

Solução do exercício 4 - Capítulo 1

a) Escolhendo o nó 4 como nó de referência, a matriz de incidência reduzida para o grafo da Figura 1.12 é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As equações das leis de Kirchhoff são $Ai = 0$ e $v = A^T e$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

b) Pode-se escolher, por exemplo, os dois conjunto de valores abaixo:

$$i_1 = 1[\text{A}], i_2 = 2[\text{A}], i_3 = 1[\text{A}], e_1 = 1[\text{V}], e_2 = -1[\text{V}], e_3 = 2[\text{V}]$$

e

$$i_1 = -1[\text{A}], i_2 = 1[\text{A}], i_5 = 2[\text{A}], e_1 = 2[\text{V}], e_2 = 3[\text{V}], e_3 = -1[\text{V}].$$

c) As correntes e tensões de ramo podem ser encontradas pelas equações do item (a). Para o primeiro conjunto de valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para o segundo conjunto de valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ i_3 \\ i_4 \\ 2 \\ i_6 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

d) Para o primeiro e segundo conjuntos de valores, considerando-se também os cálculos do item (c), tem-se respectivamente:

$$v^T i = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad v^T i = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$