EES-01/2011 – Prova 3 – Gabarito

Questão 1:

Tabela de Routh

s^4	k-3	k-a-1	k-a+1
s^3	k-3	2-a	
s^2	k-a-1-2+a = k-3	k-a+1	
s^1	2-a-k+a-1=1-k	0	
s^0	k-a+1		

Para que não haja troca de sinal na 1a. coluna:

k-3 > 0, 1-k >0 e k-a +1 > 0

k>3, k<1 e k>a+1 → inconsistência, pois k não pode ser < 1 e > 3 ao mesmo tempo! **{Até aqui 0,4 da questão}**

ou

k-3 < 0, 1-k <0 e k-a +1 < 0

k < 3, k > 1, a > k +1. → **1 < k < 3 e a > k + 1.** **{Mais 0,4 da questão}**

Há ainda outra possibilidade, fazer k = 3 elimina os termos s^3 e s^4 e o polinômio do denominador fica: $(2 – a)s^2 + (2 – a)s + 4 – a$

Então precisamos ter

(2 – a) > 0 e 4 – a > 0 → **a < 2** **{0,1 da questão}**

Ou

(2 – a) < 0 e 4 – a < 0 → **a > 4.** **{0,1 da questão}**

Poderíamos considerar ainda o caso k=3 e a = 2, em que o sistema se tornaria apenas um ganho.

Resposta completa:

{1 < k < 3 e a > k + 1 } ou { k = 3 e a < 2} ou { k = 3 e a > 4}.

O caso {k = 3 e a = 2} pode ou não ser considerado.

Questão 2:

Há pelo menos 3 maneiras distintas para resolver essa questão, todas válidas e corretas. Duas delas envolvem primeiro encontrar Y(z) em função de A, e a partir de Y(z) pode-se encontrar y[k] em função de A realizando expansão em frações parciais ou realizando a divisão dos polinômios do numerador e do denominador de Y(z), e pegando o coeficiente de z^{-1}

Mas provavelmente a maneira mais simples seja utilizar a equação a diferenças que corresponde à função de trasferência de R(z) para Y(z).

$$T(z)=\frac{AG(z)}{1+AG(z)}=\frac{Az^2}{z^2-0{,}5z+0{,}8+Az^2}=\frac{Az^2}{(A+1)z^2-0{,}5z+0{,}8}=\frac{A}{(A+1)-0{,}5z^{-1}+0{,}8z^{-2}}$$

E a equação a diferenças correspondente é:

$(A+1)\,y[k] = Au[k] + 0{,}5y[k-1] - 0{,}8y[k-2]$

Ou

$y[k] = (Au[k] + 0{,}5y[k-1] - 0{,}8y[k-2])/(A+1)$

Para o degrau unitário e considerando condições iniciais nulas ($y[-1] = y[-2] = 0$) temos:

$y[0] = (Au[0] + 0{,}5y[-1] – 0{,}8y[-2])/(A+1) = (A/A+1)$

E

$y[1] = (Au[1] + 0{,}5y[0] – 0{,}8y[-1])/(A+1) = [A+0{,}5(A/A+1)]/(A+1)$

Portanto

$0{,}945 = [A+0{,}5(A/A+1)]/(A+1)$ Ou $(A+1)^2 0{,}945 = A(A+1)+0{,}5A$

Ou $0{,}945\,A^2 + 1{,}89\,A + 0{,}945 = A^2 + 1{,}5A$ Ou ainda $0{,}055\,A^2 - 0{,}39\,A - 0{,}945 = 0$

$55\,A^2 - 390\,A - 945 = 0 \rightarrow A = (390 \pm 600) / 110. \rightarrow A = 9$ ou $A = -12/11$.

É preciso agora verificar a estabilidade do sistema para esses 2 valores de A.

O denominador da função de transferência em malha fechada é: $(A+1)z^2 - 0{,}5\,z + 0{,}8$.
Com $A = 9 \rightarrow 10z^2 - 0{,}5\,z + 0{,}8 = 0$, ou $z^2 - 0{,}05\,z + 0{,}08 = 0$, raízes em $0{,}025 \pm 0{,}28j$, dentro do círculo unitário, estável.
Com $A = -12/11 \rightarrow -1/11z^2 - 0{,}5\,z + 0{,}8 =$, ou $z^2 + 5{,}5\,z - 8{,}8 = 0$, raízes em -6,8 e 1,2, fora do círculo unitário, instável.
Portanto $A = 9$ **{0,6 da questão}**
E $y[0] = (A/A+1) = 0{,}9$. **{0,4 da questão}**

Questão 3:
a) Divindo a equação a diferenças por 4 temos: $y[k] = 6u[k] + 0{,}25y[k\text{-}2]$
E fazendo a transforçada Z: $Y(z) = 6U(z) + 0{,}25z^{-2}Y(z)$

Portanto: $G(z)=\dfrac{6}{1-0{,}25\,z^{-2}}=\dfrac{6z^2}{z^2-0{,}25}$ **{0,3 da questão}**

Para $u[k]$ degrau unitário: $Y(z)=\dfrac{6z^3}{(z+0{,}5)(z-0{,}5)(z-1)}$

Expandindo em frações parciais: $Y(z)=z\left(\dfrac{6z^2}{(z+0{,}5)(z-0{,}5)(z-1)}\right) =$

$$z\left(\frac{A}{(z+0{,}5)}+\frac{B}{(z-0{,}5)}+\frac{C}{(z-1)}\right) = z\left(\frac{1}{(z+0{,}5)}+\frac{-3}{(z-0{,}5)}+\frac{8}{(z-1)}\right)$$

$$Y(z)=\frac{z}{(z+0{,}5)}-3\frac{z}{(z-0{,}5)}+8\frac{z}{(z-1)}$$

Portanto $y[k] = 8 + (-0{,}5)^k - 3(0{,}5^k)$ **{0,3 da questão (note que há diversas maneiras de se escrever essa mesma expressão, uma vez que $(-0{,}5)^k = -0{,}5(-0{,}5)^{k-1} = -2(-0{,}5)^{k+1}$)}**

b) $T(z)=\dfrac{AG(z)}{1+AG(z)}=\dfrac{6Az^2}{z^2-0{,}25+6Az^2}=\dfrac{6Az^2}{(1+6A)z^2-0{,}25}$

$$DenT(z)=(1+6A)z^2-0{,}25$$

E $DenT(z)=0$ quando $(1+6A)z^2-0{,}25=0$ ou $z^2=\dfrac{0{,}25}{(1+6A)}$.

O sistema será estável se
$1+6A > 0{,}25$ ou se $1+6A < -0{,}25$
$6A > -0{,}75$ ou $6A < -1{,}25$
$A > -0{,}125$ ou $A < -0{,}2081$ **{0,4 da questão}**

Questão 4:
{Cada sub-item correto vale 0,1 da questão e o item d) Vale mais 0,1.}
Para os itens (a), (b) e (c), basta calcular as raízes em função de A e verificar se eles estão dentro ou fora do círculo unitário para $A = 1$, 2 e 3.

a)	1: estável	2: limiar ou instável	3: instável
b)	1: instável	2: instável	3: instável
c)	1: estável	2: estável	3: estável

d) A diferença qualitativa é um atraso. O sistema do item (b) tem um atraso unitário com relação ao sistema do item (c) o sistema do item (a) tem um atraso unitário com relação ao sistema do item (b).