Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 11 - Backstepping [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

18 de outubro de 2017

[1] A. C. Faleiros & T. Yoneyama, *Teoria Matemática de Sistemas*, Arte e Ciência, 2002

Síntese de controladores para sistemas não lineares a partir da estabilidade de Lyapunov

Consideremos o problema de encontrar uma lei de controle estabilizante para

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\xi, \tag{1}$$

$$\dot{\xi} = u. \tag{2}$$

Observa-se que, diferentemente do que ocorre no caso da linearização por realimentação, o sinal de controle não aparece diretamente na equação (1). Como encontrar u de modo a estabilizar este sistema?

Exemplo

Consideremos o seguinte exemplo

$$\dot{x} = x - x^3 + \xi, \tag{3}$$
$$\dot{\xi} = u. \tag{4}$$

Primeiramente, considerando apenas (3), pode-se propor a seguinte candidata a função de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ (PD e RI)}. \tag{5}$$

Calculando sua derivada com respeito ao tempo:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}x = x^2 - x^4 + \xi x.$$

$$\dot{V}(x) = x^2 - x^4 + \xi x. \tag{6}$$

Para que $\dot{V}(x)$ seja ND, deve-se ter:

$$\xi = -(k+1)x,\ k \geq 0, \tag{7}$$

donde se teria

$$\dot{V}(x) = -kx^2 - x^4,\ k \geq 0, \tag{8}$$

a qual é ND. Isso estabilizaria o sistema se a variável manipulada fosse ξ. Contudo, pode-se manipular ξ apenas indiretamente mediante manipulação de u.

Proposta: Propõe-se manipular u de tal forma que $\xi \to -(k+1)x$, como forma de estabilizar o sistema.
Reescrevendo de maneira mais conveniente, requer-se que o erro z entre o valor real de ξ e seu valor desejado ξ_d dado por $-(k+1)x$ convirja para zero:

$$z = \xi - \xi_d = \xi + (k+1)x \to 0. \tag{9}$$

Derivando z com respeito ao tempo:

$$\dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\xi}_d = \dot{\xi} + (k+1)\dot{x}. \tag{10}$$

Utilizando (3) e (4):

$$\dot{z} = \dot{\xi} + (k+1)\dot{x} = u + (k+1)(x - x^3 + \xi). \tag{11}$$

Utilizando a definição em (9) para eliminar ξ em (11):

$$\dot{z} = u + (k+1)[x - x^3 + z - (k+1)x] = u + (k+1)z - (k+1)x^3 - k(k+1)x. \tag{12}$$

Reescrevendo (3) e (4) em termos da variável de erro z:

$$\dot{x} = z - x^3 - kx, \tag{13}$$

$$\dot{z} = u + (k+1)z - (k+1)x^3 - k(k+1)x. \tag{14}$$

Escrevendo uma candidata a função de Lyapunov para este sistema:

$$V_a(x,z) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{V(x)} + \frac{1}{2}z^2 \text{ (PD e RI).} \tag{15}$$

Tomando sua derivada com respeito ao tempo:

$$\begin{aligned}\dot{V}_a(x,z) =& \dot{x}x + \dot{z}z = (z - x^3 - kx)x + [u + (k+1)z - (k+1)x^3 - k(k+1)x]z \\ & uz \underbrace{-kx^2 - x^4}_{\dot{V}(x)} + xz + (k+1)z^2 - (k+1)x^3z - k(k+1)xz \\ & -kx^2 - x^4 + z[u + (k+1)z - (k+1)x^3 + (1 - k^2 - k)x]\end{aligned}$$

$$\dot{V}_a(x,z) = -kx^2 - x^4 + z[u + (k+1)z - (k+1)x^3 + (1-k^2-k)x]$$

Tomando

$$u = (c+k+1)z + (k+1)x^3 - (1-k^2-k)x, \; c > 0, \tag{16}$$

ter-se-á

$$\dot{V}_a(x,z) = -kx^2 - x^4 - cz^2, \tag{17}$$

a qual é ND, resultando que esta lei de controle torna o sistema assintoticamente estável. Como consequência desta lei de controle, têm-se:

$$\begin{array}{l} x \to 0 \\ z \to 0 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x \to 0 \\ \xi \to -(k+1)x \end{array}$$

Resumo do procedimento adotado

1. Determina-se ξ a fim de estabilizar x;
2. Define-se o erro z entre o valor desejado ξ_d e o valor real de ξ [2];
3. Utiliza-se o controle u para estabilizar a dinâmica do erro z juntamente com a de x.

[2] Caso o sistema tivesse mais variáveis de estado, poder-se-ia repetir esse procedimento iterativamente, assumindo que uma variável de estado independente das anteriores faz o papel de sinal de controle. Esta é a razão para o nome "Backstepping"

Método Backstepping

Seja o sistema dado na forma:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \tag{18}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \tag{19}$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)x_4, \tag{20}$$

$$\vdots \tag{21}$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)u. \tag{22}$$

- Define-se $V_1(x_1)$ e determina-se x_{2_d} que estabilize esta dinâmica;
- Define-se o erro z_1 entre o valor desejado x_{2_d} e o valor real x_2 e $V_2(x_1, z_1) = V_1(x_1) + V_2'(z_1)$ e determina-se x_{3_d} que estabilize esta dinâmica;
- Define-se o erro z_2 entre o valor desejado x_{3_d} e o valor real x_3 e $V_3(x_1, z_1, z_2) = V_2(x_1, z_1) + V_3'(z_2)$ e determina-se x_{4_d} que estabilize esta dinâmica;

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)x_3, \\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1,x_2,x_3) + g_3(x_1,x_2,x_3)x_4, \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) + g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)u.
\end{aligned}$$

- Define-se o erro z_2 entre o valor desejado x_{3_d} e o valor real x_3 e $V_3(x_1,z_1,z_2) = V_2(x_1,z_1) + V_3'(z_2)$ e determina-se x_{4_d} que estabilize esta dinâmica;
- $\vdots$
- Define-se o erro z_{n-1} entre o valor desejado x_{n_d} e o valor real x_n e $V_n(x_1,z_1,\ldots,z_{n-1}) = V_{n-1}(x_1,z_1,\ldots,z_{n-2}) + V_n'(z_{n-1})$ e determina-se u que estabilize esta dinâmica.

Exercício

Determine pelo método *Backstepping* uma lei de controle para o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + x_2 u \end{cases} . \qquad (23)$$

Função candidata de Lyapunov para x_1:

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2. \tag{24}$$

Derivando com respeito ao tempo

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1^3 + x_1^2 x_2. \tag{25}$$

Para que $\dot{V}_1(x_1)$ seja ND, pode-se escolher:

$$x_{2_d} = -x_1 - kx_1^2,\ k > 0, \tag{26}$$

obtendo

$$\dot{V}_1(x_1) = -kx_1^4. \tag{27}$$

O erro é $z_1 = x_2 - x_{2_d}$, donde:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2_d} = x_2^2 + x_2 u - (-\dot{x}_1 - 2kx_1\dot{x}_1) = x_2^2 + x_2 u + (x_1^2 + x_1 x_2)(1 + 2kx_1).$$

Substituindo $x_2 = z_1 + x_{2_d}$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 =& z_1^2 + 2z_1 x_{2_d} + x_{2_d}^2 + (z_1 + x_{2_d})u + x_1^2 + x_1 z_1 + \\ &+ x_1 x_{2_d} + 2kx_1^3 + 2kx_1^2 z_1 + 2kx_1^2 x_{2_d}.\end{aligned}$$

Usando o valor definido de $x_{2_d} = -x_1 - kx_1^2$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 =& z_1^2 - 2z_1 x_1 - 2kz_1 x_1^2 + x_1^2 + 2kx_1^3 + k^2 x_1^4 + (z_1 - x_1 - kx_1^2)u + x_1^2 + \\ &+ x_1 z_1 - x_1^2 - kx_1^3 + 2kx_1^3 + 2kx_1^2 z_1 - 2kx_1^3 - 2k^2 x_1^4, \\ =& z_1^2 + x_1^2 - x_1 z_1 - k^2 x_1^4 + kx_1^3 + (z_1 - x_1 - kx_1^2)u.\end{aligned}$$

Função candidata de Lyapunov para o sistema completo:

$$V_2(x_1,z_1) = \underbrace{\frac{1}{2}x_1^2}_{V_1(x_1)} + \frac{1}{2}z_1^2. \tag{28}$$

Derivando com respeito ao tempo

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_1,z_1) =& x_1\dot{x}_1 + z_1\dot{z}_1 = x_1^3 + x_1^2 \underbrace{x_2}_{z_1 - x_1 - kx_1^2} + z_1^3 + x_1^2 z_1 - x_1 z_1^2 - k^2 x_1^4 z_1 + \\ & + kx_1^3 z_1 + (z_1 - x_1 - kx_1^2) z_1 u \\ =& z_1^3 + 2x_1^2 z_1 - kx_1^4 - x_1 z_1^2 - k^2 x_1^4 z_1 + kx_1^3 z_1 + (z_1 - x_1 - kx_1^2) z_1 u\end{aligned}$$

Para que $\dot{V}_2(x_1,z_1)$ seja ND, pode-se escolher:

$$u = \frac{-z_1^2 - 2x_1^2 + x_1 z_1 + k^2 x_1^4 - kx_1^3 - \rho z_1}{z_1 - x_1 - kx_1^2}, \ \rho > 0, \tag{29}$$

obtendo

$$\dot{V}_2(x_1,z_1) = -kx_1^4 - \rho z_1^2. \tag{30}$$

Resultado de simulação

Simulando o sistema (23) com a lei de controle (29) a partir da condição inicial $\mathbf{x}(0)^T = [1 \quad 1]$: