



# Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

## Aula 15 - Projeto de controladores no domínio da frequência

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

4 de abril de 2018

# Motivação

Aulas anteriores:

- Requisitos de desempenho de acurácia da resposta (como  $M_p$ ) e de velocidade de resposta (como  $t_r|_{100\%}$ )  $\Rightarrow \xi$  e  $\omega_n$  em MF, para um sistema de segunda ordem;
- $\xi$  e  $\omega_n$  em MF com  $\Rightarrow PM$  e  $\omega_c$  em MA;
- Exemplo final da aula 12:
  - requisito de  $\xi$  ( $PM$ ) impõe um limitante superior para  $\omega_c$ ;
  - requisito de  $\omega_n$  impõe um limitante inferior;
  - interseção entre as faixas encontradas  $\Rightarrow$  possível atender ambos os requisitos simultaneamente;

## Problema

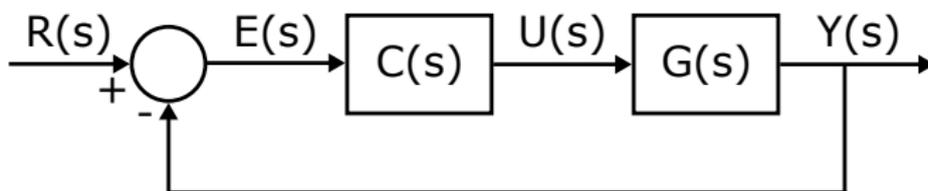
- Nem sempre interseção existe  $\Rightarrow$  impossível atender ambos os requisitos com realimentação proporcional;
- Motivo: deficiência de se ajustar apenas o ganho  $\Rightarrow$  incapacidade de alterar fase.



## Proposta

- Recorrer a um controlador mais complexo, em que haverá um sistema dinâmico chamado de **compensador**.

$C(s)$  é a função de transferência do compensador:



# Efeito da introdução de um zero em cascata

$$G(s) = G_n(s)(s - z_1), \quad (1)$$

em que  $G(s)$  é a função de transferência resultante com o zero,  $G_n(s)$  é a função original sem o zero e o zero é  $z_1$ .

Caso  $z_1 < 0$  (zero no SPE):

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_n(j\omega)|_{dB} + |j\omega - z_1|_{dB}. \quad (2)$$

Assíntotas:

$$|j\omega - z_1|_{dB} = \begin{cases} 20\log |z_1|, & \omega \leq |z_1|, \\ 20\log \omega, & \omega > |z_1|. \end{cases} \quad (3)$$



$$\angle G(j\omega) = \angle G_n(j\omega) + \angle(j\omega - z_1) \quad (4)$$

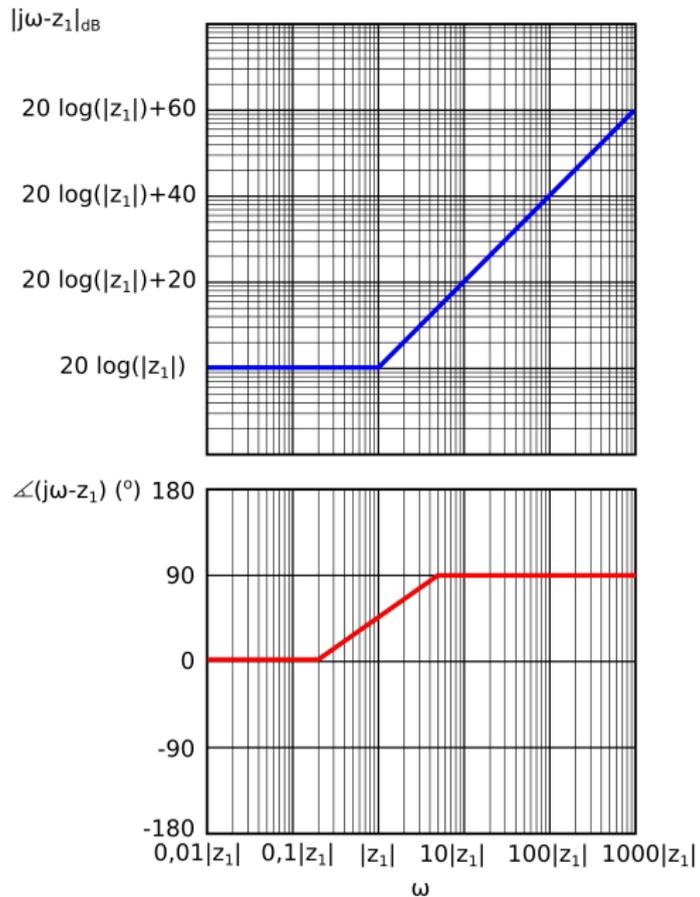
Assíntotas:

$$\angle(j\omega - z_1) = \begin{cases} 0, & \omega \leq |z_1|, \\ 90^\circ, & \omega > |z_1|. \end{cases} \quad (5)$$

Unir assíntotas por uma reta começando meia década antes de  $z_1$  e terminando meia década depois:

$$\angle(j\omega - z_1) = \begin{cases} 0, & \omega \leq |z_1|/5, \\ 90^\circ \log(\omega 5/|z_1|)/\log 25, & |z_1|/5 < \omega \leq 5|z_1| \\ 90^\circ, & \omega > 5|z_1|. \end{cases} \quad (6)$$





- Ganho em  $dB$  será aumentado de  $20 \log |z_1|$  em baixas frequências e crescerá com  $20 dB/dec$  acima de  $|z_1|$ ;
- Fase será aumentada a partir de cerca de  $\omega = |z_1|/5$ , atingindo  $45^\circ$  em  $\omega = |z_1|$  e chegando à assíntota constante de  $90^\circ$  a partir de cerca de  $\omega = 5|z_1|$ ;
- Adicionar um zero pode aumentar a margem de fase, contribuindo para poder atingir o requisito de  $PM$  que não seria atingido em uma frequência  $\omega_c$  mais alta;
- Elemento não é realizável, pois o grau do numerador é maior do que o grau do denominador  $\Rightarrow$  função de transferência desse elemento não é própria;
- Necessário incluir um polo no controlador em cascata.



# Efeito de acrescentar um polo no diagrama de Bode

$$G(s) = G_n(s)/(s - p_1), \quad (7)$$

em que  $G(s)$  é a função de transferência resultante com o polo,  $G_n(s)$  é a função original sem o polo e o polo é  $p_1$ .

Caso  $p_1 < 0$  (polo no SPE):

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_n(j\omega)|_{dB} - |j\omega - p_1|_{dB}. \quad (8)$$

Assíntotas:

$$|j\omega - p_1|_{dB} = \begin{cases} 20\log |p_1|, & \omega \leq |p_1|, \\ 20\log \omega, & \omega > |p_1|. \end{cases} \quad (9)$$



$$\angle G(j\omega) = \angle G_n(j\omega) - \angle(j\omega - p_1) \quad (10)$$

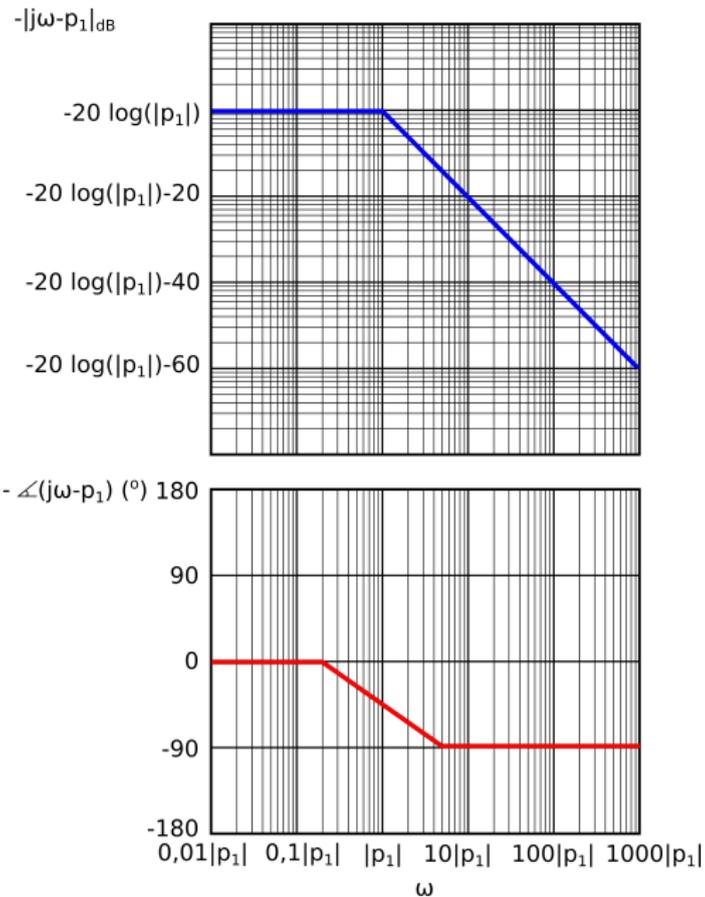
Assíntotas:

$$\angle(j\omega - p_1) = \begin{cases} 0, & \omega \leq |p_1|, \\ -90^\circ, & \omega > |p_1|. \end{cases} \quad (11)$$

Unir essas assíntotas por uma reta começando meia década antes de  $p_1$  e terminando meia década depois, teremos:

$$\angle(j\omega - p_1) = \begin{cases} 0, & \omega \leq |p_1|/5, \\ -90^\circ \log(\omega 5/|p_1|)/\log 25, & |p_1|/5 < \omega \leq 5|p_1| \\ -90^\circ, & \omega > 5|p_1|. \end{cases} \quad (12)$$





- Ganho em  $dB$  será diminuído de  $20 \log |p_1|$  em baixas frequências e crescerá com  $20 \text{ dB/dec}$  acima de  $|p_1|$ ;
- Fase será diminuída a partir de cerca de  $\omega = |p_1|/5$ , atingindo  $-45^\circ$  em  $\omega = |p_1|$  e chegando à assíntota constante de  $-90^\circ$  a partir de cerca de  $\omega = 5|p_1|$ ;
- Efeito da adição do polo é o oposto da adição do zero;
- Adicionar os dois nas mesmas frequências, isto é,  $z_1 = p_1$ , os efeitos se cancelarão. Isso pode ser notado obviamente se olharmos para a função de transferência resultante:

$$G(s) = G_n(s) \frac{s - z_1}{s - p_1} = G_n(s), \quad z_1 = p_1. \quad (13)$$

- Polo e o zero estiverem em posições diferentes  $\Rightarrow$  alterar a resposta em frequência do sistema;
- Se colocarmos apenas um polo ou um zero e um polo, a função de transferência do elemento é própria, podendo ser realizada.



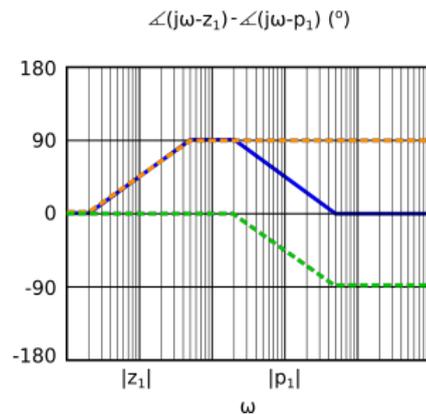
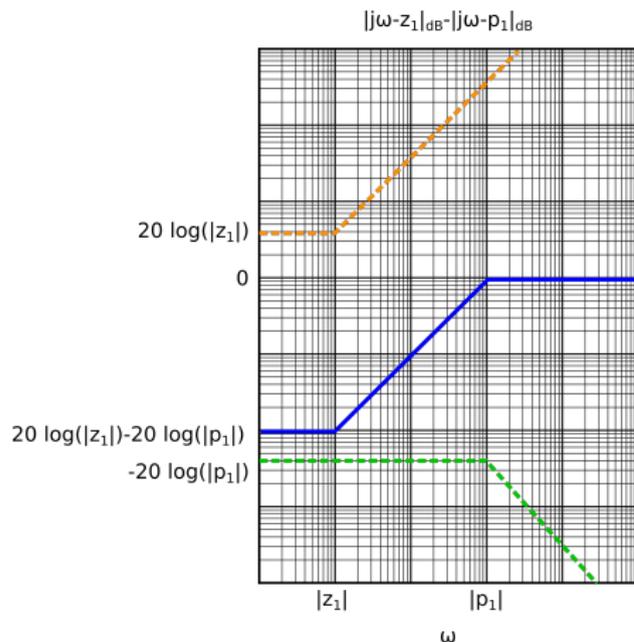
# Efeito de acrescentar um zero e depois um polo no diagrama de Bode

$$G(s) = G_n(s) \frac{s - z_1}{s - p_1}, \quad |z_1| < |p_1|. \quad (14)$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_n(j\omega)|_{dB} + |j\omega - z_1|_{dB} - |j\omega - p_1|_{dB}, \quad (15)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_n(j\omega) + \angle(j\omega - z_1) - \angle(j\omega - p_1). \quad (16)$$





- Laranja: zero;
- Verde: polo;
- Azul: zero e polo.



- Zero e polo separados por duas décadas  $\Rightarrow$  ganho é diminuído de  $40\text{ dB}$  em baixas frequências, por causa da razão entre o módulo do zero e do polo;
- Ao passar pela frequência  $\omega = |z_1|$ , o ganho começa a crescer com  $20\text{ dB/dec}$ , por causa do zero;
- Ao atingir  $\omega = |p_1|$ , o polo faz com que esse crescimento pare. O valor de ganho estaciona em  $0\text{dB}$ .
- Fase começa a crescer em  $\omega = |z_1|/5$ , por conta do zero, atingindo  $45^\circ$  em  $\omega = |z_1|$  e  $90^\circ$  em  $\omega = 5|z_1|$ ;
- Devido ao polo, começa a decrescer em  $\omega = |p_1|/5$ , atinge novamente  $45^\circ$  em  $\omega = |p_1|$  e volta a  $0$  em  $\omega = 5|p_1|$ ;



Introdução do par zero/polo, com o zero com frequência de quebra menor do que a do polo:

- Diminuir o ganho DC do sistema;
- Aumentar a fase entre as frequências de quebra do zero e do polo.

Aumento máximo se dá na frequência intermediária entre as frequências de quebra do zero e do polo, que é a sua média geométrica, pois essa frequência,  $\omega_{max}$  será tal que:

$$\log \omega_{max} = \frac{\log |z_1| + \log |p_1|}{2} \Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{|z_1||p_1|}. \quad (17)$$



### Observação 1.

*Se a frequência de quebra do polo estivesse mais próxima da do zero, o efeito seria que a fase não atingiria um valor máximo de  $90^\circ$ , mas sim um valor menor. O ganho também não voltaria a 0 dB, ficando abaixo disso.*

### Observação 2.

*Esse efeito de aumentar a fase em algumas frequências é conhecido como **avanço de fase**. O elemento constituído pelo zero e o polo que produzem esse efeito, quando multiplicado por um ganho, é chamado **compensador de avanço de fase**.*



# Fórmulas do avanço de fase

Função de transferência do compensador  $C_a$ :

$$C_a(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}. \quad (18)$$

Zero

$$z_1 = -\frac{1}{T} \quad (19)$$

Polo

$$p_1 = -\frac{1}{\alpha T}. \quad (20)$$

$$|z_1| < |p_1| \Rightarrow \alpha < 1.$$



Fase  $\phi$  do compensador na frequência  $\omega$ :

$$\phi = \arctan(T\omega) - \arctan(\alpha T\omega). \quad (21)$$

Frequência  $\omega_{max}$  onde ocorre o pico de fase:

$$\omega_{max} = \sqrt{|z_1||p_1|} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}. \quad (22)$$

Substituindo esse valor na expressão para a fase:

$$\phi_{max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha}). \quad (23)$$



Trabalhando essa expressão:

$$\begin{aligned} \tan \phi_{max} &= \tan \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) - \arctan (\sqrt{\alpha}) \right] \\ &= \frac{\tan \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] - \tan \left[ \arctan (\sqrt{\alpha}) \right]}{1 + \tan \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \tan \left[ \arctan (\sqrt{\alpha}) \right]} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Mas:

$$\tan \phi_{max} = \frac{\text{sen } \phi_{max}}{\text{cos } \phi_{max}} \quad (25)$$

e

$$\text{cos } \phi_{max} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \phi_{max}}. \quad (26)$$



$$\frac{\sin \phi_{max}}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi_{max}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}}{2}. \quad (27)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\frac{\sin^2 \phi_{max}}{1 - \sin^2 \phi_{max}} = \frac{1 - \alpha^2}{4\alpha}. \quad (28)$$

Isolando o seno:

$$\sin^2 \phi_{max} = \frac{1 - 2\alpha + \alpha^2}{1 + 2\alpha + \alpha^2}. \quad (29)$$

Tirando a raiz positiva:

$$\sin \phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (30)$$

Escrevendo  $\alpha$  em função do seno:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}}. \quad (31)$$

Avanço máximo necessário só depende da razão entre as frequências de quebra do polo e do zero.



# Ajustando $\omega_c$ e $PM$ com um compensador de avanço de fase

- 1 Requisitos de MF:  $M_p, t_r|_{100\%}, t_p, t_s \Rightarrow PM$  e  $\omega_c$  desejados em MA;
- 2 Verificar se  $PM$  é maior ou igual à desejada na frequência  $\omega_c$ ;
- 3 Em caso afirmativo, determinar o ganho  $K$  para que o cruzamento de  $0\text{ dB}$  ocorra em  $\omega_c$ . (O “excesso” de  $PM$  faz com que o sistema fique mais amortecido do que o solicitado, o que usualmente é bom, pois o requisito de sobressinal costuma ser dado em termos de um sobressinal máximo, o que repercute em uma  $PM$  mínima a ser atingida. Nesse caso, é desnecessário adicionar zeros e polos ao controlador);
- 4 Caso a  $PM$  seja inferior ao necessário na frequência  $\omega_c \Rightarrow$  compensador a avanço de fase;



# Ajustando $\omega_c$ e $PM$ com um compensador de avanço de fase

- 5 Avanço máximo em  $\omega_c$ :  $\phi_{max} = PM_{desejada} - PM_{atual}$ .
- 6 Calcule o valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen } \phi_{max}}{1 + \text{sen } \phi_{max}}. \quad (32)$$

- 7 Determine  $T$  para satisfazer:

$$\omega_c = \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}},$$

isto é,

$$T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}}. \quad (33)$$



# Ajustando $\omega_c$ e $PM$ com um compensador de avanço de fase

- 8 O ganho do sistema foi alterado pelo termo contendo o zero e o polo. Em  $\omega_c$  o ganho é

$$\left| \frac{j\omega_c T + 1}{j\omega_c \alpha T + 1} \right| = \sqrt{\frac{(\omega_c T)^2 + 1}{(\omega_c \alpha T)^2 + 1}}, \quad (34)$$

substituindo  $T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}}$ :

$$\left| \frac{j\omega_c T + 1}{j\omega_c \alpha T + 1} \right| = \sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (35)$$

K deve compensar  $|G(j\omega_c)|/\sqrt{\alpha}$ , de forma a ser unitário (equivalente a 0 dB):

$$K \frac{|G(j\omega_c)|}{\sqrt{\alpha}} = 1 \Rightarrow K = \frac{\sqrt{\alpha}}{|G(j\omega_c)|}. \quad (36)$$



## Example 1.

$$G(s) = \frac{0,005}{s(s + 0,05)}, \quad (37)$$

deve atender os requisitos em malha fechada:

$$t_r \leq 18 \text{ s}, \quad (38)$$

$$M_p \leq 0,3. \quad (39)$$

Esses requisitos resultam em

$$\xi \geq 0,35 \Rightarrow PM \geq 35^\circ, \quad (40)$$

$$\omega_c \geq 0,11 \text{ rad/s}. \quad (41)$$

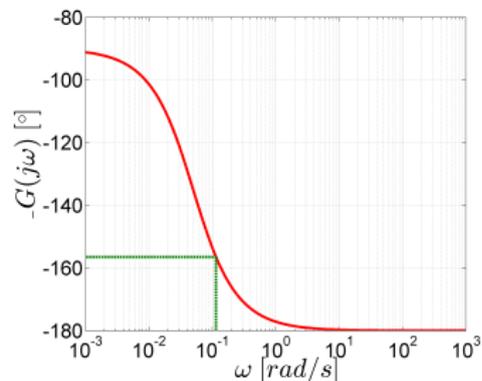
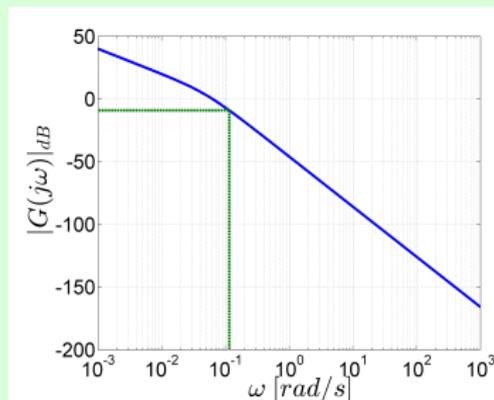
Para acomodar efeitos de aproximações , somar  $5^\circ$  na  $PM_d$  desejada:

$$PM_d = 35^\circ + 5^\circ = 40^\circ. \quad (42)$$



## Exemplo 1 - continuação

$|G(j\omega_c)|_{dB} = -9,2 \text{ dB}$  e  $\angle G(j\omega_c) = -157^\circ \Rightarrow PM_a = 23^\circ$ . Isto é, apenas com um ganho é impossível atingir os requisitos.



### Exemplo 1 - continuação

Seguindo o procedimento proposto, calcula-se o avanço de fase que o compensador deve fornecer:

$$\phi = PM - \angle G(j\omega_c) - 180^\circ = 40^\circ + 157^\circ - 180^\circ = 17^\circ. \quad (43)$$

Para que o avanço máximo seja de  $17^\circ$  (escolhe-se assim para não afastar o polo demasiadamente do zero sem necessidade), deve-se ter:

$$\alpha = \frac{1 - \sin 17^\circ}{1 + \sin 17^\circ} = 0,54 \quad (44)$$

A fim de que a frequência para o máximo avanço seja  $\omega_c$ , é necessário que:

$$T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{0,11 \sqrt{0,54}} \approx 12. \quad (45)$$



## Exemplo 1 - continuação

O ganho do compensador em  $\omega_c$  é de  $1/\sqrt{\alpha} = 1,35$ . Assim, o ganho para fazer com que o cruzamento do zero ocorra em  $0,11 \text{ rad/s}$  é:

$$\begin{aligned} |K|_{dB} &= 10 \log \alpha - |G(j\omega_c)|_{dB} \\ &= 10 \log 0,54 - |G(j0,11)|_{dB} \\ &= -2,7 + 9,2 = 6,5 \text{ dB}, \\ K &= 10^{\frac{K_{dB}}{20}} = 2,1. \end{aligned} \quad (46)$$

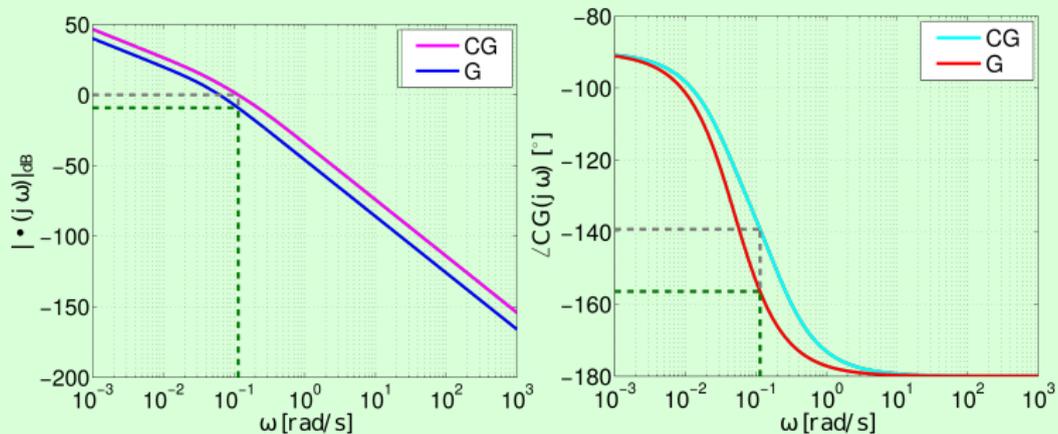
O compensador será:

$$C(s) = 2,1 \frac{12s + 1}{6,5s + 1}. \quad (47)$$



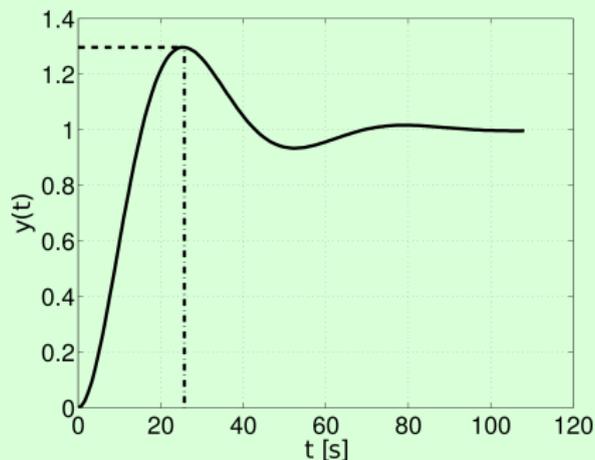
## Exemplo 1 - continuação

Diagrama de Bode do sistema compensado  $C(s)G(s)$ :



## Exemplo 1 - continuação

Resposta do sistema em malha fechada para uma entrada degrau unitário:  $M_p = 0,3$  e  $t_r|_{0}^{100\%} = 16$  s, atendendo os requisitos.

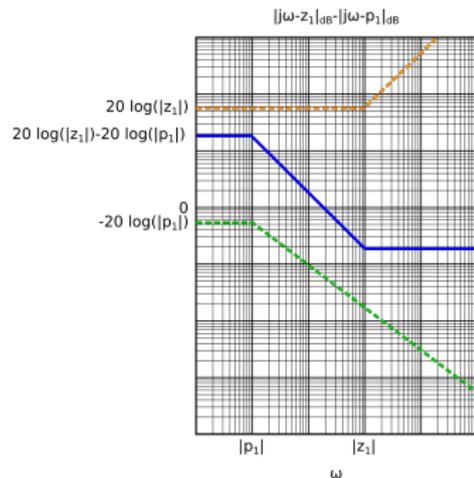


# Ajustando a constante de erro sem alterar (muito) $\omega_c$ e a $PM$

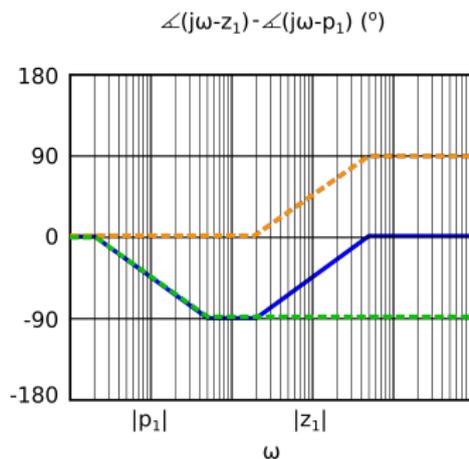
- Erro em regime estacionário está ligado com o ganho em baixa frequência de malha aberta  $G(0)$ ;
- Caso o sistema não seja do tipo 1, o ganho em baixa frequência é finito e há erro em regime estacionário para a entrada degrau;
- Necessário ajustar a constante de erro sem alterar (muito)  $\omega_c$  e a  $PM$ ;
- Importante quando o comportamento no regime transitório está adequado e deve ser alterado o mínimo possível, mas ainda assim é necessário adequar o ganho DC.
- Uma alternativa é multiplicar  $G(s)$  por um ganho  $K$ : resolveria o problema em baixas frequências, mas a frequência de cruzamento de 0 dB e a margem de fase seriam alteradas, podendo mudar substancialmente o comportamento em regime transitório.
- Outra saída: usar um compensador, acrescentando um par polo/zero, com frequências de quebra diferentes.



- Zero com frequência de quebra menor do que a do polo:
  - ganho  $\uparrow$  nas frequências mais altas;
  - fase é alterada na vizinhança da média geométrica das frequências de quebra;
- $\uparrow$  o ganho em baixas frequências  $\Rightarrow$  **inverter a ordem das frequências de quebra** (o módulo do polo ser menor do que o do zero):
  - ganho  $\uparrow$  em frequências inferiores à do polo, sem aumentar o ganho em altas frequências (maiores do que a do zero);
  - pouco altera  $\omega_c$  se o polo estiver afastado desse valor.



- $PM$  pouco afetada, pois a vizinhança da média geométrica do polo e do zero estará longe de  $\omega_c$ ;
- Compensador diminui a fase entre as frequências de quebra: **compensador de atraso de fase**;
- Fase volta a 0 conforme se afasta da frequência de quebra do zero.



## Example 2.

O erro em regime estacionário deve ser menor ou igual a 10% para entrada degrau para o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}. \quad (48)$$

Esse sistema é tipo 0, então apresentará erro em regime estacionário dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}, \quad (49)$$

em que

$$K_p = G(0) = \frac{10}{2} = 5. \quad (50)$$

Portanto, o erro em regime estacionário será

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+5} \approx 0,167. \quad (51)$$



## Exemplo 2 - continuação

Erro em regime estacionário 16,7% para entrada degrau não atende o requisito  $\Rightarrow$  alterar o ganho em baixas frequências. Compensador de atraso de fase:

$$C(s) = \frac{s - z}{s - p}. \quad (52)$$

Precisamos escolher  $z$  e  $p$  adequadamente. Para isso, vamos tentar diminuir o erro em regime estacionário à metade:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_{p,c}} = \frac{e_{ss}}{2} = \frac{1}{12} \approx 0,083. \quad (53)$$

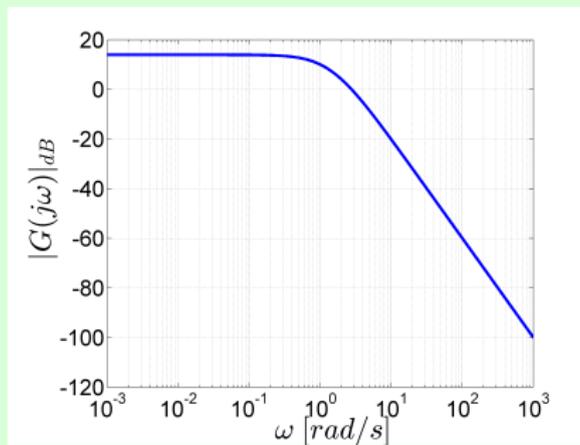
Donde

$$11 = K_{p,c} = C(0)G(0) = \frac{z}{p}K_p = \frac{z}{p}5 \Rightarrow \frac{z}{p} = \frac{11}{5} = 2,2. \quad (54)$$



## Exemplo 2 - continuação

Observando a magnitude no diagrama de Bode de  $G(s)$  a frequência  $\omega_c$  de cruzamento de 0 dB é de aproximadamente 2,7 rad/s.



## Exemplo 2 - continuação

Tipicamente, para evitar que a fase seja alterada próximo da frequência de cruzamento de  $0 \text{ dB}$ , faz-se com que

$$-z \leq \frac{\omega_c}{10}. \quad (55)$$

Para esse caso, escolhe-se

$$z = -\frac{\omega_c}{10} = -0,27. \quad (56)$$

Então:

$$2,2 = \frac{z}{p} = \frac{-0,27}{p} \Rightarrow p = -0,12. \quad (57)$$

Com isto o compensador resultante é:

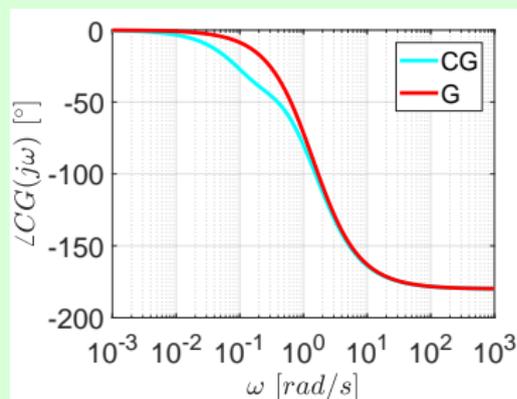
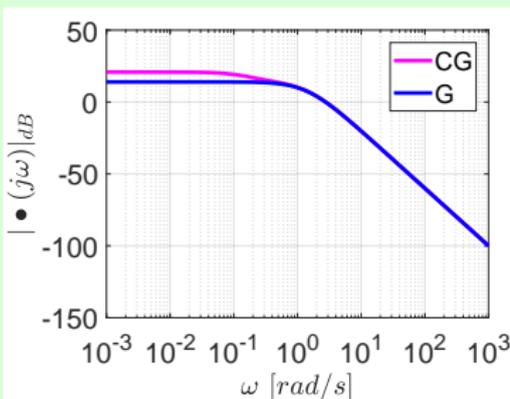
$$C(s) = \frac{s + 0,27}{s + 0,12}, \quad (58)$$

a ser colocado em cascata com  $G(s)$ .



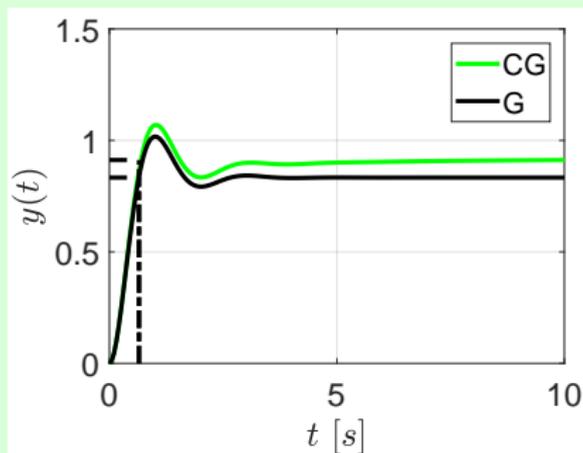
## Exemplo 2 - continuação

- Ganho é alterado em frequências abaixo da frequência de cruzamento do zero;
- $PM$  e  $\omega_c$  pouco alteradas.



## Exemplo 2 - continuação

- Simulando o sistema para entrada degrau sem e com compensador:
  - sistema com o compensador apresenta metade do erro em regime do que apresenta sem;
  - $t_r|_{100\%}$  aumenta de 0,61 s para 0,64 s;
  - $M_p$  cai de 22% para 17%.



# Compensador de avanço e atraso de fase

- Compensador de avanço para atender requisitos de regime transitório;
- Compensador de atraso de fase para atender requisito de erro em regime estacionário sem comprometer a resposta transitória.

## Example 3.

Seja o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+10)}, \quad (59)$$

que deve atender os seguintes requisitos em malha fechada:

- $M_p \leq 0,1$ ;
- $t_r \leq 0,1$  s;
- $e_{ss} \leq 0,05$  para entrada degrau unitário.



## Exemplo 3 - continuação

$$PM \geq 59^\circ$$

e

$$\omega_c \geq 27 \text{ rad/s.}$$

Adotando os valores limítrofes:

$$PM_d = 59^\circ$$

e

$$\omega_c = 27 \text{ rad/s.}$$

- $\angle G(j\omega_c) = -149^\circ \Rightarrow PM_a = 31^\circ$ ;
- Compensador de avanço de fase  $\phi = PM_d - PM_a = 28^\circ$ ;
- Introdução de um compensador de atraso de fase reduz a PM, somaremos  $5^\circ$  para antecipar essa perda:

$$\phi = PM_d - \angle G(j\omega_c) - 180^\circ + 5^\circ = 59^\circ + 149^\circ - 180^\circ + 5^\circ = 33^\circ.$$



### Exemplo 3 - continuação

$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen} 33^\circ}{1 + \operatorname{sen} 33^\circ} = 0,3. \quad (60)$$

A fim de que a frequência para o máximo avanço seja  $\omega_c$ :

$$T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{27 \sqrt{0,3}} \approx 0,07. \quad (61)$$

Ganho deve ser ajustado para que a frequência de cruzamento de 0 dB seja 27 rad/s:

$$\begin{aligned} |K|_{dB} &= 10 \log \alpha - |G(j\omega_c)|_{dB} \\ &= 10 \log 0,3 - |G(j27)|_{dB} \\ &= -5,3 + 57,8 = 52,5 \text{ dB}, \\ K &= 10^{\frac{K_{dB}}{20}} = 420. \end{aligned} \quad (62)$$



### Exemplo 3 - continuação

O compensador será:

$$C_1(s) = 420 \frac{0,07s + 1}{0,021s + 1}. \quad (63)$$



### Exemplo 3 - continuação

Calculando  $K_p$  para esse  $C(s)G(s)$ :

$$K_p = C(0)G(0) = \frac{420}{5 \times 10} = 8,4, \quad (64)$$

então,

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 8,4} \approx 0,11, \quad (65)$$

o que não atende o requisito. Para atender, tem-se que reduzir a **aproximadamente** à metade. Para isso, o ganho em baixas frequências deverá ser:

$$0,05 = \frac{1}{20} = e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \Rightarrow K_p = 19, \quad (66)$$

que é aproximadamente o dobro do atual.



### Exemplo 3 - continuação

Arbitrando:

$$z = -\frac{\omega_c}{10} \approx -2,8, \quad (67)$$

determina-se  $p$  para se ter aproximadamente o ganho DC desejado:

$$p = \frac{z}{2} = -1,4. \quad (68)$$

Com esses valores, o compensador de atraso de fase fica:

$$C_2(s) = \frac{s-z}{s-p} = \frac{s+2,8}{s+1,4}. \quad (69)$$

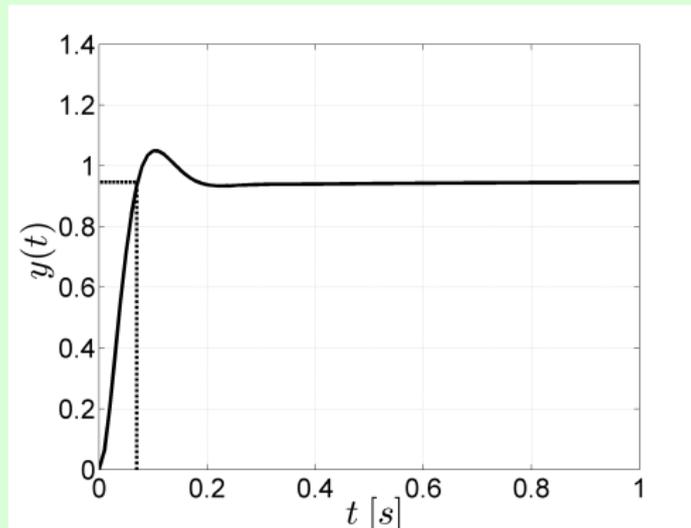
E o compensador completo é

$$C(s) = C_1(s)C_2(s) = 420 \frac{0,07s+1}{0,021s+1} \frac{s+2,8}{s+1,4}. \quad (70)$$



### Exemplo 3 - continuação

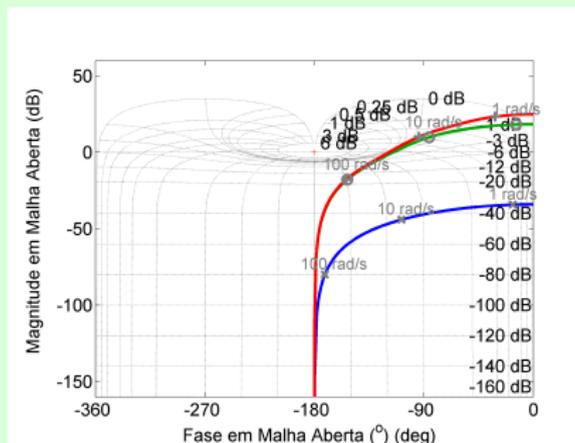
Simulando o sistema em MF com uma entrada degrau unitário com esse compensador obtêm-se sobressinal de cerca de 10%, tempo de subida de 0,07 s e erro em regime estacionário de aproximadamente 5%, de acordo com os requisitos de projeto.



# Visualização na carta de Nichols-Black

## Exemplo 3 - continuação

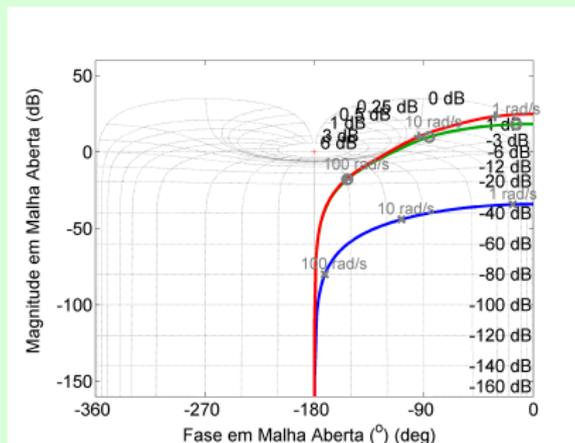
- Azul: a curva do sistema  $G(s)$ ;



# Visualização na carta de Nichols-Black

## Exemplo 3 - continuação

- Verde: com compensador de avanço de fase
  - $10 \text{ rad/s} \leq \omega_c \leq 100 \text{ rad/s}$  ( $\omega_c \approx 30 \text{ rad/s}$ );
  - $PM \approx 60^\circ$ :  $\xi \approx 0,6 \Rightarrow M_p \approx 10\%$ ;
  - erro em regime estacionário é inadequado.



# Visualização na carta de Nichols-Black

## Exemplo 3 - continuação

- Vermelho: avanço e atraso
  - aumenta o ganho antes de  $\omega_c$ ;
  - proximidades de  $\omega_c$ : as curvas verde e vermelha se unem, evidenciando que a margem da fase e a frequência de cruzamento permaneceram essencialmente as mesmas.

