Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 4 - Análise do plano de fase [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

[1] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 2, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Análise gráfica de trajetórias de sistemas no plano

Na **vizinhança** de pontos de equilíbrio: comportamento **aproximadamente** igual ao do sistema linearizado.

Comportamento do sistema linear em função dos **autovalores** (ordem 2):

- $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0 \rightarrow$ nó estável;
- $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0 \rightarrow$ nó instável;
- $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \rightarrow$ ponto de sela;
- $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} < 0 \rightarrow$ foco estável;
- $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} > 0 \rightarrow$ foco instável;
- $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} = 0 \rightarrow$ ponto central.

Breve revisão de álgebra linear

Seja uma transformação linear $M : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Os **autovalores** $\lambda \in \mathbb{C}$ são tais que:

$$\mathbf{u} = M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Há um total de n autovalores λ_i, $1 \leq i \leq n$, aos quais se associam n **autovetores** $\mathbf{v}_i$. Para encontrar os autovalores deve-se resolver:

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \rightarrow (\lambda I - M)\mathbf{v} = 0,$$

para que existam soluções não triviais:

$$\det(\lambda I - M) = 0,$$

Os autovetores são encontrados substituindo os valores de λ_i determinados e resolvendo:

$$M\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i,$$

cuja solução fica em função de um parâmetro, pois, dada uma solução $\mathbf{v}_i$, qualquer multiplicação por escalar $\alpha\mathbf{v}_i$ também é solução.

Diagonalização

Construindo uma matriz V com os autovetores como colunas:

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$MV = \begin{bmatrix} M\mathbf{v}_1 & M\mathbf{v}_2 & \dots & M\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \dots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

$$MV = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = V^{-1}MV.$$

Para um sistema dinâmico linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

tomando a transformada de variáveis $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$, em que V é a matriz cujas colunas são formadas pelos autovetores de A, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = V\dot{\mathbf{y}} = AV\mathbf{y},$$
$$\dot{\mathbf{y}} = V^{-1}AV\mathbf{y} = D\mathbf{y},$$

com a matriz D diagonal composta pelos autovalores de A. Assim, podem-se resolver cada uma das equações diferenciais das linhas de $\mathbf{y}$ separadamente, resultando:

$$y_i = e^{\lambda_i t} y_i(0)$$
$$\mathbf{y} = e^{Dt}\mathbf{y}(0),$$

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

expandindo em série de MacLaurin:

$$\begin{aligned} e^{Dt} =& I + Dt + D^2\frac{t^2}{2} + D^3\frac{t^3}{3!} + \dots + D^i\frac{t^i}{i!} + \dots \\ Ve^{Dt}V^{-1} =& VIV^{-1} + VDV^{-1}t + VDV^{-1}VDV^{-1}\frac{t^2}{2} + \\ & + VDV^{-1}VDV^{-1}VDV^{-1}\frac{t^3}{3!} + \dots + VDV^{-1}\dots VDV^{-1}\frac{t^i}{i!} + \dots \\ =& I + At + A^2\frac{t^2}{2} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots + A^i\frac{t^i}{i!} + \dots = e^{At} \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = e^{Dt}\mathbf{y}(0),$$

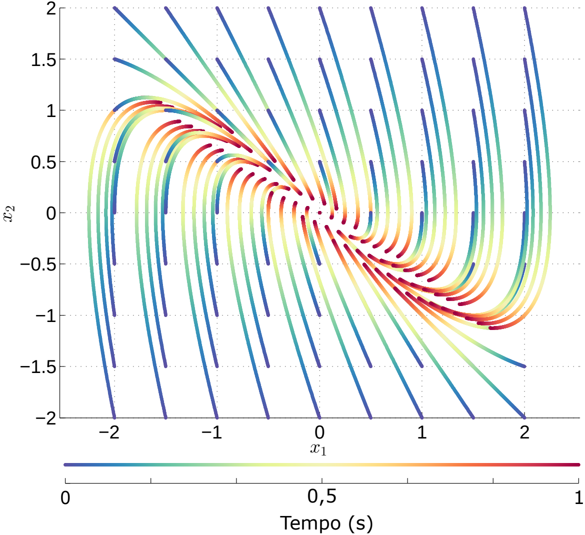
usando a transformação inversa:

$$\mathbf{x} = V\mathbf{y} = Ve^{Dt}\mathbf{y}(0) = Ve^{Dt}V^{-1}\mathbf{x}(0) = e^{At}\mathbf{x}(0),$$

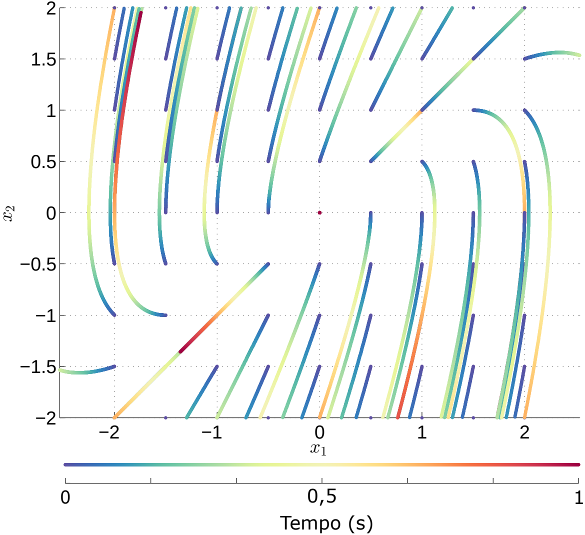
dados os autovetores da matriz A, pode-se construir uma base e escrever $\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$, de forma que:

$$\mathbf{x} = e^{At}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{At}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i Ve^{Dt}V^{-1}\mathbf{v}_i,$$

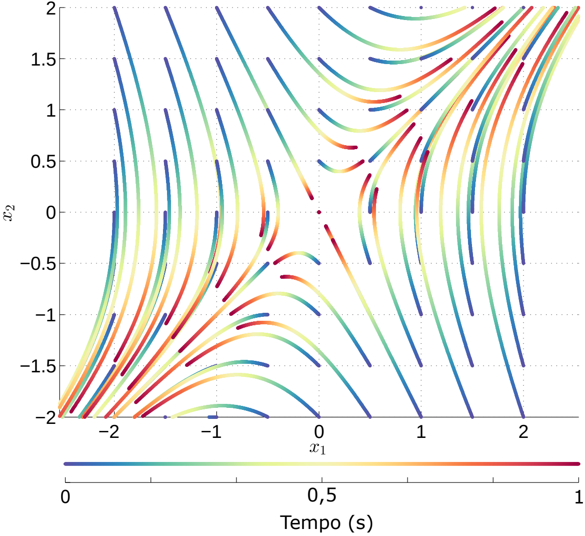
$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2 \rightarrow$ nó estável



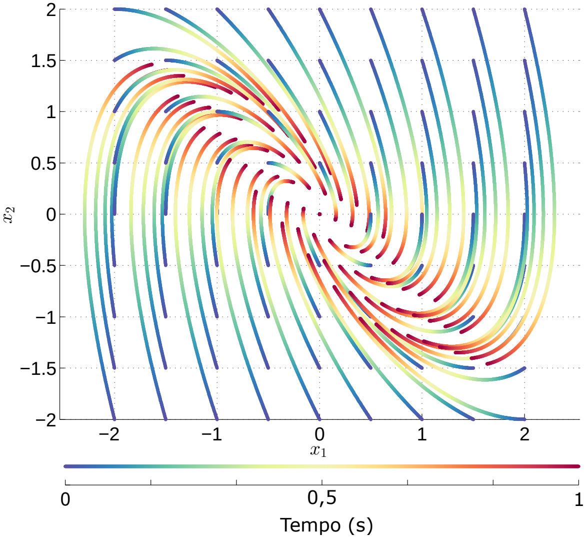
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \rightarrow$ nó instável



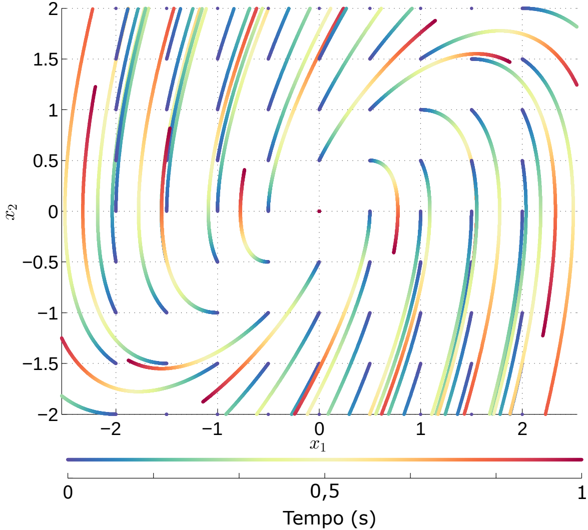
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2 \rightarrow$ ponto de sela



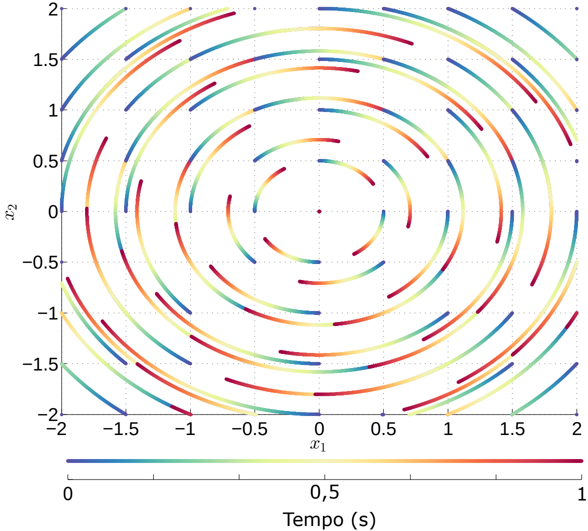
$\lambda_1 = -1 + j,\ \lambda_2 = -1 - j \rightarrow$ foco estável



$\lambda_1 = 1 + j,\ \lambda_2 = 1 - j \rightarrow$ foco instável



$\lambda_1 = j,\ \lambda_2 = -j \rightarrow$ ponto central



Existência de ciclo limite em sistemas de ordem 2

Teorema

(Poincaré) *Sejam N o número de nós, centros e focos e S o número de pontos de sela circundados pela trajetória do sistema, então, se existe um ciclo limite:*

$$N = S + 1$$

Corolário

Um ciclo limite deve envolver pelo menos um ponto de equilíbrio.

Existência de ciclo limite em sistemas de ordem 2

Teorema

(Poincaré-Bendixon) *Se a trajetória de um sistema autônomo*[a] *de segunda ordem permanece dentro de uma região finita Ω, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

1. *A trajetória converge para um ponto de equilíbrio;*
2. *A trajetória tende assintoticamente para um ciclo limite;*
3. *A trajetória é um ciclo limite.*

[a] $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, i. e., não depende explicitamente do tempo.

Existência de ciclo limite em sistemas de ordem 2

Teorema

(Bendixon) *Para um sistema não linear* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *não pode haver ciclo limite em uma região* Ω *se:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

não se anula ou não muda de sinal.

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = g(x_2) + 4x_1x_2^2 = f_1(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2 = h(x_1) + 4x_1^2x_2 = f_2(x_1,x_2)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4x_2^2$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4x_1^2$$

Assim:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4(x_1^2 + x_2^2) \geq 0, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Como a equação só se anula na origem, então não pode haver ciclo limite.