



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 11 - Diagrama de Bode

Rubens J M Afonso

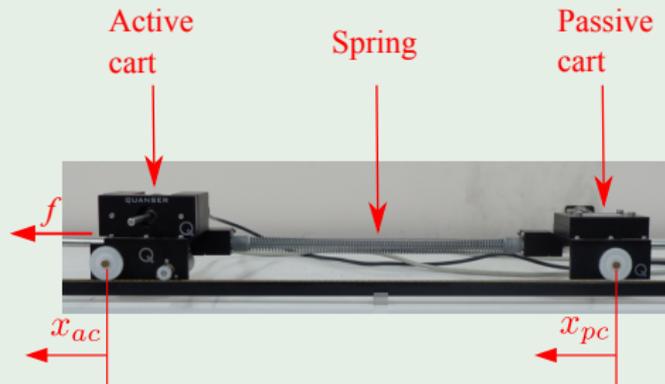
EES-10: Sistemas de Controle I

29 de março de 2018

Uma maneira gráfica de representar resposta em frequência

Example 1.

- Carrinho massa-mola com função de transferência $G(s)$: medir no laboratório as características de resposta em frequência;
- Grandezas medidas: amplitudes e fases das senoides de entrada e saída;
- Assume-se: senoide de entrada tem fase 0.



Exemplo 1 - continuação

Tabela: Amplitude da saída e atraso para frequências selecionadas para o carrinho.

ω [rad/s]	Amplitude da Entrada [V]	Amplitude da Saída [V]	Atraso Δt [s]
3	2	0,32	0,881
6	2	0,081	0,473
12	2	0,019	0,240



Exemplo 1 - continuação

Tabela: Amplitude da saída e atraso para frequências selecionadas para o carrinho.

ω [rad/s]	Amplitude da Entrada [V]	Amplitude da Saída [V]	Atraso Δt [s]
3	2	0,32	0,881
6	2	0,081	0,473
12	2	0,019	0,240

Perguntas

- O que fazer com esses dados?
- Como eles se relacionam com $G(j\omega)$?



Obtendo módulo e fase de $G(j\omega)$

- Calcular o módulo: dividir a amplitude do sinal de saída pela amplitude do sinal de entrada, após normalizar as unidades;



Obtendo módulo e fase de $G(j\omega)$

- Calcular o módulo: dividir a amplitude do sinal de saída pela amplitude do sinal de entrada, após normalizar as unidades;
- Calcular a fase: verificar que a senoide de saída está atrasada em relação à de entrada;



Obtendo módulo e fase de $G(j\omega)$

- Calcular o módulo: dividir a amplitude do sinal de saída pela amplitude do sinal de entrada, após normalizar as unidades;
- Calcular a fase: verificar que a senoide de saída está atrasada em relação à de entrada;
- Para calcular essa fase em radianos, precisamos apenas fazer uma simples regra de três:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\angle G(j\omega)}{2\pi}. \quad (1)$$

em que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período da senoide.



Exemplo 1 - continuação

Tabela: Módulo e fase da função de transferência para frequências selecionadas para o carrinho.

ω [rad/s]	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$ [rad]
3	0,16	-2,64
6	0,040	-2,84
12	0,010	-2,88



- Medidas de laboratório $\Rightarrow |G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$;



- Medidas de laboratório $\Rightarrow |G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$;
- No exemplo do carrinho massa-mola: apenas 3 frequências espaçadas (a cada linha da tabela multiplicamos a frequência por 2);



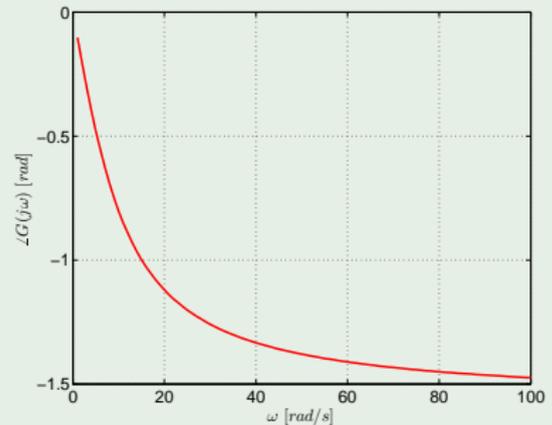
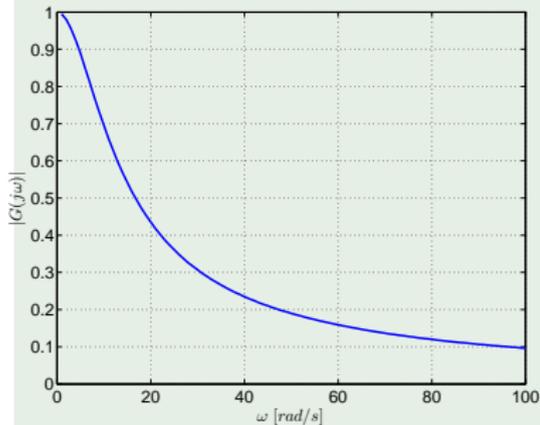
- Medidas de laboratório $\Rightarrow |G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$;
- No exemplo do carrinho massa-mola: apenas 3 frequências espaçadas (a cada linha da tabela multiplicamos a frequência por 2);
- Melhor acuidade \Rightarrow muitas frequências \Rightarrow gráfico.



Diagrama de Bode do circuito RC

Example 2.

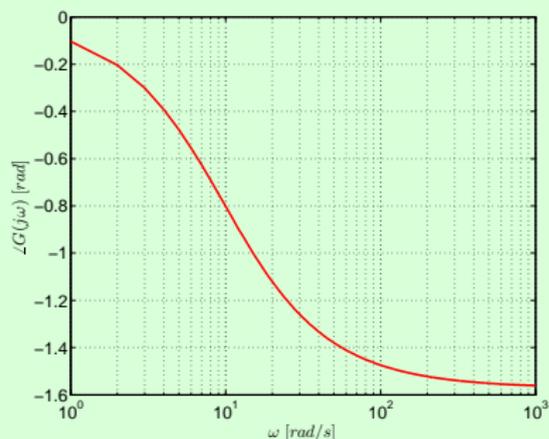
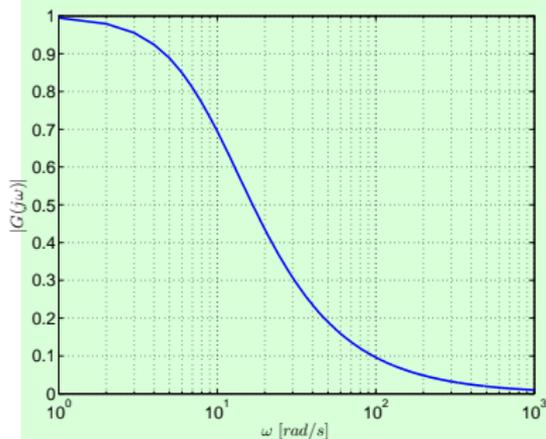
Circuito RC :



- Intervalo grande de frequências: primeira frequência e última diferentes por muitas ordens de grandeza;
- Representar os gráficos de maneira mais compacta: escala logarítmica;
- Base 10, cada multiplicação da frequência por 10 só aumenta o logaritmo em uma unidade, comprimindo o eixo das abscissas.

Exemplo 2 - continuação

Circuito RC:



- Valor de $|G(j\omega)|$ varia bastante com tendência é de diminuir com o aumento da frequência;
- Logaritmo na base 10 do valor do ganho com um fator de escala de 20 multiplicando o resultado;
- O resultado será chamado de ganho em **decibéis**, representado pelo símbolo $|G(j\omega)|_{dB}$.

Exemplo 2 - continuação

Circuito RC:

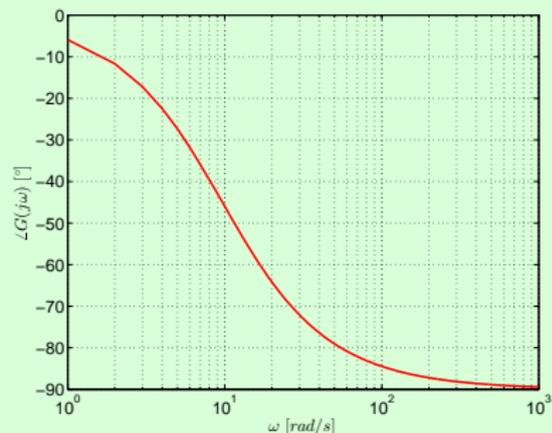
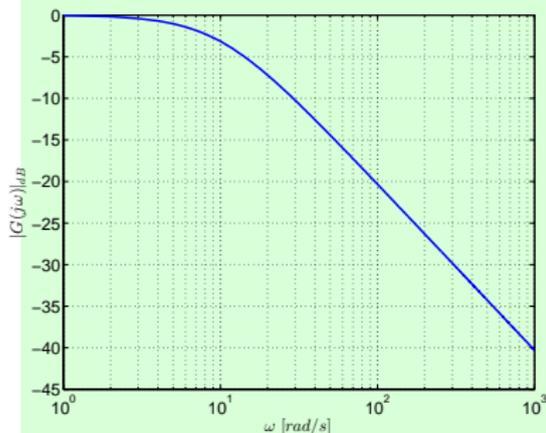


Diagrama de Bode

O conjunto desses dois gráficos de amplitude e fase versus o logaritmo da frequência é chamado **Diagrama de Bode**.

- Relação entre função de transferência e diagrama de Bode:
 - 1 módulo começa em 0 dB e a partir de cerca de 10 rad/s , decresce segundo algo que parece ser uma reta conforme aumenta a frequência;
 - 2 fase decresce de próximo de 0° em direção a um valor próximo de -90° .

Pergunta

Será que podemos de alguma maneira prever essa tendência?



Calcular módulo de $G(j\omega)$ de maneira literal:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega RC + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}. \quad (2)$$

Para $\omega \gg 1/RC$, o termo 1 na raiz quadrada da Eq. (2) fica desprezível frente ao termo mais à esquerda:

$$|G(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega RC}. \quad (3)$$

Calculando o módulo em dB :

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{1}{\omega RC} \right) = -20 \log(RC) - 20 \log(\omega). \quad (4)$$

Lembrando que a escala do eixo horizontal é $\log(\omega)$, vemos que em alta frequência o ganho em decibéis decairá como uma reta com a frequência, como vimos no diagrama de Bode.

Em baixas frequências, i. e., $\omega \ll 1/RC$, pode-se considerar a aproximação para o módulo como:

$$|G(j\omega)| \approx 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(1) = 0 \text{ dB}.$$



Calcular fase de $G(j\omega)$ de maneira literal:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega RC + 1} = -\arctan(\omega RC). \quad (6)$$

$\omega \gg 1/RC \Rightarrow$ argumento tende ao infinito. O arcotangente é $\frac{\pi}{2}$, com o sinal negativo:

$$\angle G(j\omega) \approx -\frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Isso também pode ser percebido no diagrama de Bode.

Em baixas frequências, i. e., $\omega \ll 1/RC$, pode-se considerar a aproximação para a fase:

$$\angle G(j\omega) \approx -\arctan(0) = 0^\circ. \quad (8)$$



Com isso, tem-se um comportamento muito claramente definido:

- Em alta frequência $\omega \gg \frac{1}{RC}$: módulo é uma reta com inclinação de -20 dB/década e fase vale -90° ;
- Em baixa frequência $\omega \ll \frac{1}{RC}$: módulo é uma reta com inclinação nula passando por 0 dB e fase vale 0° .

Assim, têm-se duas assíntotas, para alta e baixa frequência.

A frequência intermediária entre as assíntotas é $\omega = \frac{1}{RC}$, chamada de **frequência de quebra ou de corte**.



Generalizando para um sistema com um polo real p_1 cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{K}{s + p_1}, \quad K \geq 0, \quad (9)$$

a frequência de quebra será $\omega = |p_1|$ e as assíntotas de ganho serão dadas por

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(K) - 20 \log(|p_1|), \quad \omega < |p_1|, \quad (10)$$

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(K) - 20 \log(\omega), \quad \omega > |p_1|. \quad (11)$$

As assíntotas se cruzam em $\omega = |p_1|$. O valor exato desse erro pode ser determinado calculando $|G(jp_1)|$:

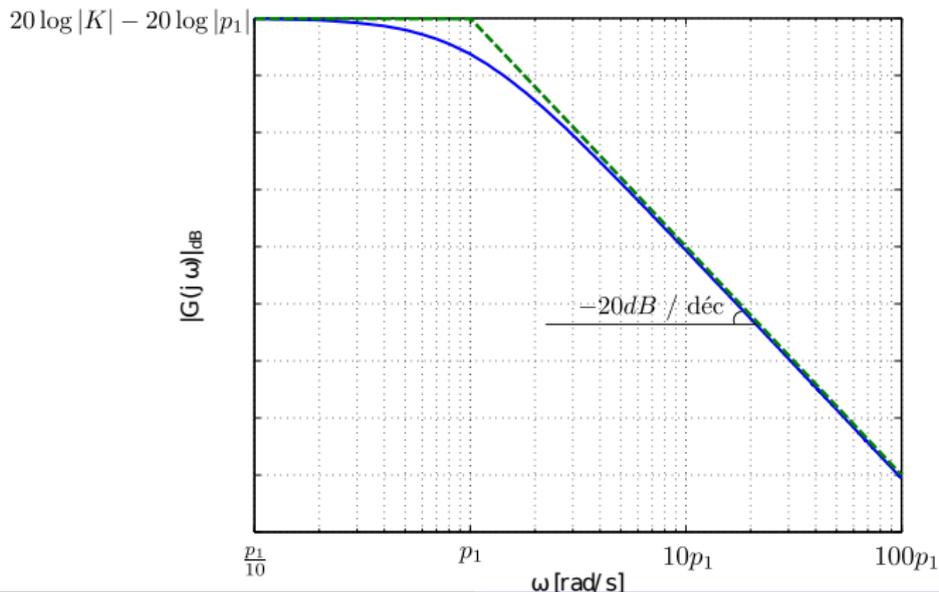
$$|G(jp_1)| = \frac{K}{\sqrt{p_1^2 + p_1^2}} = \frac{K}{|p_1| \sqrt{2}}. \quad (12)$$



Em decibéis, a diferença entre o valor estimado pelas assíntotas e o valor real será:

$$20\log\left(\frac{K}{\sqrt{2}|p_1|}\right) - 20\log\left(\frac{K}{|p_1|}\right) = -20\log(\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}, \quad (13)$$

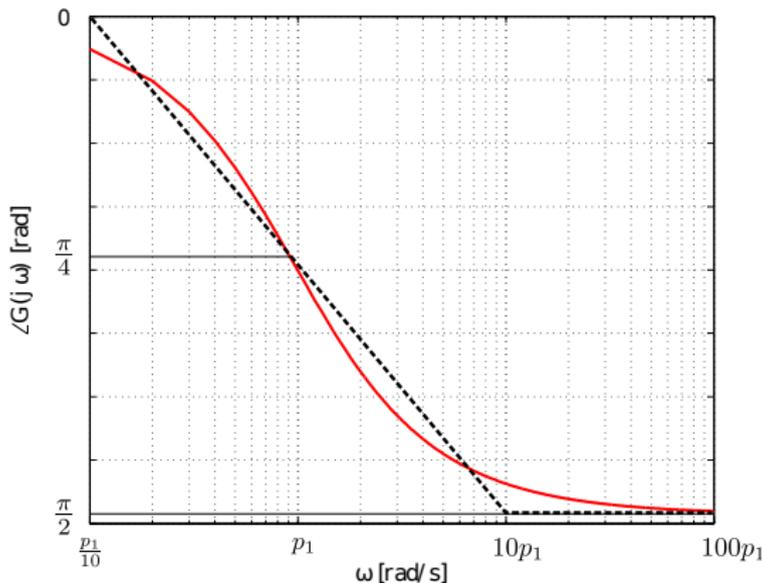
isto é, a curva real passa cerca de 3 dB abaixo da curva encontrada aproximando por assíntotas.



Fase: assíntotas são retas horizontais em 0° e 90° (para $p_1 > 0$).

$$\angle G(jp_1) = -\angle(jp_1 + p_1) = -\arctan(1) = -45^\circ. \quad (14)$$

- Unir assíntotas com reta que passa por $(p_1, -\frac{\pi}{4})$;
- Iniciar uma década antes de p_1 e terminar uma década depois;
- Erro máximo ocorre em $0,1p_1$ e em $10p_1$ e vale cerca de $5,7^\circ$.



Observação 1.

Para o caso de se ter um zero, o procedimento é muito semelhante, mas teremos mudanças na assíntota de ganho que passará a crescer com 20 dB/década e a fase que crescerá de 0° a $+90^\circ$ (para zero no SPE).

Observação 2.

Caso $p_1 = 0$, isto é, o polo de $G(s)$ esteja em zero:

$$G(s) = \frac{K}{s}, \quad (15)$$

tem-se um decaimento de -20 dB/década em qualquer intervalo de frequências considerado, sendo que o gráfico cruza o 0 dB em $\omega = K$. A fase será sempre igual a -90° , visto que $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$ é um número imaginário puro.



Diagrama de Bode de sistemas com mais polos reais

Example 3.

Dois polos reais não nulos:

$$G(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad (16)$$

em que arbitra-se que $p_2 > p_1 > 0$.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|j\omega + p_1|) - 20 \log(|j\omega + p_2|). \quad (17)$$

- Ganho em decibéis \Rightarrow ganho dos dois polos é a soma dos ganhos com cada um dos polos considerados separadamente;
- Duas frequências de quebra associadas a p_1 e a p_2 ;
- Frequência crescente: primeira quebra em p_1 , segunda quebra em p_2 .



Exemplo 3 - continuação

- $\omega < p_1$, predominam p_1 e p_2 nos módulos:

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20\log(K) - 20\log(p_1) - 20\log(p_2). \quad (18)$$

- $p_1 < \omega < p_2$, a variação do módulo com a frequência pode ser expressa por:

$$\Delta|G(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(\omega), \quad (19)$$

isto é, o módulo começa a decrescer segundo uma assíntota de -20 dB/década .

- $\omega > p_2$:

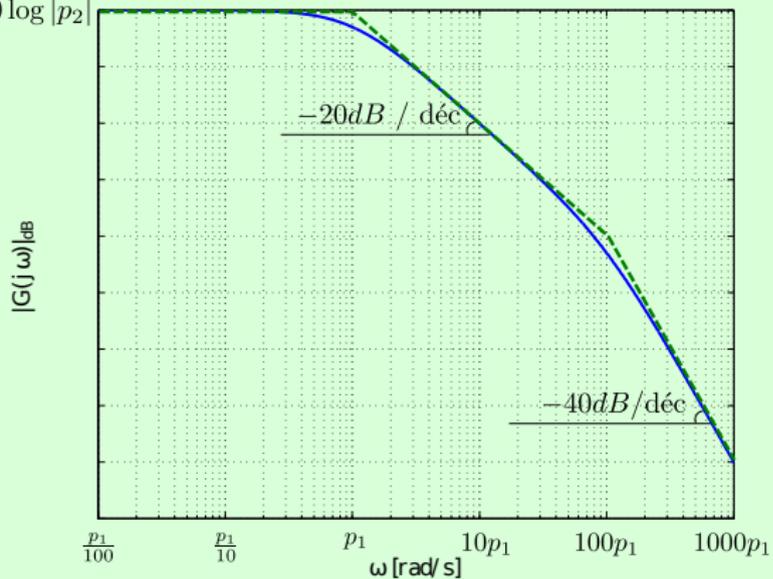
$$\Delta|G(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(\omega) - 20\log(\omega) = -40\log(\omega), \quad (20)$$

ou seja, o módulo começa a decair com -40 dB/década :
 -20 dB/década para cada um dos polos.



Exemplo 3 - continuação

$$20 \log |K| - 20 \log |p_1| - 20 \log |p_2|$$



Exemplo 3 - continuação

$$\angle G(j\omega) = -\angle(j\omega + p_1) - \angle(j\omega + p_2), \quad (21)$$

fase é a soma das fases devidas a cada polo.

Com isso, basta calcular separadamente as assíntotas:

- 0° para $\omega < p_1$;
- -90° para $p_1 < \omega < p_2$;
- -180° para $\omega > p_2$.

Unir estas assíntotas por retas iniciando a primeira em $0,1p_1$ e terminando em $10p_1$ e a segunda de $0,1p_2$ a $10p_2$. Para o caso do exemplo em que $p_2 = 100p_1$: o início da segunda reta inclinada coincide com o término da primeira.



Exemplo 3 - continuação

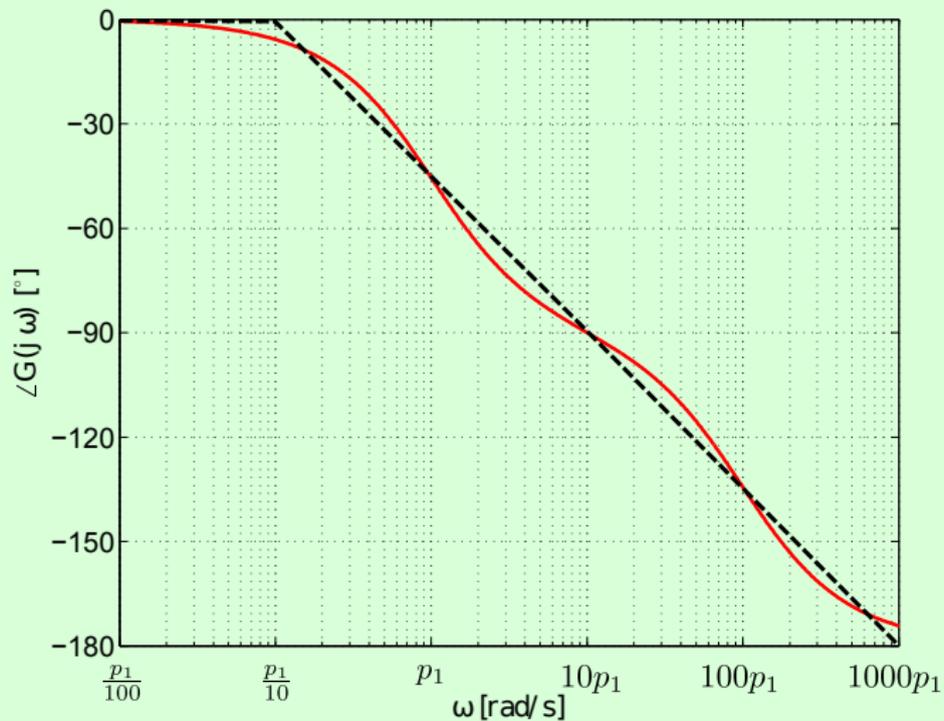


Diagrama de Bode de sistema de 2ª ordem do tipo 1

$$G(s) = \frac{K}{s(s + p_1)}. \quad (22)$$

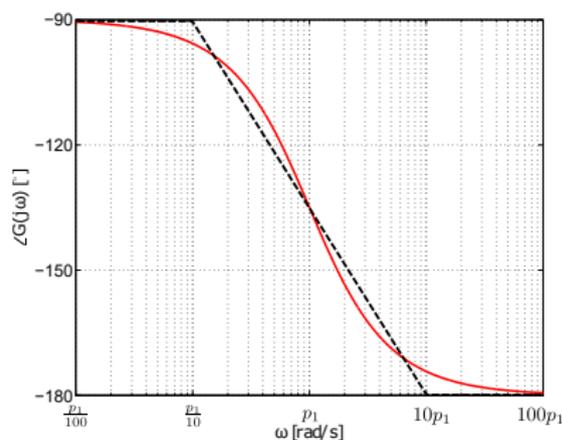
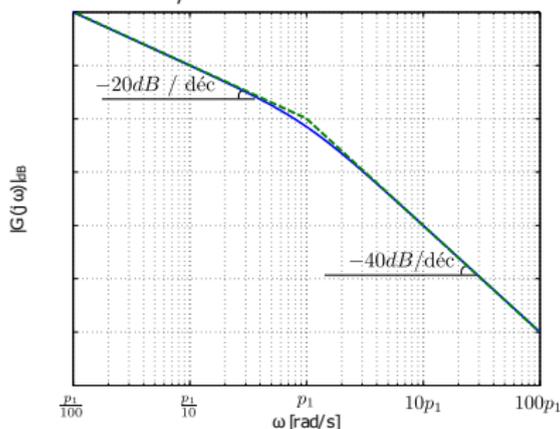
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(K) - 20\log(|j\omega|) - 20\log(|j\omega + p_1|). \quad (23)$$

- Decrescimento de $-20 \text{ dB/década} \forall \omega \leq |p_1|$, devido ao termo $-20\log(|j\omega|)$;
- Pode encarar como uma frequência de quebra igual a 0;
- Coeficiente linear da reta de -20 dB/década : ignorar outro polo e considerar o prolongamento até cruzar o eixo das abscissas na frequência ω_1 :

$$|K/\omega_1|_{dB} = 0 \Rightarrow \omega_1 = K. \quad (24)$$



Após a frequência de quebra $|p_1|$, tudo se passa como no caso com dois polos reais negativos, e a assíntota passa a descer com -40 dB/década .



Módulo para o sistema do tipo 1: $\downarrow \omega \Rightarrow \uparrow$ ganho do sistema. A constante de erro de posição K_p é dada por:

$$K_p = G(0), \quad (25)$$

para um sistema em malha fechada com realimentação negativa unitária com função de transferência de malha $G(s)$. Erro em regime estacionário para uma entrada degrau:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}. \quad (26)$$

Erro estacionário nulo: $K_p \rightarrow \infty$. Lembrando que:

$$G(0) = G(j\omega)|_{\omega=0}, \quad (27)$$

conclui-se que a assíntota de baixas frequências deve ter inclinação de ao menos -20 dB/década para erro em regime estacionário nulo para uma entrada degrau.



Sistemas do tipo 1: a constante de erro de velocidade K_v é finita

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s). \quad (28)$$

Para o sistema como na Eq. (22):

$$K_v = \frac{K}{p_1}. \quad (29)$$

Assíntota de ganho antes de p_1 :

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &\approx 20 \log(K) - 20 \log(p_1) - 20 \log(\omega) \\ &\approx 20 \log\left(\frac{K}{p_1}\right) - 20 \log(\omega), \quad \omega < p_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Ponto onde a assíntota cruza a reta de 0 dB:

$$\begin{aligned} 20 \log\left(\frac{K}{p_1}\right) - 20 \log(\omega_0) &= 0, \\ \omega_0 = \frac{K}{p_1} &= K_v. \end{aligned} \quad (31)$$



Diagrama de Bode de sistema com par de polos complexos conjugados

Para um sistema com par de polos complexos conjugados sem zeros a função de transferência, assumindo ganho DC unitário pode ser escrita na forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (32)$$

Fazendo $s = j\omega$, tem-se:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n\omega}, \quad (33)$$

cujo módulo é dado por:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}. \quad (34)$$



$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}$$

Este módulo apresenta um máximo quando:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2 \right] = 0. \quad (35)$$

Isto é,

$$-4\omega(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\xi^2\omega_n^2\omega = 0. \quad (36)$$

Desprezando a solução $\omega = 0$, tem-se:

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}\omega_n, \quad (37)$$

em que ω_r é a chamada **frequência de ressonância** de $G(j\omega)$.

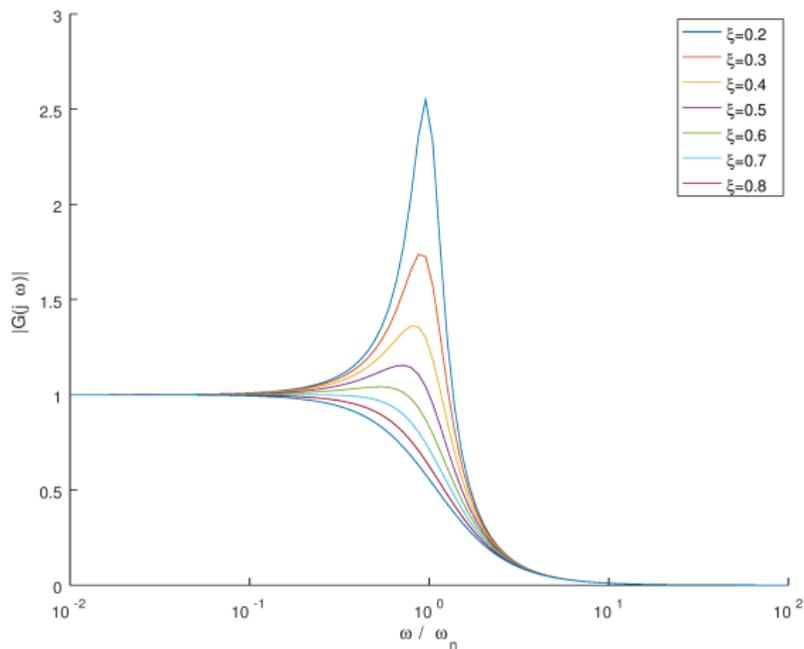
Substituindo ω_r na expressão para o módulo da Equação (34):

$$M_{p\omega} = |G(j\omega)|_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (38)$$

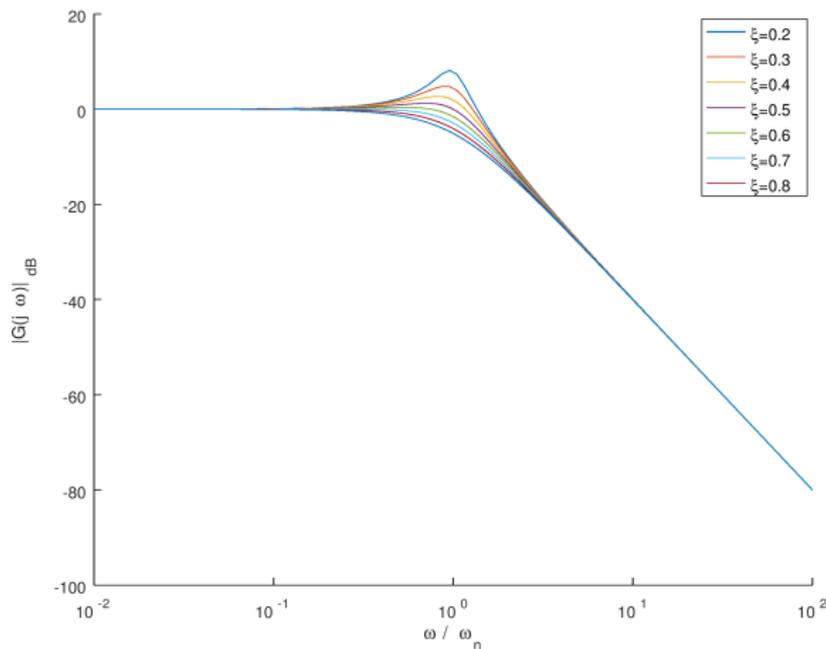
O valor de $M_{p\omega}$ é chamado de **pico de ressonância**.



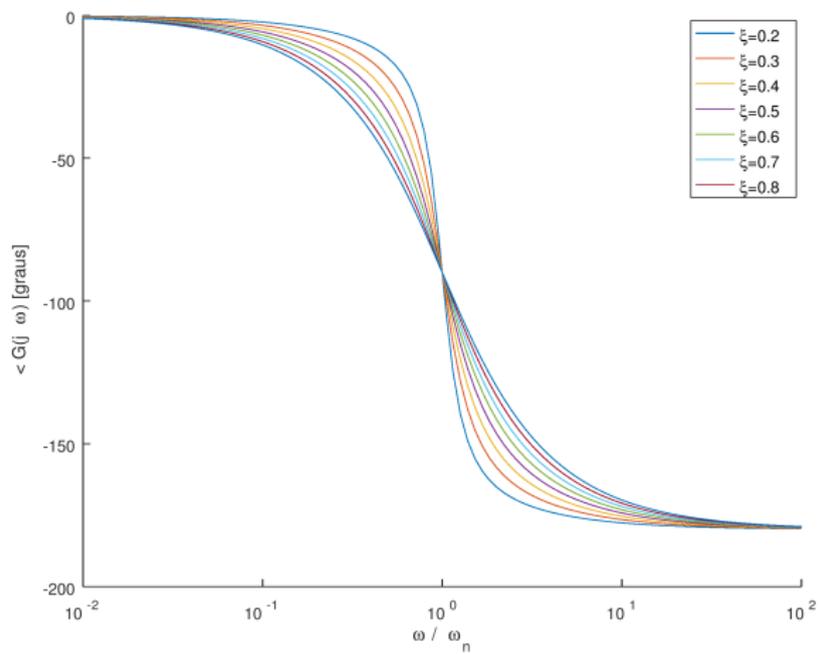
Assíntotas são 0 dB até ω_n e depois -40 dB/década , com um erro dado pela Eq. (38) na frequência dada na Eq. (37).



Assíntotas são 0 dB até ω_n e depois -40 dB/década , com um erro dado pela Eq. (38) na frequência dada na Eq. (37).



Fase



A banda (ou faixa) de passagem ω_B é definida como a frequência em que o ganho cai a $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3 \text{ dB}$ de seu valor em baixa frequência. Para que o módulo apresente esse valor:

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega^4 - 2(1 - 2\xi^2)\omega_n^2\omega^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$\omega^2 = \left[(1 - 2\xi^2) \pm \sqrt{2(1 - 2\xi^2 + 2\xi^4)} \right] \omega_n^2$$

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{2(1 - 2\xi^2 + 2\xi^4)}} \quad (39)$$



Banda de passagem de $G(j\omega)$ 