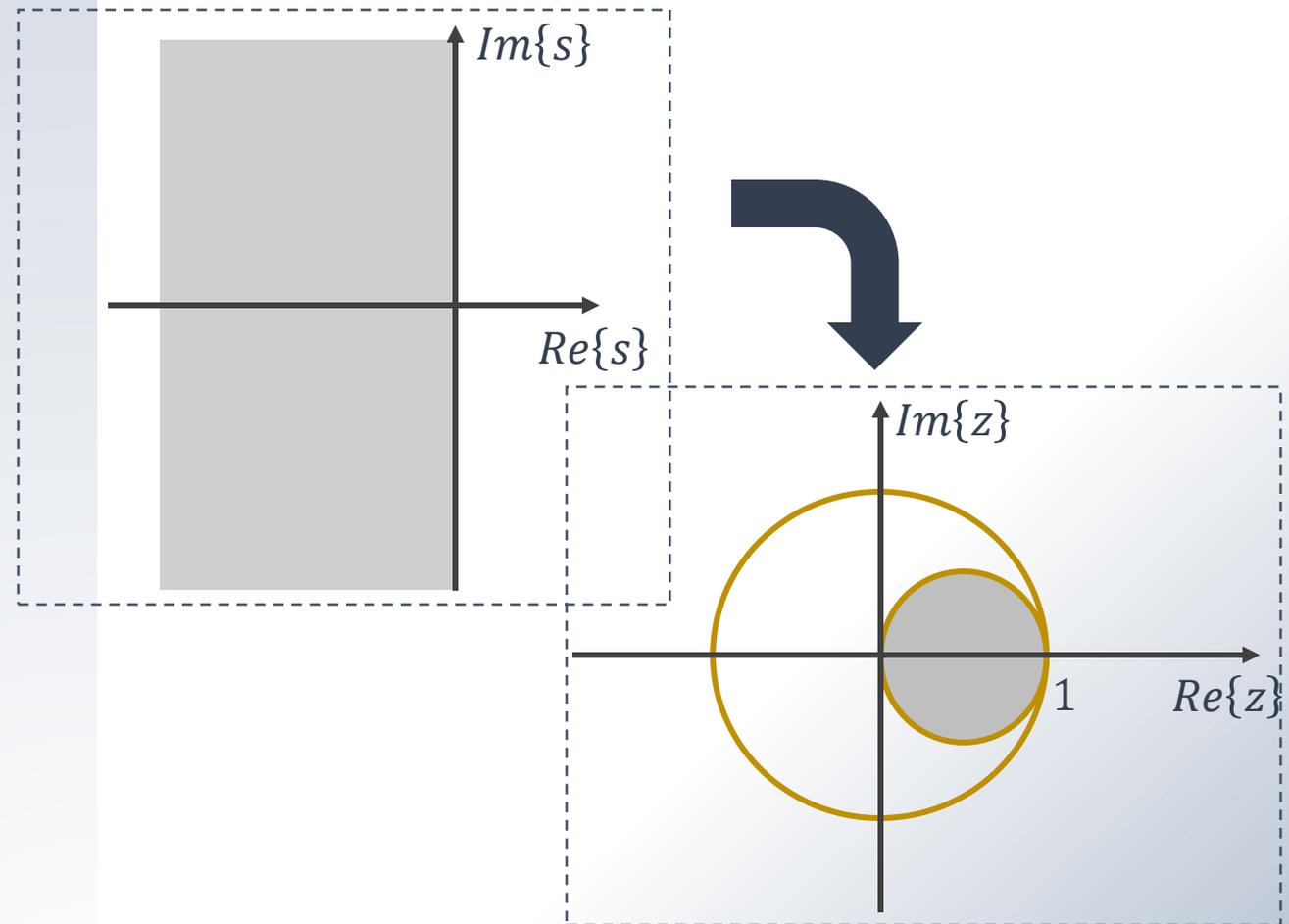
- Segundo a integração **Retangular Backward**

$$s = \frac{1}{T} \frac{(z - 1)}{z}, z = \alpha + \beta j$$

$$s = \frac{1}{T} \frac{((\alpha - 1) + \beta j)}{\alpha + \beta j}$$

$$\text{Re}\{s\} < 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \beta^2 < \frac{1}{4}$$

- Sistemas **estáveis em s** , sempre geram sistemas **estáveis em z** .



ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS ($s \rightarrow z$)

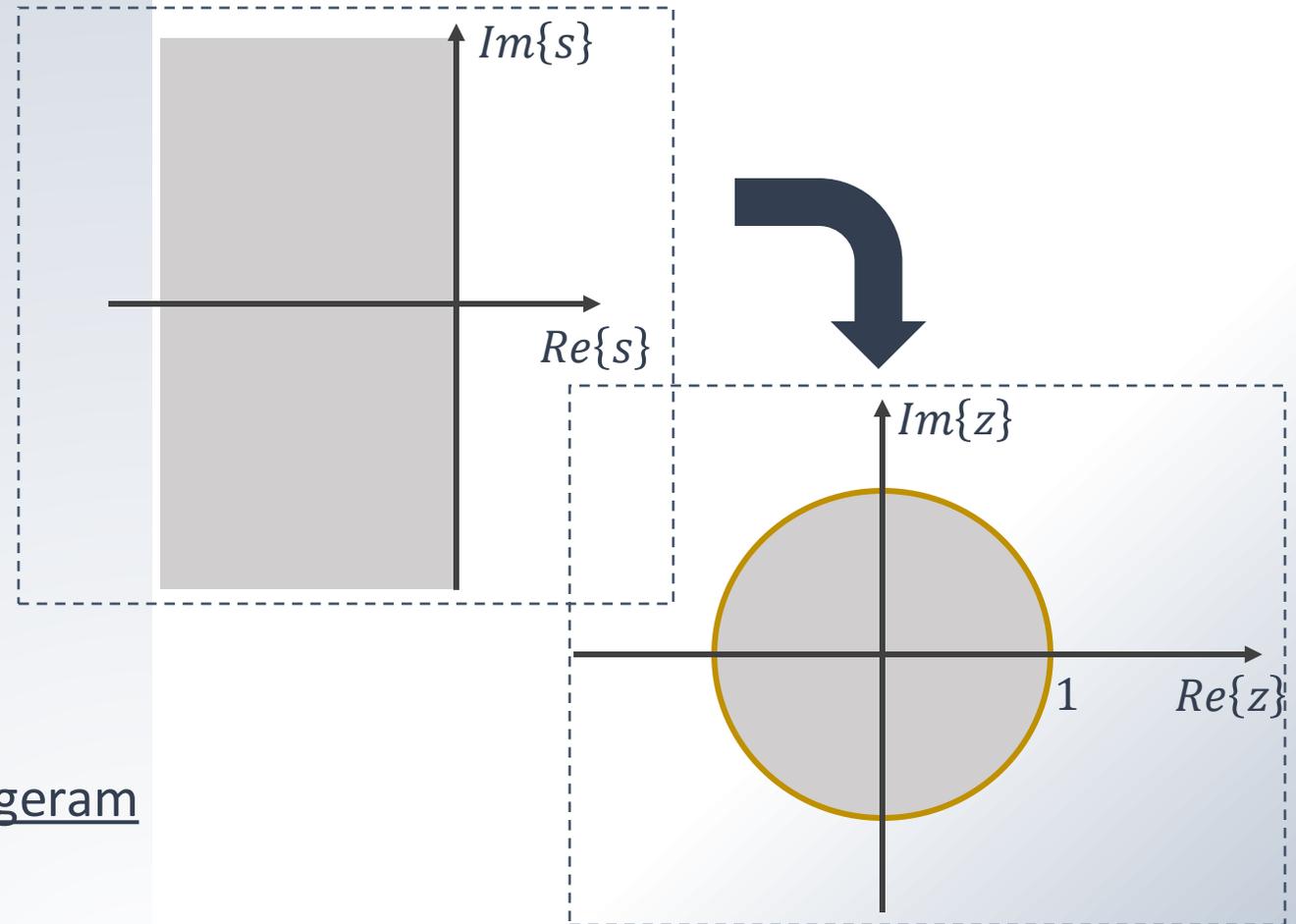
■ Para o Método de Tustin

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}, z = \alpha + \beta j$$

$$s = \frac{2(\alpha-1) + \beta j}{T(\alpha+1) + \beta j}$$

$$\text{Re}\{s\} < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 < 1$$

- Sistemas **estáveis em s**, sempre geram sistemas **estáveis em z**.



ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS

- Quando utilizamos a **aproximação por integração *forward*** devemos **SEMPRE** assegurar a **ESTABILIDADE DO SISTEMA DISCRETIZADO**.

$$|z| < 1 \Rightarrow |1 + Ts| < 1, \text{ sendo } s = \frac{1}{T}(z - 1) \longrightarrow$$

$$T < \frac{2a}{a^2 + b^2}$$

- Sistemas com polos reais $\longrightarrow T < \frac{2}{a}$

- Sistemas de segunda ordem $a = \xi\omega_n$ e $b = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \longrightarrow T < \frac{2\xi}{\omega_n}$

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS

- Para **frequências próximas da frequência de Nyquist**, é recomendável o uso de métodos que provoquem menos distorções no mapeamento plano-s / plano-z.
- O método de Tustin não é adequado para **aproximar funções que contenham derivadas puras**, dado que levará a uma resposta oscilatória devido ao polo em $z = -1$.



ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETIZADOS

- Tanto o **método de Tustin** quanto o **mapeamento casado de polos e zeros** geram **funções próprias**. Caso indesejado deve-se utilizar o mapeamento casado que gera funções estritamente próprias.
- Embora o **método de Tustin** seja exato no mapeamento $Re\{s\} < 0$ em $|z| < 1$, há uma **distorção (*warping*)** no domínio da frequência. Para isso, utiliza-se a **técnica de *prewarping*** nas frequências de interesse.

MÉTODO DE TUSTIN COM PREWARPING

- A **resposta em frequência de $G_d(z)$** é calculada a partir de $G_d(e^{j\omega T})$, com $s = j\omega$ e $G_d(z)$ a função discretizada de $G(s)$.
- Aplicando-se o método de Tustin para $s = j\omega_c$ e $z = e^{j\omega_d T}$,

$$\omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right)$$

- Assim, podemos implementar o método de **Tustin com Prewarping** através da relação

$$\frac{2}{T} = \frac{\omega_c}{\tan\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)},$$

para ω_c uma frequência de interesse!

MÉTODO DE TUSTIN COM PREWARPING

- Desta forma o método de **Tustin com Prewarping** consiste em utilizar a relação

$$s = \frac{\omega_c}{\tan\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1} \text{ com } \omega_c \text{ uma frequência de interesse!}$$

- Exemplo: Estudar os sistemas

a) $G(s) = 9 \frac{s+1}{s+3}, T = 0,2 \text{ s}$

b) $G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}, T = 0,25 \text{ s.}$

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

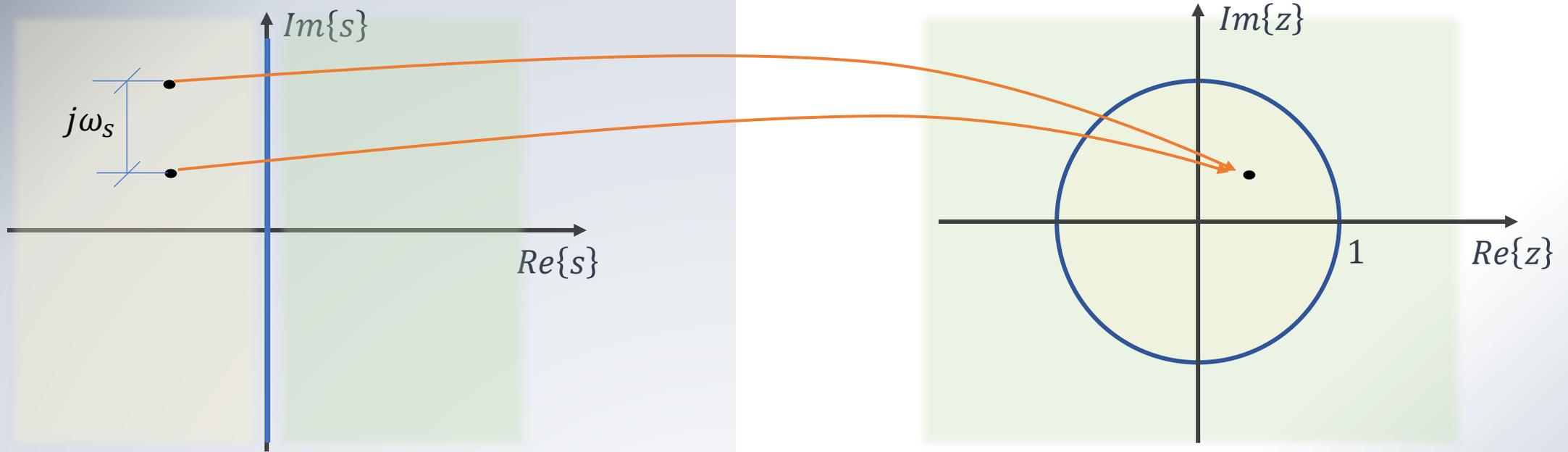
- Como visto anteriormente, a relação entre a Transformada de Laplace e a Transformada Z, dá-se através da relação

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi k)}$$

onde $s = \sigma + j\omega$. Para este mapeamento é verdadeiro que:

- 1) Pontos sobre $s = j\omega$ são mapeados sobre a circunferência de raio unitário;
- 2) Pontos de $Re\{s\} < 0$ são mapeados em $|z| < 1$;
- 3) Pontos de $Re\{s\} > 0$ são mapeados em $|z| > 1$;
- 4) Os pontos do plano que diferem entre si de uma múltiplo inteiro da frequência de amostragem $\omega_s = 2\pi/T_s$, são mapeados em um mesmo ponto do plano-z.

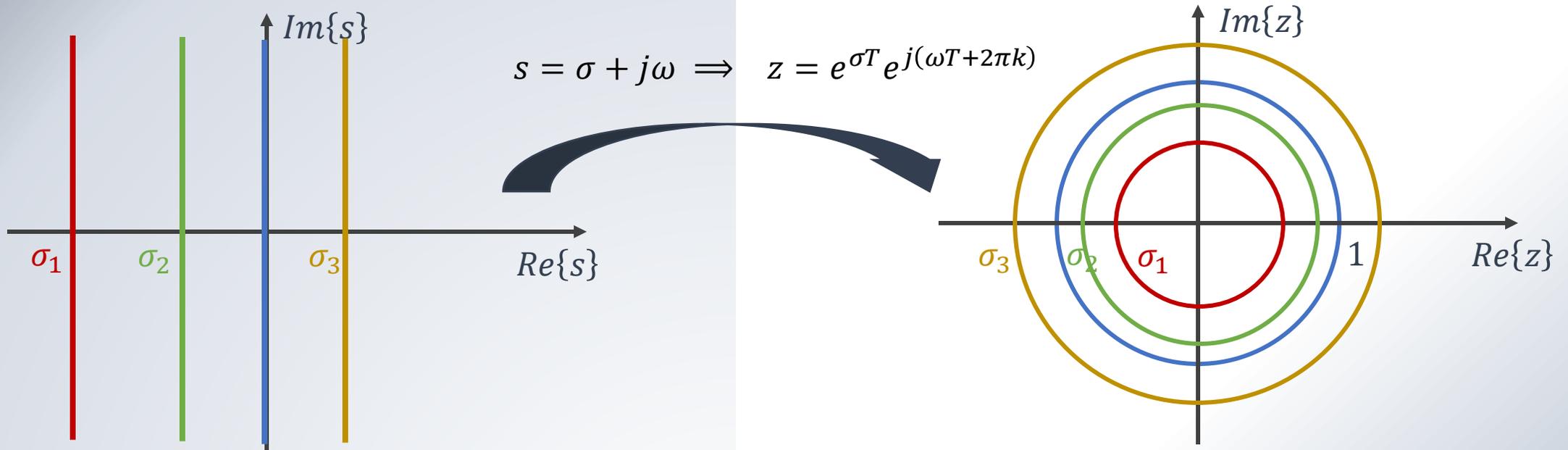
DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS



- Destas relações podemos estabelecer **relação entre os requisitos de desempenho especificados para $G(s)$ no domínio do plano-z.**

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

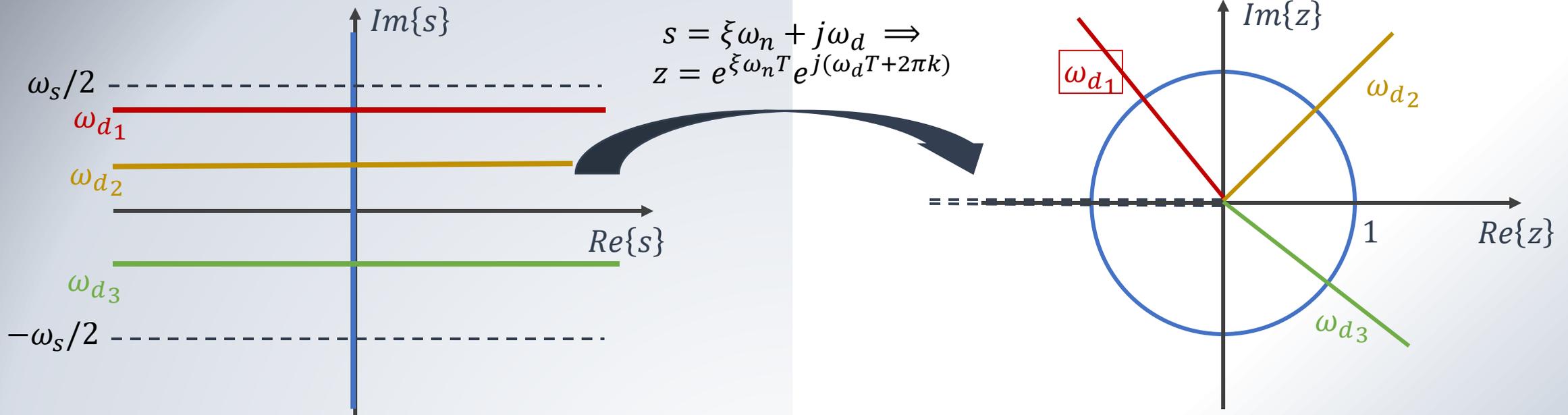
- Parâmetro $\sigma = \xi\omega_n$ (mesma taxa de decaimento)



- No plano-z, σ constante tornam-se circunferências concêntricas.

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

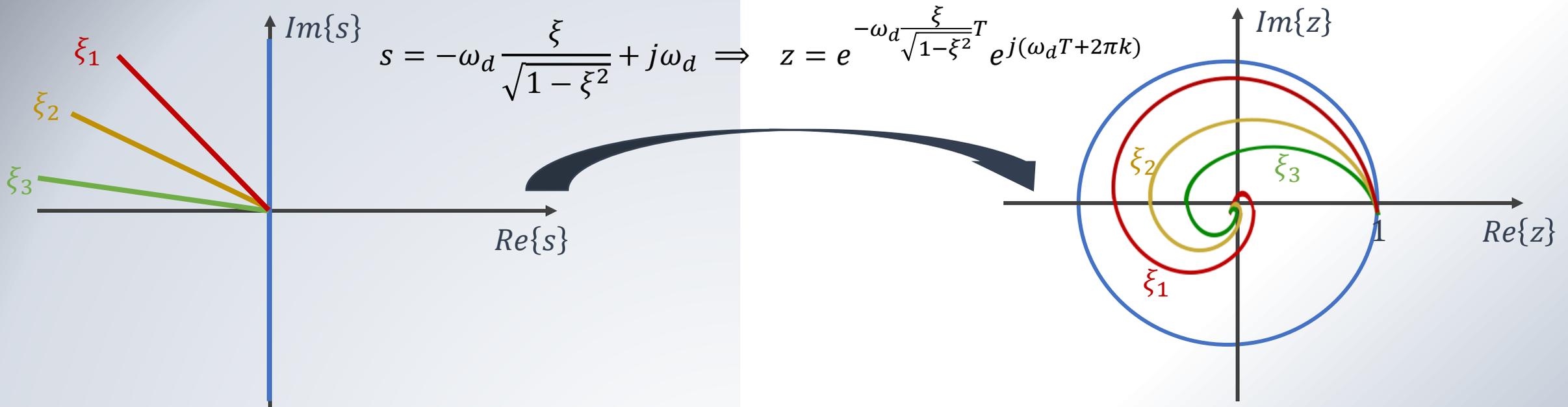
■ Parâmetro ω_d (mesmo tempo de pico)



■ No plano-z, ω_d constante tornam-se semiretas radiais.

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

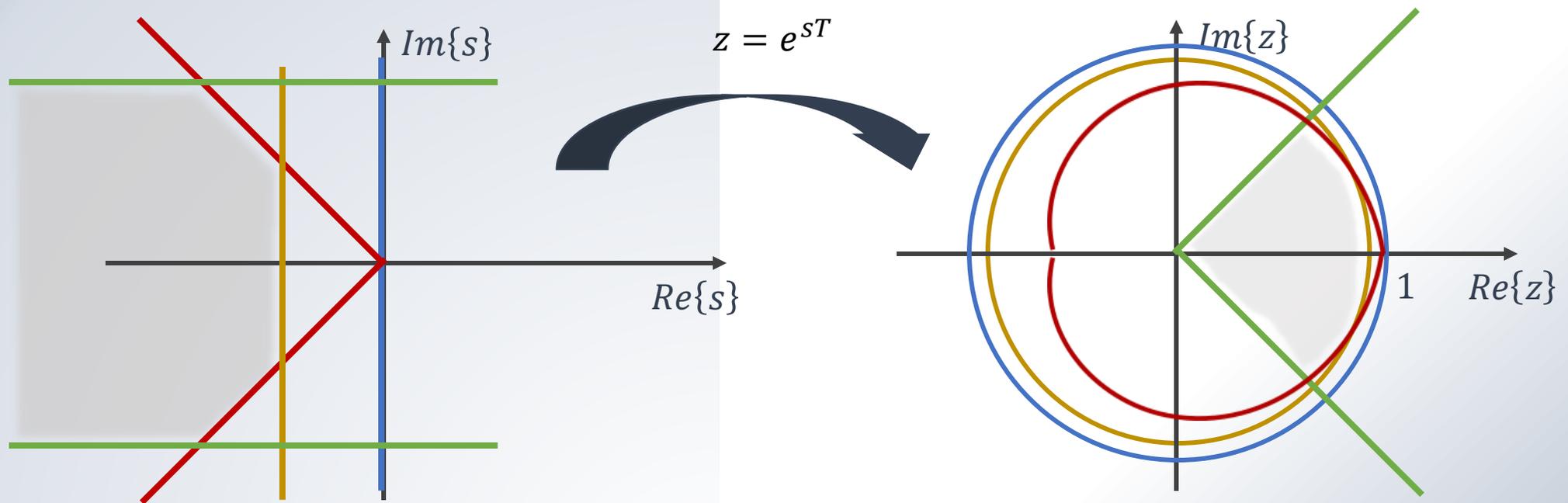
- Parâmetro ξ (mesmo sobressinal)



- No plano-z, aumentando-se ω_d obtém-se trajetórias cujo módulo diminui e a fase aumenta.

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

- Desta forma, há uma relação entre a região na qual os polos do sistema no plano-s deverão estar e a região que conterà os polos do sistema no plano-z.



DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

■ Erro em regime estacionário

■ Tipo do sistema

Um sistema é discreto é do tipo N se ele possuir **N polos em $z = 1$** .

Assim,

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^N} \frac{B(z)}{A(z)}; \quad A(1) \neq 0; \quad B(1) \neq 0$$

$N = 0$ \longrightarrow $G(z)$ é do tipo 0

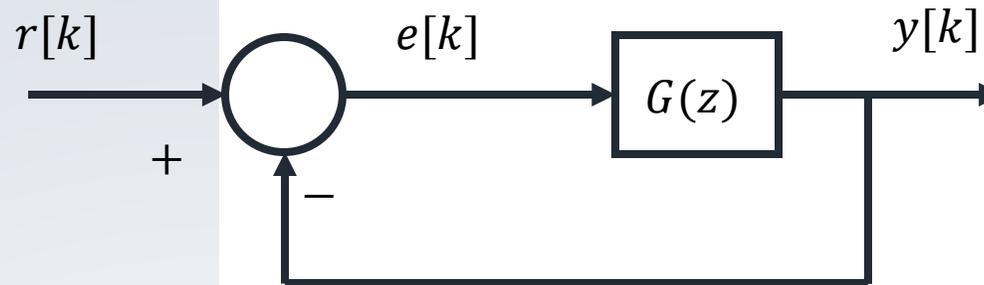
$N = 1$ \longrightarrow $G(z)$ é do tipo 1

...

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

■ Erro em regime estacionário

■ Seja o sistema



■ O erro em regime estacionário é dado por $E(z) = \frac{1}{1+G(z)} R(z)$. Assim,

$$e_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \right]$$

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

■ Erro estático de posição (definido em relação à entrada degrau unitário)

- Para $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, a saída em regime estacionário será

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

sendo $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(1-z^{-1})^N} \frac{B(z)}{A(z)}$ (Constante de erro estático de posição).

- Assim, $e_{ss} \rightarrow 0$ somente se $K_p \rightarrow \infty$, que ocorrerá se o sistema for pelo menos do tipo 1.

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

■ **Erro estático de velocidade** (definido em relação à entrada rampa unitária)

■ Para $R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, a saída em regime estacionário será

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1-z^{-1})G(z)} = \frac{1}{K_v}$$

sendo $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T(1-z^{-1})^{N-1}} \frac{B(z)}{A(z)}$ (Constante de erro estático de velocidade).

■ Assim, $e_{ss} \rightarrow 0$ somente se $K_v \rightarrow \infty$, que ocorrerá se o **sistema for pelo menos do tipo 2**.

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

- **Erro estático de aceleração** (definido em relação à entrada parábola unitária)

- Para $R(z) = \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$, a saída em regime estacionário será

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1-z^{-1})^2 G(z)} = \frac{1}{K_a}$$

sendo $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T^2(1-z^{-1})^{N-2}} \frac{B(z)}{A(z)}$ (Constante de erro estático de aceleração).

- Assim, $e_{ss} \rightarrow 0$ somente se $K_a \rightarrow \infty$, que ocorrerá se o **sistema for pelo menos do tipo 3**.

DISCRETIZAÇÃO DE REQUISITOS

■ Erro em regime estacionário

	Erro Estacionário de Posição	Erro Estacionário de Velocidade	Erro Estacionário de Aceleração
Tipo 0	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$
Tipo 3	0	0	0

EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

- Para a estabilidade do sistema discreto requer-se que $|z| < 1$. A **transformação bilinear**

$$z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

permite que o mapeamento seja

$$\operatorname{Re}\{s\} < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

que independe do período de amostragem.

EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

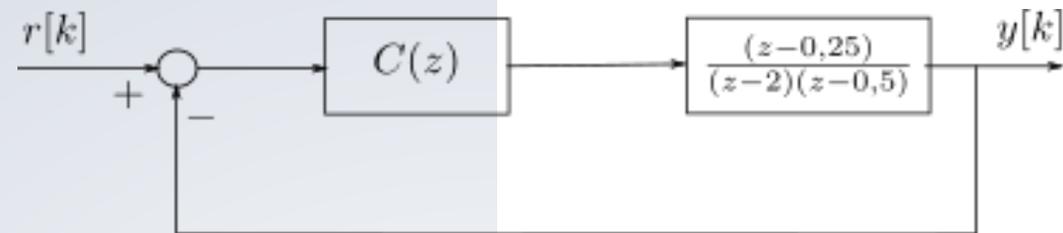
A equação característica discreta $\Delta(z) = 0$ terá todas as suas raízes localizadas no interior do círculo unitário ($|z| < 1$), se

$$\Delta_m(s) = \Delta\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = 0$$

possuir todas suas raízes no semiplano esquerdo complexo.

EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

- Exemplo: Projeto o ganho K que torna o sistema discreto realimentado estável.



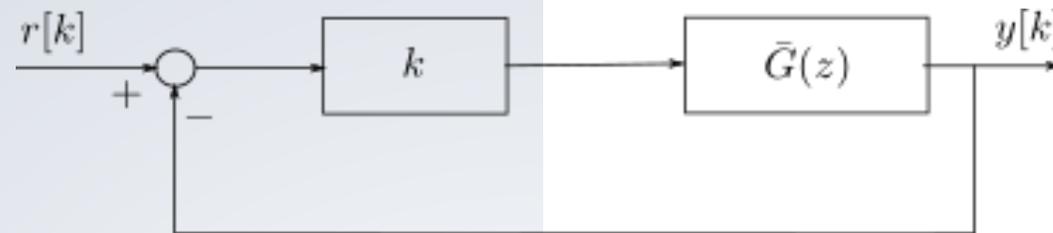
- Para este sistema a equação característica é

$$\Delta(z) = (z - 2)(z - 0,5) + k(z - 0,25) = 0$$

- Utilizando Routh-Hurwitz com a transformação bilinear, obtem-se K .

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

- Para o caso de sistemas discretos, o mesmo procedimento para a construção do LGR pode ser adotado, uma vez que a equação característica de



é idêntica à equação característica do caso contínuo, sendo dada por

$$\Delta(z) = 1 + k\bar{G}_d(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{G}_d = \frac{N_d(z)}{D_d(z)} = -\frac{1}{k}$$

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

CONDIÇÃO DE MÓDULO

$$|\bar{G}_d(z)| = \frac{1}{\kappa}$$

CONDIÇÃO DE FASE

$$\angle \bar{G}_d(z) = (2K + 1)\pi, K \in \mathbb{N}$$

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

REGRA 1: m ramos do LGR começam nos polos de $\bar{G}_d(z)$ e terminam em seus m zeros, com $n \geq m$.

REGRA 2: $n - m$ ramos do LGR tendem para ∞ de forma assintótica a $n - m$ retas, sendo

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad \theta_K = \frac{2K - 1}{n - m} \pi, K = 1, 2, \dots, n - m$$

σ é o coeficiente linear e θ_K , o coeficiente angular das assíntotas.

REGRA 3: Todos os pontos do eixo real À ESQUERDA de uma quantidade ÍMPAR de polos e zeros pertencem ao LGR.

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

REGRA 4: O LGR é SIMÉTRICO em relação ao EIXO REAL. O cruzamento de seus ramos com o eixo imaginário pode ser obtido por Routh-Hurwitz após aplicado a $\Delta(z) = 0$ a transformação bilinear $z = (1 + s)/(1 - s)$.

REGRA 5: O CRUZAMENTO DE RAMOS do LGR pode ser obtido fazendo

$$D_d(z)'N_d(z) - N_d(z)'D_d(z) = 0$$

REGRA 6: ANGULOS DE SAÍDA E CHEGADA do LGR podem ser determinados através da CONDIÇÃO DE ÂNGULO.

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

■ Exemplo: Esboçar o LGR para o sistema descrito por

$$\bar{G}(z) = \frac{0,368(z + 0,717)}{(z - 1)(z - 0,368)}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(s) &= 1 + k\bar{G}(s) \\ &= (2,736 - 0,104k)s^2 + (1,264 - 0,5277k)s + 0,6319k\end{aligned}$$

■ Solução:

REGRA 1 – Há 2 ramos no LGR sendo 1 deles assintótico.

REGRA 2 – A assíntota parte de $\sigma = 1 + 0,368 + 0,717 = 2,085$ com ângulo de $\theta = 180^\circ$.

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

REGRA 3 – Pertencem ao LGR, os pontos compreendidos entre $] -\infty, -0,717]$ \cup $[0,368,1]$.

REGRA 4 – Pontos de cruzamento com a circunferência de raio unitário.

$$(2,736 - 0,104k)s^2 + (1,264 - 0,5277k)s + 0,6319k$$

s^2	$(2,736 - 0,104k)$	$0,6319k$
s^1	$(1,264 - 0,5277k)$	
s^0	$0,6319k$	

$$1,264 - 0,5277k = 0$$
$$k = 2,3953$$



$$2,4869s^2 + 1,5136 = 0$$

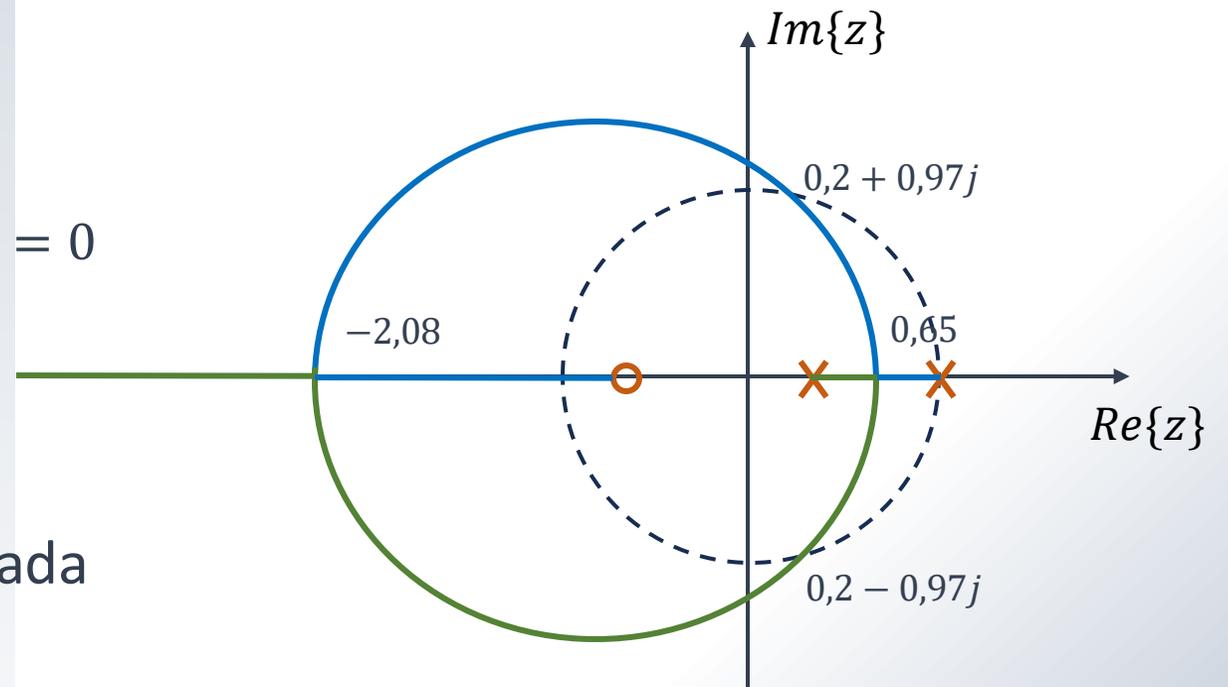
$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \rightarrow z = 0,2432 \pm 0,97j$$

LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES (LGR)

REGRA 5 – Cruzamento entre ramos:

$$(z + 0,717)(2z - 1,368) - (z - 1)(z - 0,368) = 0$$
$$z^2 + 1,434z - 1,3489 = 0$$
$$z = -2,0819; \quad z = 0,6479$$

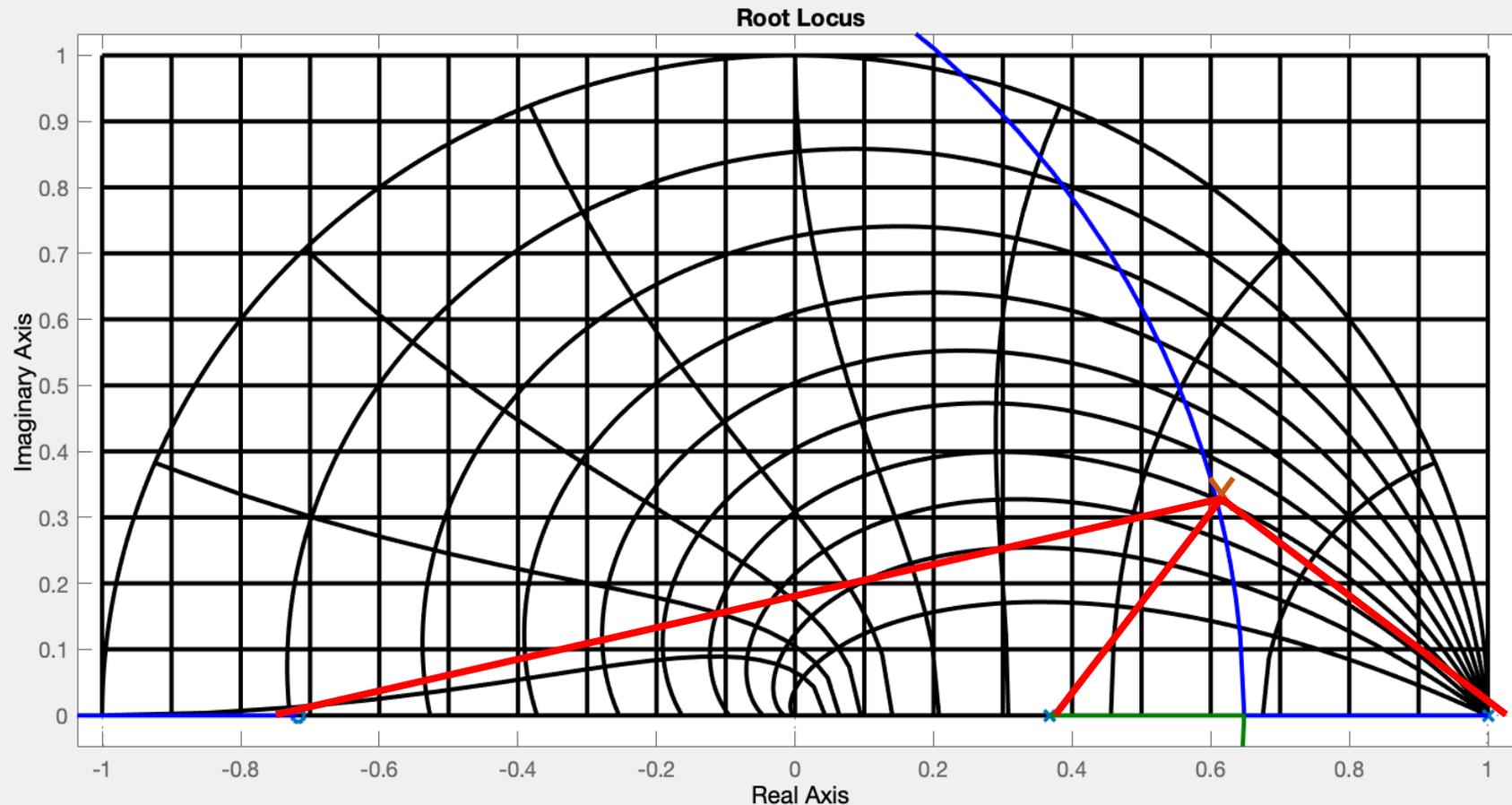
REGRA 6 – Ângulos de partida e chegada nos polos e zeros: 0 ou π .



PROJETO UTILIZANDO O LGR

- Analogamente como realizado para os sistemas contínuos, também é possível realizar projeto de controle para sistemas discretos utilizando o LGR.
- Para isso, deve-se traduzir os requisitos do sistema contínuo para o domínio discreto.
- Exemplo: Projetar um controlador do tipo proporcional para que o sistema realimentado do exemplo anterior tenha overshoot máximo de 10%.

PROJETO UTILIZANDO O LGR



$$\xi = 0:0.1:1$$

$$\omega_n = 0:\frac{\pi}{8}:\pi$$

Projeto:

$$k = \frac{0,54 * 0,4}{1,44 * 0,368}$$

$$k = 0,4$$