



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 21 - Avanço de fase no plano s

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

7 de maio de 2018

Avanço de fase no plano s

- Avanço de fase necessário quando a **condição de fase não for satisfeita** em nenhum ponto da região de desempenho sem comprometer a estabilidade ou a hipótese de polos dominantes.

Example 1.

Sistema MA

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0,5)}, \quad (1)$$

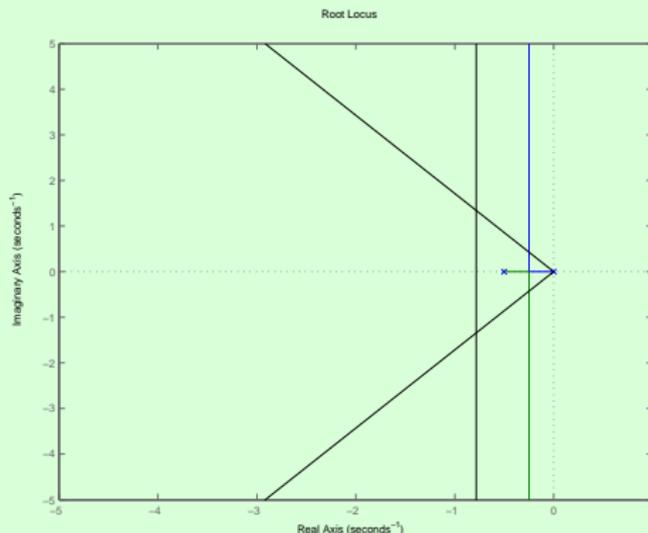
Requisitos MF:

- $M_p \leq 0,16 \Rightarrow \xi \geq 0,5 \Rightarrow \arccos(\xi) \leq 60^\circ$,
- $t_{s2\%} \leq 5s \Rightarrow \sigma \geq \frac{|\ln 0,02|}{5} = 0,8 \text{ rad/s}$.



Exemplo 1 - continuação

- Região de desempenho e LGR de $G(s)$:



- Não há interseção: **condição de fase não é satisfeita** para nenhum candidato a polo de malha fechada que atenda os requisitos.



Exemplo 1 - continuação

- Tomando par de polos complexos conjugados na região de desempenho $\square = -1 + j1$ ($\bar{\square} = -1 - j1$):

$$\begin{aligned} \angle G(\square) &= \angle \frac{1}{\square(\square + 0,5)} = -\angle \square - \angle \square + 0,5 \\ &\quad - \text{atan}(-1) - \text{atan}(-2) = 108,4^\circ, \end{aligned} \quad (2)$$

- Para que \square (e $\bar{\square}$) faça parte do LGR, deve-se adicionar uma fase de

$$\phi = 180^\circ - \angle G(\square) = 180^\circ - 108,4^\circ = 71,6^\circ, \quad (3)$$

- Implementar o compensador na forma:

$$C(s) = K \frac{s+z}{s+p}, \quad (4)$$

- $K, z, p \geq 0 \Rightarrow$ tem-se um grau de liberdade a mais do que o necessário (fase específica a posição relativa do polo e do zero).



Exemplo 1 - continuação

- Domínio da frequência: grau de liberdade eliminado impondo que a fase máxima do compensador de avanço de fase ocorresse na frequência ω_c de cruzamento desejada e que fosse igual à fase ϕ desejada;
- Plano s : não faz sentido falar em termos de frequência ω_c ;
- Há diversas alternativas para lidar com o grau de liberdade a mais;
- Uma delas: simplesmente arbitrar a posição do zero \Rightarrow polo será fixado também

$$\angle C(\square)G(\square) = \angle(\square + z) - \angle(\square + p) + \angle G(\square) = 180^\circ + k360^\circ, \quad (5)$$

- Apenas uma solução (se houver alguma) para p uma vez que z esteja fixo.



Exemplo 1 - continuação

- Colocar o zero $-z$ diretamente sobre a parte real dos polos complexos conjugados desejados em MF

$$z = -\operatorname{Re}\{\square\}; \quad (6)$$

- $\square = -1 + j1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow \angle\square + z = \angle j\omega_d = 90^\circ$;
- Encontrar p : basta resolver

$$\angle(\square + p) = 90^\circ + k360^\circ - \angle G(\square) = 90^\circ - \phi, \quad (7)$$

em que ϕ é a fase total que o compensador deve fornecer em $s = \square$;



Exemplo 1 - continuação

$$\angle(\square + p) = 90^\circ + k360^\circ - \angle G(\square) = 90^\circ - \phi,$$

Desenvolvendo a expressão:

$$\text{atan} \frac{\text{Im}\{\square\}}{\text{Re}\{\square\} + p} = 90^\circ - \phi, \quad (8)$$

$$p = \text{Im}\{\square\} \tan(\phi) - \text{Re}\{\square\}, \quad (9)$$

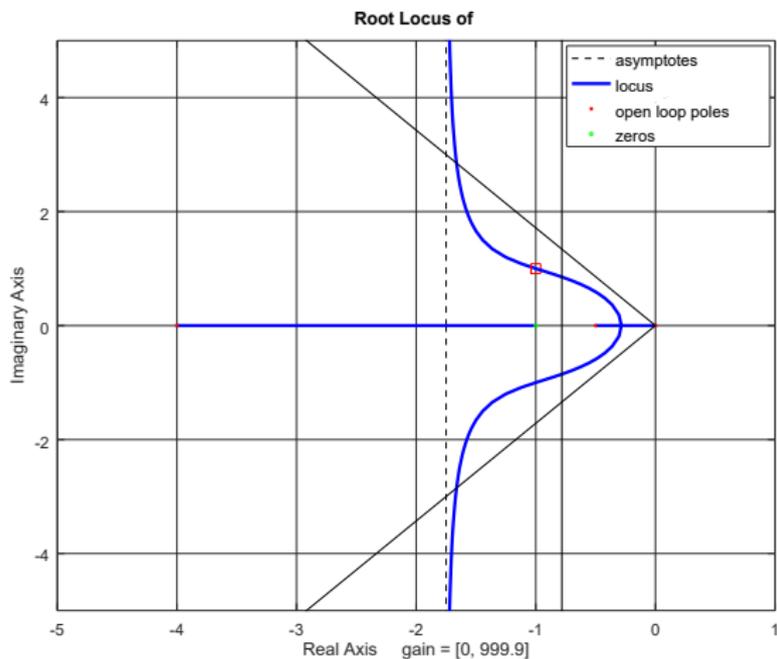
No caso particular do nosso exemplo, resulta que:

$$p = 1 \tan(71,6^\circ) + 1 = 4, \quad (10)$$



Exemplo 1 - continuação

$z = 1$ e $p = 4 \rightarrow$ LGR do sistema compensado $C(s)G(s)$:



Exemplo 1 - continuação

- Calcular o ganho K de forma que o polo MF seja o desejado;
- Da condição de ganho, tem-se que:

$$|C(\square)G(\square)| = 1, \quad (11)$$

$$K = \frac{|\square + p|}{|(\square + z)G(\square)|}. \quad (12)$$

- No caso do nosso exemplo:

$$K = \frac{|-1 + j1 + 4|}{\left| (-1 + j1 + 1) \frac{1}{(-1 + j1)(-1 + j1 + 0,5)} \right|} = 5. \quad (13)$$

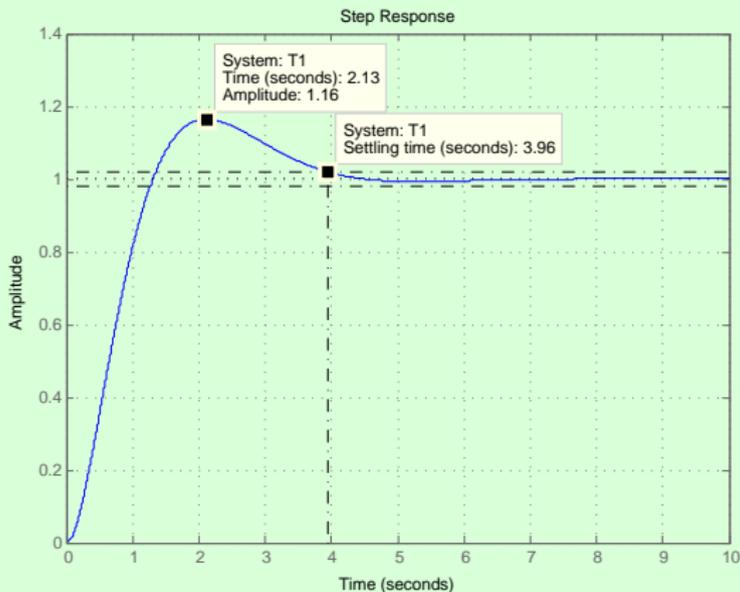
- Dessa forma, completa-se o projeto do controlador:

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} = 5 \frac{s + 1}{s + 4}. \quad (14)$$



Exemplo 1 - continuação

- Resposta ao degrau em MF: $M_p = 0,16$ e $t_{s2\%} = 3,96$ s, o que atende aos requisitos.



- Polos de MF no projeto do exemplo 1: $-1 \pm j1 \Rightarrow \xi = \sqrt{2}/2 \Rightarrow M_p = 0,04 \ll 0,16$ observado em simulação;

Pergunta

O que poderia explicar este descasamento?

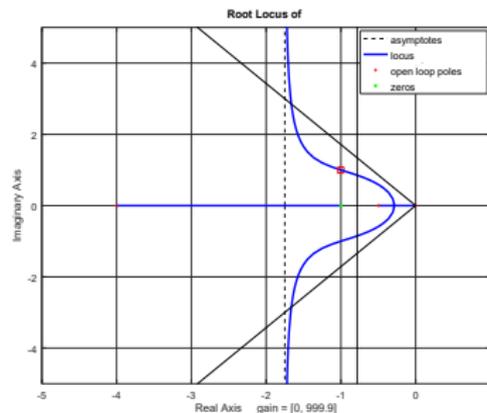
Observação 1.

- Controlador proposto na Equação (4): $C(s) = K \frac{s+z}{s+p}$;
- Introduce um zero e um polo à função de transferência em MF;
- Zero em $-z$;
- Caso particular do exemplo 1, $z = -\text{Re}\{\square\} = \sigma = \xi\omega_n \Rightarrow$ zero exatamente tão afastado do eixo imaginário quanto os polos dominantes;
- Par zero/polo adicional à função de transferência de segunda ordem;



Observação 1 - continuação

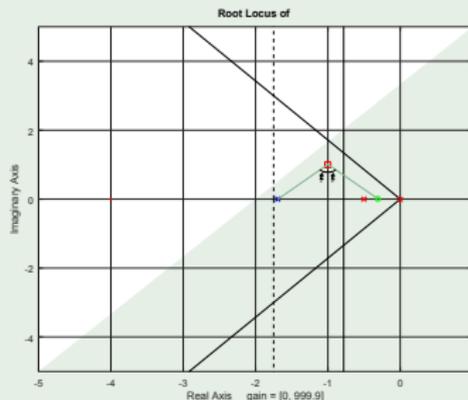
- Aumento do ganho afasta o polo do valor de $MA = -4$ em direção ao zero em $-1 \Rightarrow$ zero mais próximo do eixo imaginário do que o polo;
- Só atinge -1 para $K \rightarrow \infty$;
- Efeito do zero será mais pronunciado e, então, a resposta será menos amortecida do que a prevista a partir dos polos dominantes.



Outras maneiras de se arbitrar uma escolha de modo a obter o zero e o polo do compensador

Example 2.

- Arbitrar polo e zero equidistantes do polo desejado (desde que isso não resulte em zero no SPD);
- Polo e zero do compensador formarão um triângulo isósceles com o polo desejado:



Exemplo 2 - continuação

$$z = -\operatorname{Re}\{\square\} - \operatorname{Im}\{\square\} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad (15)$$

$$p = -\operatorname{Re}\{\square\} + \operatorname{Im}\{\square\} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (16)$$

- Para o caso do exemplo 1 $\left(G(s) = \frac{1}{s(s+0,5)} \text{ e } \square = -1 + j\right)$:

$$z = 1 - 1 \tan\left(\frac{71,6^\circ}{2}\right) = 0,28, \quad (17)$$

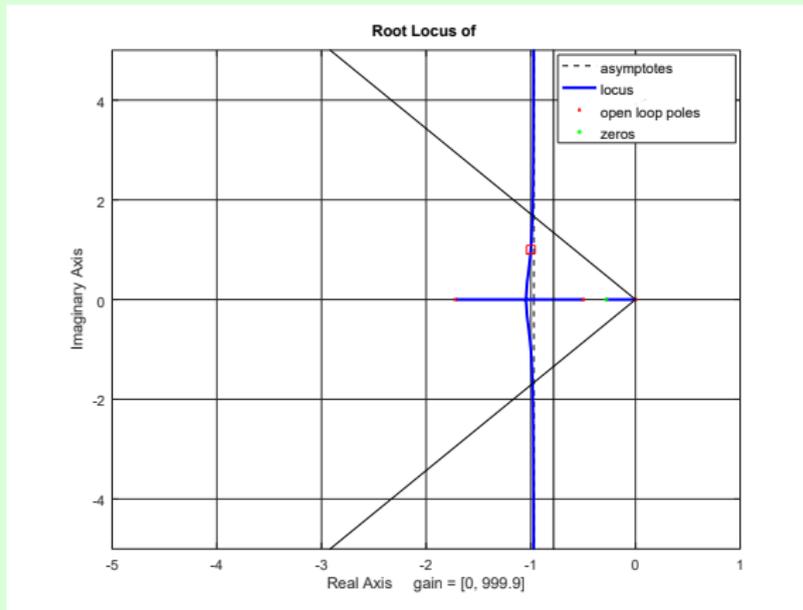
e

$$p = 1 - 1 \tan\left(\frac{71,6^\circ}{2}\right) = 1,72. \quad (18)$$



Exemplo 2 - continuação

LGR do sistema compensado



Usando a Equação (12) para determinar o ganho K , tem-se:

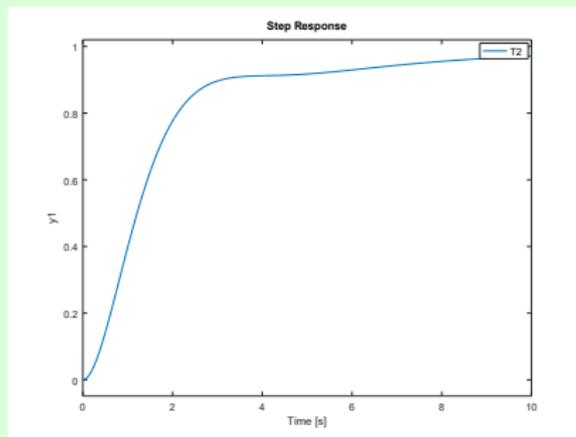
$$K = 1.59$$

$$(10)$$



Exemplo 2 - continuação

- Resposta ao degrau com este compensador apresenta um modo muito mais lento do que aquele previsto pelos polos dominantes;
- Reexaminando o LGR: zero do compensador ficou entre os dois polos do sistema em MA \Rightarrow ramo do LGR que resulta em um polo de MF mais próximo ao eixo imaginário do que o par de polos complexos conjugados;
- Terceiro polo responsável pelo comportamento mais amortecido.



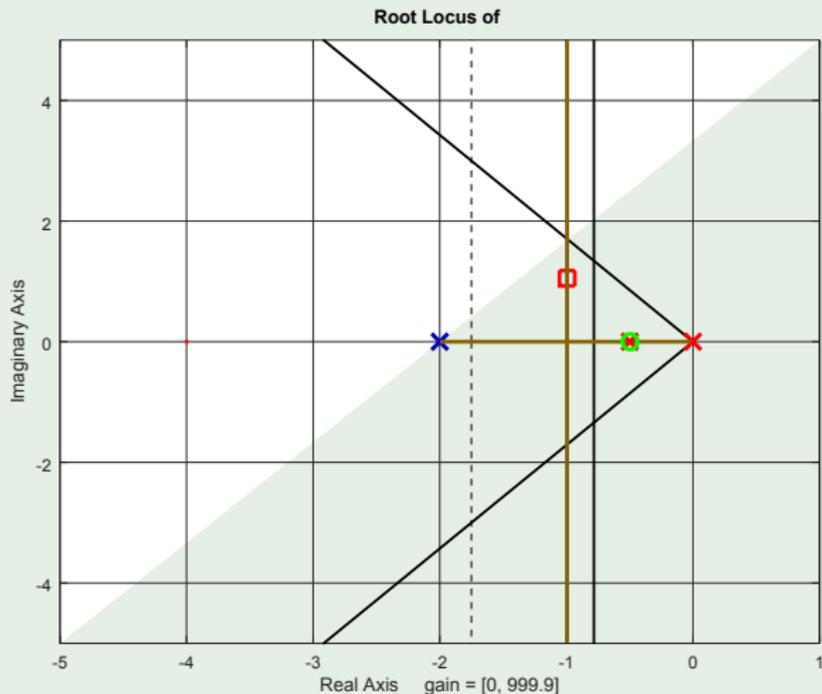
Observação 2.

- *Zero do compensador entre os dois polos de $G(s)$ no exemplo 2 em MA neste caso **não é uma regra**;*
- *Este fato foi o causador do ramo ligando o polo de $G(s)$ em 0 ao zero do compensador;*
- *Resultou em um polo de MF mais próximo do eixo imaginário do que o par de polos dominantes;*
- *Esse polo é responsável pelo comportamento mais amortecido observado na resposta ao degrau;*
- *Caso o requisito de fase ϕ fosse menor, poderíamos ter o zero à esquerda de ambos os polos de $G(s)$, obtendo um resultado semelhante ao do exemplo 1.*



Example 3.

- Pode-se escolher o zero do compensador para cancelar um polo de $G(s)$ em MA;



Exemplo 3 - continuação

- Por meio deste método, têm-se:

$$z = -p_2, \quad (20)$$

em que p_2 é o polo de malha aberta mais afastado do eixo imaginário.
Por sua vez:

$$p = p_1 - 2\text{Re}\{\square\}, \quad (21)$$

em que p_1 é o polo de malha aberta mais próximo do eixo imaginário.



Exemplo 3 - continuação

Para o caso do exemplo 1 $\left(G(s) = \frac{1}{s(s+0,5)} \text{ e } \square = -1 + j \right)$

$$z = 0,5, \quad (22)$$

$$p = 0 - 2(-1) = 2. \quad (23)$$

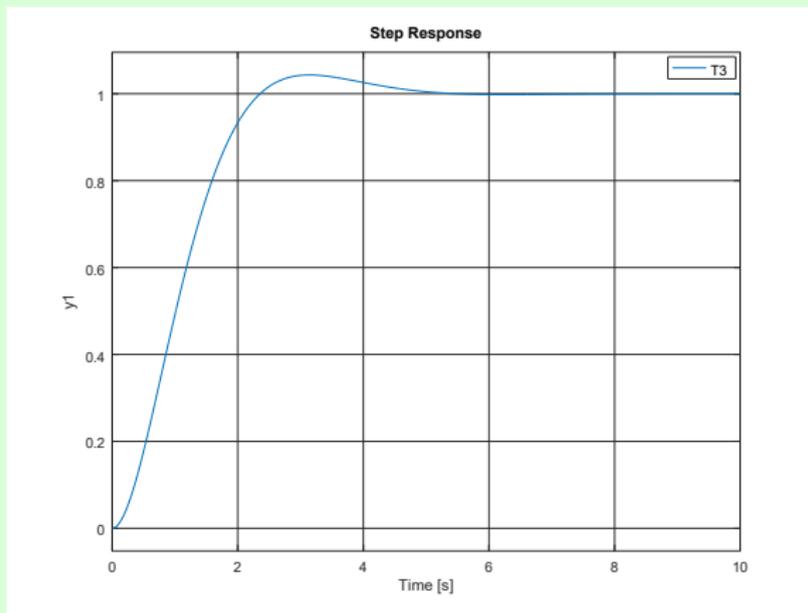
Usando a Equação (12) para determinar o ganho K :

$$K = 2. \quad (24)$$



Exemplo 3 - continuação

- Resposta ao degrau coincide exatamente com o predito pelo par de polos dominantes:
 - cancelamento do zero do compensador com um dos polos da planta \Rightarrow sistema de segunda ordem sem zeros.



Observação 3.

- *Controlador com ganho estático (DC) $\uparrow \Rightarrow \downarrow$ erro em regime estacionário;*
- *Parcela dependente de $G(s)$ não pode ser alterada \Rightarrow ganho estático do sistema dependerá de:*

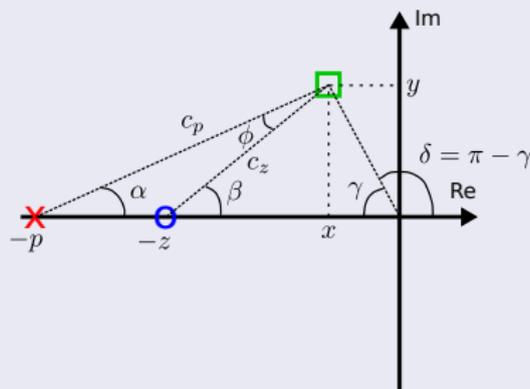
$$\lim_{s \rightarrow 0} C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{s+z}{s+p}, \quad (25)$$

- *Ganho estático do compensador da Equação (25):*

$$K_{DC} = K \frac{z}{p}, \quad (26)$$



Observação 3 - continuação



- $c_z = |\square + z|$ e $c_p = |\square + p|$
- \square polo de MF:

$$K = \frac{1}{|C(\square)G(\square)|} = \frac{1}{|G(\square)|} \frac{|\square + p|}{|\square + z|} = c_g \frac{c_p}{c_z}, \quad (27)$$

- $c_g = \frac{1}{|G(\square)|}$ independe do compensador.



Observação 3 - continuação

- Reescrevendo a Equação (26):

$$K_{DC} = c_g \frac{c_p z}{c_z p}. \quad (28)$$

- Escrever z , p , c_z e c_p em função de $x = \text{Re}\{\square\}$ e $y = \text{Im}\{\square\}$ e dos ângulos α , β , γ , δ e ϕ :

$$-z = x - c_z \cos \beta, \quad (29)$$

$$-p = x - c_p \cos \alpha, \quad (30)$$

$$c_z = \frac{y}{\text{sen } \beta}, \quad (31)$$

$$c_p = \frac{y}{\text{sen } \alpha}, \quad (32)$$



Observação 3 - continuação

- Então,

$$\begin{aligned}
 K_{DC} &= c_g \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{x - \frac{y \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}}{x - \frac{y \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} = c_g \frac{x \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta}{x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha} \\
 &= c_g \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen} \beta - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \beta}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen} \alpha - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \alpha} \\
 &= c_g \frac{-\cos \gamma \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \gamma \cos \beta}{-\cos \gamma \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha} \\
 &= c_g \frac{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)}. \tag{33}
 \end{aligned}$$

- Por outro lado,

$$\beta = \alpha + \phi. \tag{34}$$



Observação 3 - continuação

$$K_{DC} = c_g \frac{\text{sen}(\alpha + \gamma + \phi)}{\text{sen}(\alpha + \gamma)} = c_g \left[\cos\phi + \frac{\text{sen}\phi}{\tan(\alpha + \gamma)} \right]. \quad (35)$$

- $0 < \gamma, \alpha < \pi/2$;
- c_g , γ e ϕ dependem apenas de $G(s)$ e de \square ;
- Compensador influencia K_{DC} somente através de α :
 - máximo \Rightarrow mínimo α .
- $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \phi \Rightarrow$ controlador resultante é o PD.



Example 4.

- Controlador PD:

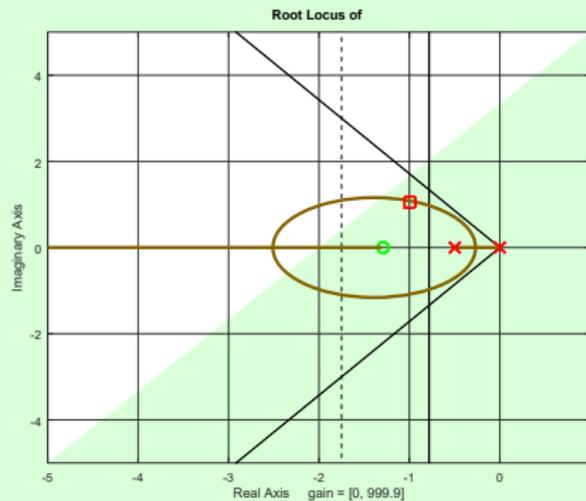
$$C(s) = K_p + K_d s = K_d \left(s + \frac{K_p}{K_d} \right) = K(s + z). \quad (36)$$

- Há dois parâmetros (K_d e z) a definir para atingir dois valores (ϕ e K) \Rightarrow sem grau de liberdade extra;
- Pode ser encarado como a alocação do polo do compensador de avanço de fase no infinito, restando apenas o zero e o ganho;
- Zero deve ser escolhido de forma que:

$$\angle(\square + z) = \phi, \quad (37)$$



Exemplo 4 - continuação



- Desenvolvendo a expressão na Equação (37):

$$z = -\operatorname{Re}\{\square\} + \frac{\operatorname{Im}\{\square\}}{\tan(\phi)}, \quad (38)$$



Exemplo 4 - continuação

- Para o caso do exemplo 1, resulta:

$$z = 1 + \frac{1}{\tan(71,6^\circ)} = 1,33, \quad (39)$$

- A Equação para determinar o ganho K que aloca o polo de malha fechada em \square é:

$$K = \frac{1}{|G(\square)||(\square + z)|}. \quad (40)$$

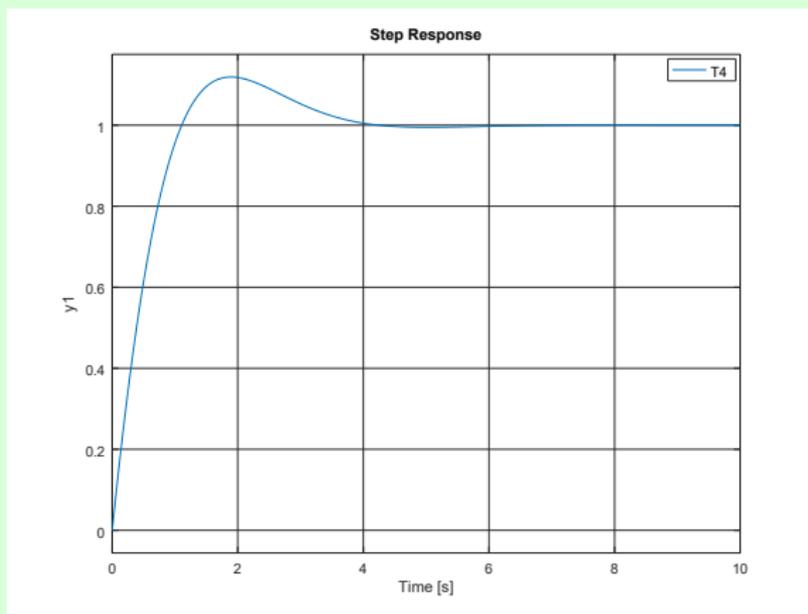
- Para o caso do exemplo 1, resulta:

$$K = 1,5. \quad (41)$$



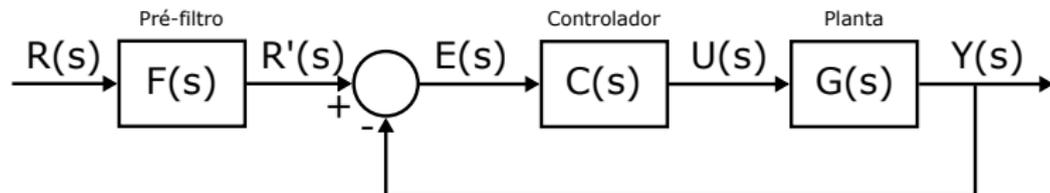
Exemplo 4 - continuação

- Resposta ao degrau: comportamento mais oscilatório do que o esperado considerando apenas os polos dominantes, com sobressinal $M_p \approx 0,12$, devido à presença do zero.



Uso de pré-filtro

- No exemplo 4 zero causou sobressinal maior do que o especificado;
- Eliminar o efeito deste zero na resposta sem alterar o LGR: uso de um pré-filtro para a referência:



- Função de transferência entre a referência $R(s)$ e a saída $Y(s)$ pode ser determinada como:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}. \quad (42)$$



$$F(s) = \frac{z}{s+z}, \quad (43)$$

- Cancela o efeito do zero na resposta mantendo o ganho estático inalterado;
- Cancelamento é exato, pois usualmente tanto $C(s)$ quanto $F(s)$ são implementados digitalmente;
- Resposta ao degrau: sobressinal voltou a ser exatamente o previsto com o par de polos dominantes.

