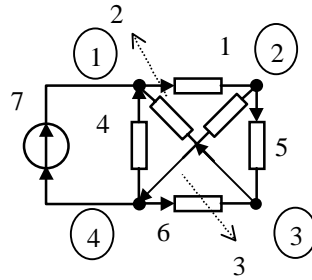
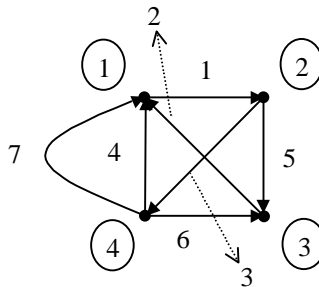


Solução do exercício 9 (c) - Capítulo 2

Após rotular nós e ramos do circuito, obtém-se:



O dígrafo associado é



Como o objetivo é todas as correntes de ramo e tensões nodais deste circuito precisam ser consideradas as equações oriundas da LKC e LKT, bem como a definição dos elementos de circuitos dos ramos. Assim é conveniente determinar a matriz de incidência:

$$A_a = \begin{matrix} \text{ramos} \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \text{nó 1} & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \text{nó 2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{nó 3} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \text{nó 4} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \rightarrow A$$

As duas equações das Leis de Kirchhoff são:

$$A_i = 0$$

$$A^T e - v = 0$$

As equações relativas aos ramos com resistores são:

$$v_j = R_j i_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

Além disto o valor da fonte de corrente i_7 é conhecido. Chamando este valor de i_0 tem-se:

$$i_7 = i_0$$

Estas equações são convenientemente escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -I_{7 \times 7} & A^T & 0_{7 \times 7} \\ M_1 & 0_{6 \times 3} & -M_2 \\ 0_{1 \times 7} & 0_{1 \times 3} & N \\ 0_{3 \times 7} & 0_{3 \times 3} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ 0_{6 \times 1} \\ i_0 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

Com

$$M_1 = [I_{6 \times 6} \quad 0_{6 \times 1}]$$

$$N = [0_{1 \times 6} \quad 1]$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução desejada é:

$$\begin{bmatrix} v \\ e \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{7 \times 7} & A^T & 0_{7 \times 7} \\ M_1 & 0_{6 \times 3} & -M_2 \\ 0_{1 \times 7} & 0_{1 \times 3} & N \\ 0_{3 \times 7} & 0_{3 \times 3} & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ 0_{6 \times 1} \\ i_0 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Para valores dados dos resistores e de i_0 , pode determinar-se esta expressão usando uma ferramenta de cálculo matricial adequada, por exemplo MATLAB®. Uma sequência de comandos MATLAB® para este cálculo dados $R_1 = \dots = R_6 = 1$ [Ω] e $i_0 = 1$ [mA] é a seguinte:

```
%
% Matriz de incidencia reduzida
%
A=[1 -1 0 -1 0 0 -1;
   -1 0 1 0 1 0 0;
   0 1 0 0 -1 -1 0];
%
% Outras matrizes para R1=...=R6=1 Ohm
%
M1=[eye(6) zeros(6,1)];
M2=[eye(6) zeros(6,1)];
N=[zeros(1,6) 1];
T=[-eye(7) A' zeros(7,7);
   M1 zeros(6,3) -M2;
   zeros(1,7) zeros(1,3) N;
   zeros(3,7) zeros(3,3) A];
%
% Calculo do vetor [v e i]' para i0=1.0 [mA]
%
T\[zeros(7,1);zeros(6,1);0.001;zeros(3,1)]
```

Solução alternativa:

Um caminho de solução alternativo é possível trabalhando-se com uma matriz A_r definida da seguinte forma:

$$A_a = \begin{array}{l} \text{ramos} \rightarrow \\ \text{nó 1} \\ \text{nó 2} \\ \text{nó 3} \\ \text{nó 4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow A_r$$

Definindo-se ainda os vetores

$$\tilde{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_6 \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_6 \end{bmatrix},$$

as equações para o circuito podem ser escritas como:

$$A_r \tilde{i} = \begin{bmatrix} i_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_r^T e - \tilde{v} = 0$$

$$\tilde{v} = R \tilde{i}$$

onde a matriz R é diagonal, com $R_{jj} = R_j$ para $j = 1, \dots, 6$.

Portanto

$$\tilde{v} = A_r^T \left[A_r R^{-1} A_r^T \right]^{-1} \begin{bmatrix} i_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{i} = R^{-1} A_r^T \left[A_r R^{-1} A_r^T \right]^{-1} \begin{bmatrix} i_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esta sistemática de equacionamento simplificada chamada *análise nodal* é possível em alguns casos e será discutida com mais detalhe a partir da página 72, capítulo 6.